Cenni di soluzioni - scritto del 30 marzo 2004.

ESERCIZIO 1.

$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ con autovalori e autovettori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 6, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 9, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -8$$

Versione a: la matrice A è diagonalizzabile (e invertibile), e anche A^2 lo è; gli autovalori di A^2 sono $36, 81, 64$; gli autovettori restano gli stessi, e il polinomio caratteristico di A^{-2} è $p(z) = \left(\frac{1}{36} - z\right)\left(\frac{1}{81} - z\right)\left(\frac{1}{64} - z\right)$.

Versione b: la matrice A è diagonalizzabile (e invertibile), e anche A^{-1} lo è; gli autovalori di A^{-1} sono $\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{8}$; gli autovettori restano gli stessi, e il polinomio caratteristico di A^2 è $p(z) = (36 - z)(81 - z)(64 - z)$.

ESERCIZIO 2:

Dalle equazioni parametriche:

$$\begin{gathered} (1,1,2) + t(1,2,-1) + s(1,2,1) \\ (2,3,3) + t'(1,3,3) + s'(1,2,1) \end{gathered}$$

si vede subito che i due piani non sono paralleli perchè la matrice delle direzioni dei piani

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3. La retta intersezione è $(1,1,2) + u(1,2,1)$, infatti tutti i suoi punti si ottengono come casi particolari delle equazioni dei due piani. Nel primo caso per $t = 0$, $s = u$, nel secondo caso per $t' = 0$, $s' = u - 1$.

ESERCIZIO 3:

versione a: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, autovettori e autovalori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$$

. La matrice è diagonalizzabile.

versione b: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, autovettori e autovalori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$$

La matrice è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 4.

Sistema versione a: $\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ -3 & 1 & 1 \\ k^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinante: $k - k^3$ gli zeri sono in $\{k = 0\}, \{k = 1\}, \{k = -1\}$

Matrice completa: $\begin{pmatrix} k & 0 & k & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ k^2 & 0 & 1 & 3k \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rango 2; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ rango 2. $\rightarrow \infty^1$ soluzioni.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rango 2; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ rango 3. $\rightarrow$ impossibile

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rango 2; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ rango 3. $\rightarrow$ impossibile

Sistema versione b: $\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ -3 & 1 & 1 \\ -k^2 & 0 & k \end{pmatrix}$, determinante: $k^2 + k^3$, gli zeri sono in: $\{k = 0\}, \{k = 0\}, \{k = -1\}$

Matrice completa: $\begin{pmatrix} k & 0 & k & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -k^2 & 0 & k & 3k \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rango 1; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rango 1 $\rightarrow \infty^2$ soluzioni.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rango 2; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ rango 3 $\rightarrow$ impossibile.