Soluzioni dello scritto del 2 Novembre 1999

Esercizio n.1:

La matrice del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1+2t & t & 1 \\ 1+t & t & 1+t \\ 1+2t & 1+t & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante $-2t-2t^2$. Per cui per $t \neq 0, -1$ la matrice ha rango 3, mentre per $t=0$ e $t=-1$ la matrice ha rango 2. La matrice completa è:

$$\begin{pmatrix} 1+2t & t & 1 & 1 \\ 1+t & t & 1+t & 2 \\ 1+2t & 1+t & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice per $t=0$ ha rango 3 , mentre per $t=-1$ ha rango 2.

Per cui per $t=0$ il sistema non ha soluzioni, per $t=-1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni, per $t \neq 0, -1$ il sistema ha una sola soluzione.

Esercizio n.2:

$\begin{pmatrix} 6 & 23 & -8 \\ -2 & -9 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ con polinomio caratteristico: $-(X^3+2X^2+X\ )$.

Gli autovalori e gli autovettori sono:

$$\left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ \begin{array}{c} 3/2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \right\} \leftrightarrow 0$$

Dove si nota che la molteplicità geometrica dell'autovalore -1 è 1, mentre la sua molteplicità algebrica (come si legge nel polinomio caratteristico) è 2.

Per cui la applicazione non è simmetrica, non è invertibile e non è diagonalizzabile.

Una base del nucleo è data dall'autovettore dell'autovalore nullo indicato sopra, mentre una base dell'immagine è data da due colonne indipendenti della matrice (per esempio la prima e l'ultima).

Esercizio n.3

Una matrice e ogni sua potenza hanno gli stessi autovettori e gli autovalori di A^n sono le potenze $n-$ esime degli autovalori di A.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile (essendo diagonale), ha autovalori non negativi ed è il quadrato della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ che però **non** è diagonalizzabile .