SOLUZIONI 16 Dicembre 2003.

Esercizio 1

La matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$ e troviamone le radici:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & -4 \\ 4 & 1-\lambda & 8 \\ -4 & 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

da cui si ottiene

$$(9-\lambda)(\lambda^2 - 81) = 0.$$

Gli autovalori sono $\lambda = 9$ (con molteplicità algebrica $m_a(9) = 2$) e $\lambda = -9$ ($m_a(-9) = 1$).

Calcoliamo gli autovettori associati all'autovalore 9:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & 8 \\ -4 & 8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

che si riduce a $x - 2y + 2z = 0$. Il sistema ha ∞^2 soluzioni. Lo spazio delle soluzioni é l'autospazio associato all'autovalore 9:

$$\begin{aligned} V_9 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2s - 2t, y = s, z = t; t, s \quad \text{parametro}\} \\ &= < (-2,0,1), (-2,1,0) > . \end{aligned}$$

La dimensione di V_9 é 2 cioé $m_g(9) = 2$.

Calcoliamo gli autovettori associati all'autovalore -9:

$$\begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ 4 & 10 & 8 \\ -4 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

che si riduce a

$$\begin{cases} 4x & +y & -z = 0 \\ & y & +z = 0 \\ \end{cases}$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni. Lo spazio delle soluzioni é l'autospazio associato all'autovalore -9:

$$\begin{aligned} V_{-9} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = t/2, y = -t, z = t; t, s \quad \text{parametro}\} \\ &= < (1,-2,2) > . \end{aligned}$$

La dimensione di V_{-9} é 1 cioé $m_g(-9) = 1$.

Una base di autovettori é data da

$$\{v_1 = (-2,0,1), v_2 = (-2,1,0), v_3 = (1,-2,2)\}.$$

La matrice è diagonalizzabile per cui anche l'inversa lo è. Gli autovalori dell'inversa sono, ovviamente $\frac{1}{9}$ con $m_a = 2$ e $-\frac{1}{9}$ con $m_a = 1$. Il polinomio caratteristico di A^{-1} si può calcolare nella base in cui la matrice e l'inversa sono diagonali ed è quindi:

$$(\frac{1}{9} - \lambda)(\lambda^2 - \frac{1}{81})$$

Esercizio n.2

L'intersezione si ottiene dal sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\}$$

le soluzioni sono i vettori del tipo

$$v = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2x}{3} \\ -\frac{1}{3}x \end{pmatrix}$$

per cui **l'equazione parametrica** è $r = t(1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

Per trovare il piano π si devono trovare due vettori indipendenti e ortogonali a r.

Per esempio $u = (1,1,1)$ e $w = (1,0,3)$. L'equazione parametrica di π è allora:

$$\pi = t(1,1,1) + s(1,0,3)$$

Esercizio n.3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice ha rango 2 e quindi immagine e nucleo hanno dimensione 2. Una base del nucleo si trova cercando l'autospazio dell'autovalore $0, e$ si trova subito

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

mentre una base dell'immagine è data da due colonne indipendenti, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La matrice si può studiare a blocchi e si trovano subito autovalori e autovettori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 4$$

La matrice risulta diagonalizzabile perchè gli tutti gli autovalori sono regolari. L'unico punto che rimane da verificare è la dimensione geometrica dell'autospazio dell'autovalore 4 la cui dimensione algebrica è 2.

Esercizio n.5

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ -5 & 1 & 1 \\ -k^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & k & 1 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \\ -k^2 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$det(A) = k + k^3 = k(k^2 + 1)$$

In $\mathbb{R}$, $det(A) = 0$ per $k = 0$. Se $k = 0$ il sistema é incompatibile (si nota subito dalla prima eqz.); se $k \neq 0$ esiste ed é unica la soluzione. In $\mathbb{C}$, $det(A) = 0$ per $k = 0$ e $k \neq^{+}_{-} i$. Se $k \neq 0$ e $k \neq^{+}_{-} i$ esiste ed é unica la soluzione; se $k = 0$ il sistema é incompatibile (si nota subito dalla prima eqz.); se $k =^{+}_{-} i$ si ha $r(A) = 2$ e $r(A') = 3$, dunque il sistema é incompatibile.