Soluzioni dello scritto del 23 settembre 2002

Esercizio 1.

La matrice dei coefficienti è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $-1+k$. I problemi di risolubilità del sistema possono sorgere solo quando questa matrice ha rango uguale a **due**. Questo accade se $k = +1$. La matrice completata è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha rango uguale a **tre** per $k = 1$. (Basta contare le colonne indipendenti).

Ricapitolando, per $k = 1$ il sistema non ha soluzioni, mentre per $k \neq 1$ il sistema ha $\infty^{incognite-rango} = \infty^{3-3} = \infty^0$ soluzioni.

Esercizio 2.

Sia v un autovettore di A con autovalore λ. Deve essere $A^8 v = A^2 v$, da cui $(\lambda^8 - \lambda^2)v = 0$. Gli autovettori devono essere non nulli, per cui gli unici λ possibili sono:

$$\begin{aligned}
&\{\lambda = 0\} \text{ due volte} \\
&\{\lambda = 1\}, \{\lambda = -1\}, \\
&\left\{\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right\}, \left\{\lambda = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right\}, \\
&\left\{\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right\}, \left\{\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right\}
\end{aligned}$$

Esercizio 3.

La matrice è a blocchi per cui si studiano i **tre** blocchi separatamente. Il primo blocco è $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ **con autovalori 0 e 9**. Il secondo blocco è $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ **con autovalori 0 e 9**. Il terzo blocco è (9) con autovalore **9.**

L'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 9 ha molteplicità algebrica uguale a 3 si devono quindi trovare le loro molteplicità geometriche.

Il rango della matrice è 3 per cui la dimensione del nucleo è 2 e quindi la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 è 2.

Per l'autovalore 9 si può calcolare cosi:

$$\begin{pmatrix} 8-9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1-9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6-9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3-9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ 8x-8y \\ -3z+3t \\ 6z-6t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per cui: $(x = y,\ z = t)$ l'autovettore generico è quindi $\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \\ z \\ u \end{pmatrix}$ questi autovettori formano uno spazio di dimensione 3.

Tutti gli autovalori sono regolari e quindi la matrice è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico è, in base agli autovalori trovati e alle loro molteplicità algebriche, $p(\lambda) = \lambda^2(9-\lambda)^3$.

Esercizio 4.

Il **nucleo** è costituito dai polinomi omogenei di secondo grado, mentre **l'immagine** è lo spazio dei polinomi generati da $\{1, x, x^3\}$ ed è di dimensione tre.

Nelle basi assegnate l'applicazione è data da:

$$\begin{aligned} f(1) &= -6 \\ f(x) &= -2x \\ f(x^2) &= 0 \\ f(x^3) &= \frac{3}{2}x^3 \end{aligned}$$

Per cui la matrice è:

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che, in accordo col punto **a)**, il rango è 3.