Soluzioni dello scritto del 19 luglio 2001.

Esercizio 1.

a) L'intersezione tra i due piani è data dai vettori del tipo $\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}$ per cui l'**equazione parametrica** è $r = t(1, -1, 2)$.

b) Per trovare U, basta determinare due vettori **linearmente indipendenti ortogonali** a $(1, -1, 2)$. Per esempio $(0, 2, 1)$ e $(1, 1, 0)$. U è allora il piano di **equazione parametrica** $U = t(0, 1, 2) + s(1, 1, 0)$ oppure di **equazione cartesiana** $x - y + 2z = 0$.

Esercizio 2.

Sia $Av = \lambda v$. Abbiamo $A^4 v = \lambda^4 v$ e, per ipotesi, $A^4 v = -Av = -\lambda v$, cioè $\lambda^4 v = -\lambda v$. Ne segue $\left(\lambda^4 + \lambda\right) v = 0$ e poichè v è autovettore (quindi è non nullo), deve essere $\lambda^4 + \lambda = 0$. Raccogliendo si ha $\lambda \left(\lambda^3 + 1\right) = 0$ che ammette le **due soluzioni reali** $0, -1$ e le **soluzioni complesse coniugate** $e^{\frac{\pi}{3}i}, e^{-\frac{\pi}{3}i}$ (esplicitando $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$), le quali rappresentano i possibili autovalori della matrice A.

a) Una matrice 3×3 che soddisfa la relazione data è ad esempio quella con gli autovalori non nulli sulla diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi}{3}i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.

La **matrice associata** all'applicazione lineare è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Una base per il **nucleo** che ha dimensione 1 è $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. L'**immagine** invece ha dimensione 2 ed è generata dalle colonne indipendenti di A: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Il vettore $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ deve essere multiplo del vettore $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si vede immediatamente che si deve avere $v = 2u$, quindi $a = 0$ e $b = -2$.

c) Il **polinomio caratteristico** di A è $\lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$, perciò gli **autovalori** sono $0, 1, 2$.

Autovettori: $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2$

d) Poichè $0 = 0^{10}$ è autovalore di A^{10} con gli stessi autovettori di A, il sistema proposto è l'equazione agli autovalori di A^{10} nel caso di autovalore 0. Quindi lo spazio delle soluzioni è l'autospazio relativo a 0 già trovato al punto c) e il sistema ammette ∞^1 soluzioni.