# SOLUZIONI 9 GENNAIO 2003.

## Esercizio 1

La matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

autovettori e corrispondenti autovalori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow i\sqrt{2}, \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -i\sqrt{2}, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$$

base dell'immagine: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, base del nucleo: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

**Sistema lineare** $A^4(v) = 4v$ : questa **è l'equazioni agli autovalori di** $A^4$ , nel caso di autovalore 4 (che è proprio la quarta potenza degli autovalori $\pm i\sqrt{2}$ di $A$). Ne segue, **senza conti**, che **il sistema è risolubile**, e **lo spazio delle soluzioni** (che è la somma diretta degli autospazi degli autovalori $\pm i\sqrt{2}$) **ha dimensione due.**

**Sistema lineare** $A^4(v) = -4v$ :questa **è l'equazioni agli autovalori di** $A^4$, ma $-4$ **non è autovalore** (perchè **non** è la quarta potenza di un autovalore di $A$) per cui **il sistema ha come unica soluzione la soluzione nulla.**

## Esercizio n.2

L'intersezione si ottiene dal sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right\}$$

le soluzioni sono i vettori del tipo $v = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui **l'equazione parametrica** è $r = t(1, -1, 0)$.

Per trovare $U$ si devono trovare due vettori indipendenti e ortogonali a $v$. Per esempio $u = (1, 1, 0)$ e $w = (0, 0, 1)$. $U$ è allora *span* $\{u, w\}$

La matrice della applicazione lineare deve avere **due colonne uguali ai vettori** $u$ e $w$ (così siamo certi che abbia come immagine il loro *span* cioè proprio $U$). **L'altra colonna** si determina imponendo che la matrice applicata a $v$ dia 0 :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $\begin{pmatrix} a-1 \\ b-1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$

Una matrice di quelle richieste è, allora, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

# Esercizio n.3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Si può studiare a blocchi e si trovano subito autovalori e autovettori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 4, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$$

**La matrice risulta diagonalizzabile perchè gli tutti gli autovalori sono regolari.** L'unico punto da verificare è la dimensione geometrica dell'autospazio dell'autovalore 0 la cui dimensione algebrica è 2.