SOLUZIONI 3 GIUGNO 1999

ESERCIZIO n.1

La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

con autovalori $0, 0, 4$ e polinomio caratteristico: $-\lambda^3+4\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda-4)$.

Autovettori $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 4, \left\{ \begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$ che formano una base di $\mathbb{C}^3$.

ESERCIZIO n.2

La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico: $-\lambda^3+2\lambda+k\lambda+1+k = (\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+k+1)$ e autovalori: -1, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(5+4k)}$ e $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(5+4k)}$. Quando $(5+4k) \geq 0$ tutti gli autovalori sono **reali.**

La matrice è certamente **diagonalizzabile** se tutti gli autovalori sono **reali e distinti** (cioè $\sqrt{(5+4k)} \neq 0$) cioè $k > -5/4$ e $k \neq 1$. Per $\sqrt{(5+4k)} = 0$ l'autospazio dell'autovalore $1/2$ ha dimensione **uno** e quindi **non** è diagonalizzabile.

Infatti: $\begin{pmatrix} 0 & -5/4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, autovettori: $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1$

Per $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(5+4k)} = -1$ cioè $\{k=1\}$ la matrice è **simmetrica** e quindi **diagonalizzabile.**

La matrice è **non invertibile** per $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(5+4k)} = 0$, cioè $k=-1$.

Affinchè il vettore dato, di componenti $(-1,1,1)$, sia un autovettore, deve essere:

$\begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Per cui l'unico modo è $\lambda = 0$ e quindi $k=-1$.

ESERCIZIO n.3

Se il rango è 9 vuole dire che il nucleo ha dimensione 6 e quindi 0 è autovalore regolare per il teorema delle dimensioni ($15 = 9 + 6$) e quindi la matrice è diagonalizzabile perchè gli altri autovalori sono distinti e quindi regolari.

Se è diagonalizzabile vuole dire che ci sono 6 zeri sulla diagonale e quindi il rango è 9.

ESERCIZIO n.4

Siccome gli autovalori sono ± 1, il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1$; il teorema di Cayley-Hamilton dice che $A^2 = I$, e allora $A^{129} = \left(A^2\right)^{64}(A) = A$.