Tabelle per la classificazione delle coniche

Versione del 9 Maggio 2011

1 Le tabelle

Come abbiamo visto, l'equazione generale di una conica è

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0. \tag{1}$$

Questa è univocamente determinata dalla matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$$

La matrice $A = (a_{ij})$ determina la parte quadratica dell'equazione. Indichiamo con A' e B' le matrici corrispondenti alla stessa conica, ma espressa nella sua forma canonica. Allora abbiamo visto che B e B' hanno lo stesso determinante e lo stesso rango, mentre A e A' hanno gli stessi autovalori, quindi lo stesso determinante e la stessa traccia. Questo fatto permette di riconoscere la conica rappresentata dalla (1) solo studiando le matrici A e B.

Dall'equazione canonica dell'ellisse

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$

si ha

$$B' = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dall'equazione canonica della parabola

$$\alpha X^2 - Y = 0$$

si ha

$$B' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Dall'equazione dell'iperbole

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$

si ha

$$B' = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Queste sono le coniche non degeneri, dove $\det B \neq 0$. Ricaviamo quindi le seguenti tabelle per la classificazione delle coniche non degeneri:

$\det B$	$\det A$	$TrA * \det B$	**Tipo di conica**	**Equazione canonica**
$\neq 0$	0	qualsiasi	Parabola	$Y = aX^2$
$\neq 0$	> 0	< 0	Ellisse	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$
$\neq 0$	< 0	qualsiasi	Iperbole	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$

Il seguente caso può anche essere definito "ellisse a punti immaginari", ma la sua equazione rappresenta l'insieme vuoto in $\mathbb{R}^2$:

$\det B$	$\det A$	$TrA * \det B$	**Tipo di conica**	**Equazione canonica**
$\neq 0$	> 0	> 0	$\emptyset$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0$

Quando $\det B = 0$ si ha sempre una conica degenere, ecco le varie possibilità:

$\det A$	$rk(B)$	**Tipo di conica**	**Equazione canonica**
< 0	2	Due rette incidenti	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$
> 0	2	Un solo punto	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$
$= 0$	2	Due rette parallele distinte	$\frac{X^2}{a^2} - 1 = 0$
$= 0$	2	$\emptyset$	$\frac{X^2}{a^2} + 1 = 0$
$= 0$	1	Due rette coincidenti	$X^2 = 0$

Notate che il terzo e quarto caso non possono essere distinti fra loro in base al determinante di A e al rango di B, ma bisogna guardare il segno degli autovalori di B. Se $\det A = 0$ e B ha un autovalore nullo e due autovalori di segno opposto allora si verifica il terzo caso, altrimenti si verifica il quarto.