Soluzioni dello scritto del 27 giugno 2002

Esercizio 1.

La matrice è $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2k\lambda + 1 + k^2\right)$$

con autovalori $1, i+k, -i+k$. Ci sono autovalori coincidenti solo quando $k = 1-i$ (autovalori $1, 1, 1-2i$) e $k = 1+i$ (autovalori $1, 1+2i, 1$).

Quando $k = 1-i$ l'autospazio dell'autovalore doppio 1 è generato da

$$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi ha dimensione 2.

Quando $k = 1+i$ l'autospazio dell'autovalore doppio 1 è generato da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi ha dimensione 2.

La matrice è diagonalizzabile per ogni valore di k. Se $k = \pm i$ gli autovalori diventano $1, \pm 2i, 0$ per cui la matrice non è invertibile.

.

Esercizio 2.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 1 e quindi la dimensione del nucleo è 2; l'autovalore $\lambda = 0$ è quindi **regolare**. Osservando che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si vede subito che 6 è un altro autovalore, la sua molteplicità è 1, anche questo autovalore è **regolare** e quindi la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 3.

Il **nucleo** è costituito dai polinomi di grado zero (le costanti) mentre **l'immagine** è lo spazio dei polinomi di grado almeno uno e al più 3. Questo spazio è generato da $\{x, x^2, x^3\}$ ed è di dimensione tre..

Nelle basi assegnate l'applicazione è data da:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 0 \\
f(x) &= 2x \\
f(x^2) &= 4x^2 \\
f(x^3) &= 6x^3
\end{aligned}
$$

Per cui la matrice è:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6
\end{pmatrix}
$$

Si vede subito che, in accordo col punto a), il rango è 3.