SPAZI VETTORIALI E GEOMETRIA DELLE RETTE E DEI PIANI

Uno **spazio vettoriale** è un insieme V di elementi $(\overrightarrow{v})$, detti **vettori**, su cui sono definite le seguenti operazioni:

1) una **somma**: per $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V \Rightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in V$, tale che:
(a) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$;
(b) Esiste $\overrightarrow{0} \in V$ tale che:

$$\overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v};$$

(c) Esiste $-\overrightarrow{v} \in V$ tale che:

$$\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = 0;$$

(d) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$,

per ogni $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$.
2) un **prodotto** $\lambda \overrightarrow{v}$ di un vettore $\overrightarrow{v}$ per un numero λ reale (o complesso), tale che:
(a) $\lambda (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{w}$;
(b) $(\lambda + \mu) \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{v}$;
(c) $(\lambda\mu) \overrightarrow{v} = \lambda (\mu \overrightarrow{v})$;
(d) $1 \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$,
per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$.

Tutte queste proprietà sono verificate per gli insiemi $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ con le operazioni citate nel paragrafo precedente, in particolare, $(0, 0, ..., 0)$ funge da $\overrightarrow{0}$ e $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ funge da $-(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Alcune proprietà interessanti che si ricavano dalle definizioni sono le seguenti:

$$0 \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \qquad \text{e} \qquad -\overrightarrow{v} = (-1) \overrightarrow{v}.$$

Infatti, per ogni $\overrightarrow{v} \in V$,

$$0 \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} = (0 + 1) \overrightarrow{v} = 1 \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$$

e quindi

$$0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0},$$

perchè l'elemento $\overrightarrow{0}$ è unico. (Infatti, per definizione di $\overrightarrow{0}$, si ha $0\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{v}$ e dalla relazione $0\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ appena dimostrata, sommando $-\overrightarrow{v}$, si ha

$$(0\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}) + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$$

$$\|$$

$$0\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v})) = 0\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0}.$$

Da $0\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{v}$ e $0\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, segue $0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.)

Inoltre,

$$(-\lambda)\,\overrightarrow{v} + \lambda\overrightarrow{v} = (-\lambda + \lambda)\,\overrightarrow{v} = 0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0},$$

cioè $(-\lambda)\,\overrightarrow{v} = -\lambda\overrightarrow{v}$ (è l'inverso di $\lambda\overrightarrow{v}$).

ESEMPIO.

Consideriamo $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) e sia $\mathbb{R}[x]$ (o $\mathbb{C}[x]$) l'insieme dei polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}\ .$$

$\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale. Infatti, dati

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m \in \mathbb{R}[x]$$

e $\lambda \in \mathbb{R}$, il polinomio somma

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + ... + b_mx^m$$

e il polinomio prodotto

$$\lambda f(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + ... + \lambda a_n x^n$$

appartengono a $\mathbb{R}[x]$.

SOTTOSPAZI , DIPENDENZA LINEARE E BASI

Un sottoinsieme W di V è detto **sottospazio vettoriale** di V se è esso stesso uno spazio vettoriale (con le stesse operazioni di V). In altre parole, W è un sottospazio vettoriale se

1) $\overrightarrow{0} \in W$;

2) se $\overrightarrow{v} \in W$ anche $-\overrightarrow{v} \in W$;

3) se $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in W$ anche $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \in W$;

4) se $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) e $\overrightarrow{v} \in W$ anche $\lambda \overrightarrow{v} \in W$.

ESEMPIO.

Consideriamo i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$W = \{(a, a) \text{ con } a \in \mathbb{R}\}$$
$$Z = \{(a, 1) \text{ con } a \in \mathbb{R}\}.$$

W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, Z non è un sottospazio, perchè

$$(a, 1) + (b, 1) = (a + b, 2) \notin Z.$$

A partire da U e W sottospazi di V, costruiamo altri sottospazi di V:

a) L'intersezione di U e W è costituita dai vettori che stanno sia in U che in W

$$U \cap W = \{\overrightarrow{v} \in V : \overrightarrow{v} \in U \text{ e } \overrightarrow{v} \in W\}.$$

$U \cap W$ è un sottospazio di V, mentre $U \cup W$ in genere non lo è.

Ad esempio, siano U e W due rette in $\mathbb{R}^2$ passanti per l'origine (cioè da $\overrightarrow{0}$). L'unione di U e W non contiene la somma di un elemento di U e uno di W diversi da $\overrightarrow{0}$.

Per fabbricare un sottospazio dall'unione si devono aggiungere tutti gli elementi mancanti (nel caso precedente, tutte le somme).

b) Consideriamo lo spazio formato da tutte le somme di elementi di U con elementi di W:

$$U + W = \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \text{ con } \overrightarrow{u} \in U,\ \overrightarrow{w} \in W\}.$$

$U + W$ è un sottospazio vettoriale di V. Naturalmente $U + V$ contiene sia U che V.

Se $U \cap W = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, l'operazione $+$ tra sottospazi si indica con $U \oplus W$ e si dice **somma diretta**; la cosa interessante è che, in questo caso, ogni elemento di $U \oplus W$ si scrive in modo *unico* come somma di un elemento di U e uno di W.

ESEMPIO (*).

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i seguenti sottospazi:

$$\begin{gathered}U = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\};\\ V = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\};\\ W = \{(x, 0, y) : x, y \in \mathbb{R}\};\\ Z = \{(0, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.\end{gathered}$$

Si ha

$$\begin{gathered}U \cap V = \{(x, 0, x) = (x, 0, 0)\} = \{(0, 0, 0)\};\\ U \cap W = \{(x, 0, x) = (x, 0, y)\} = \{(x, 0, x)\} = U;\\ Z \cap W = \{(0, x, y) = (x, 0, y)\} = \{(0, 0, y)\};\\ U + V = \{(x, 0, x) + (x', 0, 0) \text{ con } x, x' \in \mathbb{R}\}\\ = \{(a, 0, b) \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\} = W.\end{gathered}$$

Siano $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$ vettori di uno spazio vettoriale V e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Il vettore

$$\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v}_1 + ... + a_n\overrightarrow{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{v}_i,$$

si dice **combinazione lineare** dei vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$.

Sia $S = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ un insieme finito di vettori di V. Lo spazio

$$\mathrm{Span}\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\} = \{\text{tutte le possibili combinazioni lineari di } \overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$$

è detto **span lineare** ed è un sottospazio vettoriale di V, precisamente è il più piccolo sottospazio che contiene i vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$.

Diremo che $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$ **generano** lo spazio vettoriale V o che $\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ è un **sistema di generatori** di V se $V = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$. Quindi $\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ è un sistema di generatori di V se e solo se $\forall \overrightarrow{v} \in V$ esistono $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tali che $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v}_1 + ... + a_n\overrightarrow{v}_n$.

I vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n \in V$ si dicono **linearmente dipendenti** se $\exists a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) **non tutti nulli**, tali che $a_1\overrightarrow{v}_1 + ... + a_n\overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{0}$. Altrimenti, si dicono **linearmente indipendenti** (cioè $a_1\overrightarrow{v}_1 + ... + a_n\overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{0} \Rightarrow a_i = 0, \forall i$).

Un insieme finito $\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ di vettori di V, si dice **base** di V se $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$ sono **linearmente indipendenti e se sono un sistema di generatori di** V. Se $\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ è una base di V, allora

1) $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$ generano $V \Rightarrow \forall \overrightarrow{v} \in V$, $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v}_1 + ... + a_n\overrightarrow{v}_n$;

2) gli $a_1, ..., a_n$ sono determinati in modo **unico** da $\overrightarrow{v}$ (ciò è dovuto al fatto che $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$ sono linermente indipendenti).

Gli $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) si dicono **coordinate** di $\overrightarrow{v}$ rispetto alla base $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$.

Se uno spazio vettoriale V possiede una base $\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$, il numero n si dice **dimensione** di V e si indica con $\dim V$. Se $V = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, si pone $\dim V = 0$. Se $V = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, oppure V possiede una base, diciamo che V ha **dimensione finita**. Con questa definizione $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n.

ESEMPI.

1) In $\mathbb{R}^2$, consideriamo i vettori

$$\overrightarrow{e}_1 = (1, 0), \overrightarrow{e}_2 = (0, 1).$$

$\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ generano $\mathbb{R}^2$. Infatti, sia $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Si ha

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = (v_1, 0) + (0, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1 \overrightarrow{e}_1 + v_2 \overrightarrow{e}_2.$$

Inoltre, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow v_1 = v_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2. $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$ si chiama **base canonica** di $\mathbb{R}^2$.

2) In $\mathbb{R}^3$, la base canonica è costituita dai tre vettori

$$\overrightarrow{e}_1 = (1, 0, 0), \overrightarrow{e}_2 = (0, 1, 0), \overrightarrow{e}_3 = (0, 0, 1).$$

3) Il sottospazio $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ dei polinomi di grado $\leqslant 3$, possiede una base finita: $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Infatti, il polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

è combinazione lineare di $\{1, x, x^2, x^3\} \Rightarrow \{1, x, x^2, x^3\}$ è un sistema di generatori. Inoltre, se

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

quindi $1, x, x^2, x^3$ sono linearmente indipendenti. $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ ha dimensione 4 (numero di elementi della base).

Se U ha base $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_l$ e V ha base $\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_m$, allora

$$U + V = \text{Span}\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_l, \overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_m\}.$$

Teorema delle dimensioni. Se U e V sono spazi vettoriali di dimensione finita, allora

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

In particolare (ricordando che per la somma diretta $U \oplus V$ si ha $U \cap V = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$),

$$\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V.$$

ESEMPIO.

Vediamo che per gli spazi dell'esempio (*) è soddisfatto il teorema delle dimensioni. Si ha: $U \cap V = \{(0,0,0)\} \Rightarrow \dim(U \cap V) = 0$.

U è formato da vettori del tipo $(x, 0, x) = x(1, 0, 1)$, cioè da multipli di $(1, 0, 1)$, quindi è generato da $(1, 0, 1) \Rightarrow \dim U = 1$.

V è formato da vettori del tipo $(x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$, quindi è generato dal vettore $(1, 0, 0) \Rightarrow \dim V = 1$.

Un vettore di $W = U + V$ è, invece, dato da $a(1, 0, 0) + b(0, 0, 1)$, cioè è combinazione lineare dei vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1) \Rightarrow \dim W = 2$. Allora vale $\dim W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.

PRODOTTO SCALARE REALE USUALE

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ con la base canonica $\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n$ ($\overrightarrow{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\overrightarrow{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $\overrightarrow{e}_n = (0, ..., 0, 1)$) e siano $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ due vettori: $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$. Definiamo il p**rodotto scalare** di $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Proprietà: $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$:

1) $(a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} + b\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$;

2) $\overrightarrow{v} \cdot (a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{w}) = a\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$;

3) $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \geqslant 0$ e $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;

$\sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$ si indica con$\|\overrightarrow{v}\|$ e si dice **norma** o **lunghezza** di $\overrightarrow{v}$.

4) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$, dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Due vettori $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ si dicono **ortogonali** se $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Se V è uno spazio vettoriale e W un suo sottospazio non vuoto, l'insieme dei vettori ortogonali ad ogni $\overrightarrow{w} \in W$ si denota con $W^{\perp}$:

$$W^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in V : \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0, \forall \overrightarrow{w} \in W\}.$$

$W^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V (verificare per esercizio) chiamato il **complemento ortogonale** a W. Inoltre, $W \cap W^{\perp} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ e $W + W^{\perp} = V$, cioè $V = W \oplus W^{\perp}$. Quindi, per il teorema delle dimensioni, $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$.

ESEMPIO.

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e i sottospazi $U = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ e $V = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4, \overrightarrow{v}_5, \overrightarrow{v}_6\}$.

Calcoliamo la dimensione e una base per i sottospazi $U \cap V$ e $U + V$.

Si nota subito che $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4$ sono indipendenti e che $\overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_5, \overrightarrow{v}_6$ sono loro combinazioni lineari: $\overrightarrow{v}_6 = 2\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$ e $\overrightarrow{v}_5 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_4$. Quindi, $V = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4\}$. Ne segue che $U \cap V = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ ha dimensione due e una base è $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$. $U + V = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4\}$ ha dimensione tre e una base è $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4$.

Per scrivere una base del complemento ortogonale a $U \cap V$, che ha dimensione 1, basta scrivere un vettore (a, b, c) ortogonale a $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$. Deve essere:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = c \\ c = t \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = t(-2, 1, 1).$$

Quindi, per $t = 1$, una base di $(U \cap V)^{\perp}$ è data dal vettore $(-2, 1, 1)$.

RETTE E PIANI IN $\mathbb{R}^n$

Sia $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ e sia $\overrightarrow{x}_0$ un punto di $\mathbb{R}^n$. Si dice **retta di direzione $\overrightarrow{v}$ passante per $\overrightarrow{x}_0$** il sottoinsieme

$$r = \{\overrightarrow{x}_0 + t\overrightarrow{v} \text{ con } -\infty < t < \infty\}.$$

In $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$, $\overrightarrow{x}_0 = (x_0, y_0)$ e $r = (x, y)$. Le **equazioni parametriche** di r sono:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \end{cases}$$

Eliminando il parametro t si ottengono le solite **equazioni cartesiane**.

Analogamente, le equazioni parametriche di una retta in $\mathbb{R}^3$ sono:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{cases}$$

Si dice **piano in $\mathbb{R}^3$ di direzioni $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ passante per $\overrightarrow{x}_0$** il sottoinsieme

$$P = \{\overrightarrow{x}_0 + t\overrightarrow{v} + s\overrightarrow{w} \text{ con } -\infty < t, s < \infty\},$$

con $\overrightarrow{x}_0$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ e $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ **indipendenti.** Le equazioni parametriche di un piano sono date da:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x + sw_x \\ y = y_0 + tv_y + sw_y \\ z = z_0 + tv_z + sw_z \end{cases}$$

Si dice **m-piano di $\mathbb{R}^n$ di direzioni $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_m$** ($m < n$ e indipendenti) **passante per $\overrightarrow{x}_0$** il sottoinsieme

$$P = \left\{ \overrightarrow{x}_0 + \sum_{i=1}^{m} t_i \overrightarrow{v}_i \text{ con } -\infty < t < \infty \right\}.$$

Diciamo che le rette $r = \overrightarrow{p} + t\,\overrightarrow{v}$ e $r' = \overrightarrow{q} + t\,\overrightarrow{v}'$ sono:
parallele se $\overrightarrow{v} = \alpha\,\overrightarrow{v}'$ con $\alpha \neq 0$.
ortogonali se $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}' = 0$;
incidenti se $r \cap r' \neq \emptyset$;
complanari se $\exists$ un 2-piano π tale che $r \subset \pi$ e $r' \subset \pi$.

ESEMPIO.
Consideriamo le rette

$$\begin{aligned}
\alpha &= (0,0,1) + t\,(1,-1,0) = (0,0,1) + tv \\
\beta &= (1,0,0) + t\,(1,-1,0) = (1,0,0) + tu \\
\gamma &= (0,1,0) + t\,(0,0,1) = (0,1,0) + tw
\end{aligned}$$

Poichè $v = u$, α e β sono parallele. Inoltre $u \cdot v = (0,0,1) \cdot (1,-1,0) = 0$, quindi γ è ortogonale a α.

Vediamo se α e γ sono incidenti. Ci chiediamo: quando un generico $P \in \alpha$ è uguale a $P' \in \gamma$? Poniamo:

$$\begin{gathered}
(0,0,1) + t\,(1,-1,0) = (0,1,0) + t\,(0,0,1) \\
\Rightarrow \qquad (t,-t,1) = (0,1,t) \\
\Rightarrow \quad t = 0 \text{ e } t = 1 \Rightarrow \text{ impossibile!}
\end{gathered}$$

Le rette α e γ non sono incidenti. Troviamo una retta δ parallela a γ e incidente con α. Poichè deve essere δ parallela a γ, si avrà

$$\delta = (a,b,c) + t(0,0,1).$$

Per trovare (a,b,c), imponiamo che δ sia incidente con α:

$$(t,-t,1) = (a,b,c+t).$$

Prendiamo $t = 0$. Abbiamo

$$(0,0,1) = (a,b,c) \Rightarrow \delta = (0,0,1) + t\,(0,0,1).$$

Vogliamo cercare ora un piano che contenga le due rette parallele α e β. Sia

$$\pi = (a,b,c) + tv_1 + sv_2.$$

π deve contenere $\alpha \Rightarrow \pi = (0,0,1) + t\,(1,-1,0) + s\,(a,b,c)$ infatti per $s = 0$, π si riduce alla retta α.

Per trovare (a,b,c), imponiamo che contenga β.

$$\begin{gathered}(1,0,0) + t'\,(1,-1,0) = (0,0,1) + t\,(1,-1,0) + s\,(a,b,c)\\ \Rightarrow (1,0,0) = (0,0,1) + s\,(a,b,c) \text{ e } t = t'\end{gathered}$$

Fissiamo un s possibile, per esempio $s = 1$:

$$\begin{gathered}(1,0,0) = (a,b,c+1) \Rightarrow a = 1, b = 0, c = -1\\ \Rightarrow \pi = (0,0,1) + t\,(1,-1,0) + s\,(1,0,-1).\end{gathered}$$

Infatti il piano π per $s = 0$ si riduce alla retta α, mentre per $s = 1$ si riduce alla retta β.

OSSERVAZIONI.

Due rette incidenti e distinte sono complanari.

Due rette parallele sono complanari.

Due rette non incidenti sono complanari solo se parallele.

ESEMPIO.

Le rette α e δ dell'esempio precedente sono incidenti, quindi complanari. Troviamo il piano che le contiene.

$$\begin{gathered}\alpha = (0,0,1) + t\,(1,-1,0)\\ \delta = (0,0,1) + t\,(0,0,1).\end{gathered}$$

Il piano che le contiene è il piano generato dai vettori direzione delle due rette:

$$\pi = (0,0,1) + t\,(1,-1,0) + s(0,0,1).$$

Due piani π e π' sono **paralleli** se $\pi \cap \pi' = \emptyset$. Se

$$\pi = p + tv_1 + sv_2 \text{ e } \pi' = p' + tv'_1 + sv'_2,$$

allora π e π' sono paralleli se

$$\text{Span}\{v_1, v_2\} = \text{Span}\{v'_1, v'_2\} \text{ e } p - p' \notin \text{Span}\{v_1, v_2\},$$

cioè se $\pi' = \pi + q$, $q \neq (0,0,...,0)$.

ESEMPI.
Consideriamo i piani

$$\pi = (0,0,0) + t(1,0,0) + s(1,0,1)$$
$$\pi' = (0,1,0) + t'(1,0,0) + s'(0,0,1).$$

Si ha

$$\text{Span}\{v_1, v_2\} = \{v = av_1 + bv_2 = a(1,0,0) + b(1,0,1) = (a+b, 0, b)\}$$
$$\text{Span}\{v'_1, v'_2\} = \{v = a'v'_1 + b'v'_2 = a'(1,0,0) + b'(0,0,1) = (a', 0, b')\}$$

I due spazi coincidono: basta prendere $b' = b$, $a' = a+b$, quindi i due piani sono paralleli.
Invece,

$$\pi = (0,0,0) + t(1,0,0) + s(1,0,1)$$
$$\pi' = (0,0,1) + t'(1,0,0) + s'(0,1,0)$$

non sono paralleli e $\pi \cap \pi' = r$. Infatti, i punti in comune si trovano imponendo $\pi = \pi'$:

$$(t+s, 0, s) = (t', s', 1),$$

cioè $s' = 0$, $s = 1$, $t' = t+1$. Allora i punti del tipo $(t+1, 0, 1) \in \pi \cap \pi'$, cioè la retta

$$r = (1, 0, 1) + t(1, 0, 0)$$

è l'intersezione dei due piani.

Due piani $\pi = p + tv_1 + sv_2$ e $\pi' = q + t'v'_1 + s'v'_2$ sono **ortogonali** se le loro **direzioni normali** (cioè le direzioni delle rette ortogonali ai piani) sono fra loro ortogonali.

ESEMPIO.
Dato

$$\pi = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0) + s(1, 0, 1),$$

con $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$, calcoliamo la direzione $\overrightarrow{n}$ normale a π. Posto $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, deve essere

$$\begin{gathered}(a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = a = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = a + c = 0 \Rightarrow c = 0,\end{gathered}$$

quindi $\overrightarrow{n} = t(0, 1, 0)$. Consideriamo, inoltre, il piano

$$\pi' = (0, 0, 0) + t'(0, 1, 0) + s'(2, 0, 1).$$

Calcoliamo la sua normale $\overrightarrow{n'}$:

$$
\begin{gathered}
(a', b', c') \cdot (0,1,0) = b' = 0 \\
(a', b', c') \cdot (2,0,1) = 2a' + c' = 0 \Rightarrow c' = -2a' \\
\Rightarrow \overrightarrow{n'} = t'(-1,0,2).
\end{gathered}
$$

Ora $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = (0,1,0) \cdot (-1,0,2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'} \Rightarrow \pi, \pi'$ ortogonali.

ESEMPIO.
Dato il piano

$$\pi = (0,0,0) + t(1,0,0) + s(1,0,1),$$

trovare la retta passante per $(0,0,0)$ e ortogonale al piano π.
La retta cercata ha equazione

$$r = (0,0,0) + t(a,b,c)$$

e la direzione (a,b,c) deve essere ortogonale a $(1,0,0)$ e a $(1,0,1)$. Si deve quindi avere

$$
\begin{gathered}
(1,0,0) \cdot (a,b,c) = a = 0, \\
(1,0,1) \cdot (a,b,c) = a + c = 0 \Rightarrow c = 0.
\end{gathered}
$$

Allora $r = (0,0,0) + t(0,1,0)$.
Determiniamo $\pi \oplus r$. Osserviamo che $(1,0,0)$, $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ sono tre vettori indipendenti, per cui

$\pi \oplus r = \mathbb{R}^3$.