Soluzioni dello scritto del 29 aprile 1999

Esercizio n.1

Basta trovare due vettori ortogonale al vettore $(1,1,1)$. Per esempio $(1,-1,0)$ e $(0,1,-1)$.

Il piano richiesto è quindi $\frac{t}{\sqrt{2}}\ (1,-1,0)+\frac{s}{\sqrt{2}}\ (0,1,-1)$.

Esercizio 2

La matrice della applicazione lineare ha come colonne i vettori che generano il piano (infatti l'immagine è generata dalle colonne indipendenti. Mentre la restante colonna deve essere determinata dall'altra condizione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ -1 & 1 & \beta \\ 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{Cioè}\begin{pmatrix} 1+\alpha \\ \beta \\ -1+\gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{ Eseguendo}$$

il conto si ha: $\left\{\begin{matrix} \alpha=-1 \\ \beta=0 \\ \gamma=1 \end{matrix}\right\}$ La matrice chiesta è quindi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,VERIFICA:

rank: 2, column basis: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, nullspace basis: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Esercizi 3 e 4

Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, column basis: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, nullspace basis: $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}\in f^{-1}(v)$.

Verifica $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se invece $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Il sistema NON ammette soluzione.

Quindi $f^{-1}(w) = \emptyset$.

Esercizio n.5

La matrice del sistema è: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \\ k^2 & 1 & k^2 \end{pmatrix}$, determinant: $2k - 2k^3$, roots:

$\left\{ \begin{array}{c} k = 0 \\ k = 1 \\ k = -1 \end{array} \right\}$

Per $k \neq 0, 1, -1$ ha rango 3.
Per $k = 0$ ha rango 2.
Per $k = 1$ ha rango 2
Per $k = -1$ ha rango 2

La matrice completa è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k & 0 \\ k^2 & 1 & k^2 & 0 \end{pmatrix}$ di rango 3 se $k \neq 0, 1, -1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rank: 2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, rank: 3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, rank: 3

Quindi per $k = 0$ il sistema ha ∞ soluzioni.
Per $k = \pm 1$ il sistema non ha soluzioni.
Per $k \neq 0, \pm 1$ il sistema ha 1 soluzione.

Se si vuole la soluzione quando il sistema ne ammette una sola ....

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \\ k^2 & 1 & k^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(k-1)} & \frac{1}{2k} & \frac{1}{2k(k-1)} \\ \frac{k^2}{k^2-1} & 0 & -\frac{1}{k^2-1} \\ \frac{1}{2(k+1)} & -\frac{1}{2k} & \frac{1}{2k(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2k-2} \\ \frac{k^2}{k^2-1} \\ \frac{1}{2k+2} \end{pmatrix}$$

Esercizio n.6

Basta considerare i primi 4 vettori, perchè gli altri due dipendono dal terzo e dal quarto!

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e i sottospazi $U = Span\{v_1, v_2\}$ e $V = Span\{v_3, v_4\}$. Trovare la dimensione di $U \cap V$. Si deve studiare il sistema $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$ cioè il sistema omogeneo con matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, rank: 3. Quindi ha ∞^1 soluzioni cioè la dimensione di $U \cap V$ è1. Una base si ha risolvendo il sistema (adesso non ho voglia di scriverlo e risolverlo.....) Ripensandoci, basta osservare che $v_3 = v_1 + v_2$ quindi v_3 sta necessariamente sia in V che in U , quindi sta in $U \cap V$ e, essendo la dimensione 1, ne costituisce la base. Trovare la dimensione di $U + V$. Bisogna trovare quanti vettori sono indipendenti tra i 4 . Si scrive quindi la matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, rank: 3. Quindi la dimensione cercata è 3. Una base sono 3 colonne indipendenti.