Soluzioni

Foglio 1. Rette e piani.

Esercizio 1. Se $\vec{n}$ è la normale al piano, sia

$$c = -\vec{n} \cdot \vec{x}_0.$$

Dimostriamo prima che se $\vec{x} \in \pi$, allora $\vec{x}$ soddisfa

$$\vec{n} \cdot \vec{x} + c = 0. \tag{1}$$

Si ha

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\,\vec{v} + s\,\vec{w}.$$

Sostituendo dentro (1) si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{x} + c &= \vec{n} \cdot (\vec{x}_0 + t\,\vec{v} + s\,\vec{w}) - \vec{n} \cdot \vec{x}_0 = \\ &= \vec{n} \cdot \vec{x}_0 - \vec{n} \cdot \vec{x}_0 = 0, \end{aligned}$$

dove la seconda eguaglianza segue dal fatto che $\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 0$, poichè $\vec{n}$ è normale al piano. Quindi $\vec{x}$ soddisfa (1).
Supponiamo ora che $\vec{x}$ sia una soluzione di (1). Dobbiamo dimostrare che $\vec{x} \in \pi$. La (1) implica che

$$\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{x}_0 = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0,$$

ovvero che

$$\vec{x} - \vec{x}_0 \in (\mathrm{Span}\{\vec{n}\})^{\perp}.$$

Dalla definizione di $\vec{n}$ sappiamo che

$$(\mathrm{Span}\{\vec{n}\})^{\perp} = \mathrm{Span}\{\vec{v}, \vec{w}\},$$

e quindi che

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = t\,\vec{v} + s\,\vec{w},$$

per qualche t e s, da cui segue che $\vec{x} \in \pi$.

Esercizio 2
Risolverò per esteso solo il caso (d), degli altri darò soltanto la soluzione, poichè il metodo è sempre lo stesso. Occorre trovare una normale al piano. La normale è una soluzione $\vec{n} \neq 0$ del sistema lineare

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{v} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{w} = 0, \end{cases}$$

dove $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono le direzioni del piano. Sia $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Nel caso (d), il sistema diventa

$$\begin{cases} n_x + 2\,n_y + 3\,n_z = 0, \\ -n_y + 2\,n_z = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Sostituendo $n_y = 2\,n_z$ (ottenuto dalla seconda equazione) nella prima equazione, otteniamo:

$$\begin{cases} n_x = -7\,n_z, \\ n_y = 2\,n_z. \end{cases}$$

Ponendo ad esempio $n_z = 1$, abbiamo la soluzione

$$\vec{n} = (-7, 2, 1).$$

Per definizione si ha

$$c = -\vec{n} \cdot \vec{x}_0 = -2.$$

Quindi l'equazione cartesiana del piano nel caso (d) è

$$-7x + 2y + z - 2 = 0.$$

Si noti che la soluzione $\vec{n}$ da noi scelta non era l'unica possibile, infatti avremmo potuto scegliere un'altro valore per n_z anzichè 1, ad esempio 2. L'importante era non scegliere il valore 0, che ci avrebbe dato la soluzione nulla del sistema. L'insieme di tutte le soluzioni del sistema (2), inclusa quella nulla, è un sottospazio vettoriale di dimensione 1.
Tutte le soluzioni sono

(a) $y = 0$;

(b) $y - 1 = 0$;

(c) $x - 2z = 0$;

(d) $-7x + 2y + z - 2 = 0$;

(e) $x + y + z - 3 = 0$;

(f) $x - 11y + 10z - 1 = 0$.

Esercizio 3 Se i due piani sono

$$\begin{aligned} \pi &= \{\vec{x}_0 + t\vec{v} + s\vec{w}\} \\ \pi' &= \{\vec{x}_0' + t\vec{v}' + s\vec{w}'\}, \end{aligned}$$

Trovare i punti nell'intersezione significa trovare t e s tali che existono t' e s' che soddisfano

$$\vec{x}_0 + t\vec{v} + s\vec{w} = \vec{x}_0' + t'\vec{v}' + s'\vec{w}'. \tag{3}$$

Notiamo che questa uguaglianza è un sistema lineare. Riscriviamolo in maniera diversa. Sia A la matrice 4×3 che ha come vettori colonna $\{\vec{v}, \vec{w}, -\vec{v}', -\vec{w}'\}$ e definiamo il vettore

$$\vec{u} = (t, s, t', s').$$

Il sistema (3) può essere riscritto come

$$A\vec{u} = \vec{x}_0' - \vec{x}_0,$$

dove $\vec{u}$ è l'incognita. In generale, cercando l'intersezione di due piani, si verifica uno dei seguenti tre casi

(i) π e π' sono paralleli, quindi $\pi \cap \pi' = \emptyset$;

(ii) π e π' coincidono;

(iii) $\pi \cap \pi'$ è una retta.

I casi (i) e (ii) si verificano se

$$\mathrm{Span}\{\vec{v}, \vec{w}\} = \mathrm{Span}\{\vec{v}\,', \vec{w}\,'\}$$

e questo è vero se e solo se il rango della matrice A è uguale a 2. Il caso (iii) si verifica se

$$\mathrm{Span}\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}\,', \vec{w}\,'\} = \mathbb{R}^3,$$

che è vero se e solo se il rango di A è uguale a 3. Quindi i tre casi sopra corrispondono rispettivamente ai casi

(i) A ha rango 2 e $\vec{x}_0$ non sta su π' (oppure $\vec{x}_0'$ non sta su π) ;

(ii) A ha rango 2 e $\vec{x}_0$ sta su π' (oppure $\vec{x}_0'$ sta su π);

(iii) A ha rango 3.

Risolviamo ora i casi dell'esercizio.

Caso (a). La matrice A è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mentre

$$\vec{x}_0' - \vec{x}_0 = (0, -1, 0).$$

Notiamo che il rango di A è 3, infatti il determinante della matrice 3×3 ottenuta eliminando il secondo vettore colonna di A è diverso da zero. Quindi i due piani si intersecano in una retta. Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} t - s - t' = 0 \\ -t + s + t' - s' = -1 \\ -6t + s' = 0 \end{cases}$$

Si ricava la soluzione

$$\begin{cases} t' = \frac{1}{6} - s \\ s' = 1 \\ t = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Sostituendo $t = \frac{1}{6}$ nell'espressione del piano π otteniamo l'equazione della retta $r = \pi \cap \pi'$:

$$r = \{(0,1,0) + \frac{1}{6}(1,-1,-6) + s(-1,1,0)\} = \{(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, -1) + s(-1,1,0)\}.$$

Notiamo che avremmo potuto anche sostituire i valori di t' e s' nell'espressione del piano π' e avremmo trovato lo stesso risultato.

Caso (b). Si verifica che la matrice A ha rango 3, quindi l'intersezione è una retta. Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} t - s - t' + s' = 0 \\ -2s - t' - s' = 0 \\ 2s - t' = 1 \end{cases}$$

Si trova la soluzione

$$\begin{cases} t = 7s - 2 \\ t' = 2s - 1 \\ s' = -4s + 1 \end{cases}$$

Sostituendo i valori trovati di t' e s' nella equazione di π' si trova l'equazione della retta $r = \pi \cap \pi'$:

$$r = \{(-2,0,0) + s(6,-2,2)\}$$

Notiamo che la stessa retta può essere scritta in più modi. Per esempio uno avrebbe anche potuto trovare r scritta come

$$r = \{(1,-1,1) + s(3,-1,1)\}.$$

Sebbene siano scritte in modo diverso le due espressioni rappresentano lo stesso insieme!

Caso (c). In questo caso la matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che questa ha rango 2. Perciò i due piani o sono paralleli, oppure coincidono. Essi coincidono se e solo se $\vec{x}_0 \in \pi'$ ovvero se e solo se esistono t e s tali che

$$\vec{x}_0 - \vec{x}_0' = t\vec{v}' + s\vec{w}'.$$

Questo è equivalente a dire che

$$\vec{x}_0 - \vec{x}_0' \in \mathrm{Span}\{\vec{v}', \vec{w}'\}. \tag{4}$$

Per verificare se questo è vero si può fare nel seguente modo. Si forma la matrice B i cui vettori colonna sono $\{\vec{x}_0 - \vec{x}_0', \vec{v}', \vec{w}'\}$, dopodichè la (4) è vera se e solo se B ha rango 2, ovvero se e solo se $\det B = 0$. Infatti la (4) implica che i vettori colonna di B sono linearmente dipendenti. Verifichiamo cosa accade nel nostro caso. Si ha

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Si calcola facilmente che $\det B \neq 0$, quindi $\vec{x}_0$ non sta in π'. I due piani sono disgiunti.

Caso (d). Si verifica che la matrice A ha rango 2. Quindi i piani o sono paralleli o coincidono. La matrice B formata come nel Caso (c) è

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 8 & 10 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si calcola che $\det B = 0$, quindi i piani coincidono.

Esercizio 4.
Calcolare la retta r passante per un punto $\vec{p}$ e ortogonale a un piano π è facile: è la retta passante per $\vec{p}$ con direzione la normale $\vec{n}$ al piano. L'espressione di r è quindi

$$r = \{\vec{p} + t\,\vec{n}\}.$$

Calcolare l'intersezione tra r e π significa trovare t e s tali che esiste un t' che soddisfa

$$\vec{x}_0 + t\,\vec{v} + s\,\vec{w} = \vec{p} + t'\,\vec{n},$$

dove a sinistra si ha l'espressione del piano. Questo è un sistema. Se si forma la matrice A che ha per vettori colonna $\{\vec{v}, \vec{w}, -\vec{n}\}$ e si definisce $\vec{u} = (t, s, t')$ allora il sistema può essere riscritto

$$A\vec{u} = \vec{p} - \vec{x}_0.$$

Vediamo cosa succede nei casi specifici.

Caso (a). Si ricava (nel solito modo) che una normale al piano è

$$\vec{n} = (-1, 1, 1).$$

La retta cercata è quindi

$$r = \{(0, 0, 3) + t'(-1, 1, 1)\}.$$

Cerchiamo l'intersezione con il piano π. La matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} 2s + t' = 0 \\ -t - t' = 0 \\ t + 2s - t' = 3 \end{cases}$$

Si trova che la soluzione è

$$\begin{cases} t = 1 \\ s = \frac{1}{2} \\ t' = -1 \end{cases}$$

Sostituendo il valore di $t' = -1$ nell'espressione di r si ricava che il punto di intersezione è

$$\pi \cap r = (1, -1, 2).$$

Caso (b). Il metodo è lo stesso. Il risultato è

$$r = \{(1, 0, 0) + t'(1, 0, 2)\}$$

$$\pi \cap r = (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$$