Soluzioni dello scritto del 1 luglio 2003

Esercizio 1.

La matrice è a blocchi per cui si studiano i **tre** blocchi separatamente. Il primo blocco è $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **con autovalori 0 e 3**. Il secondo blocco è $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, **con autovalori 0 e 3**. Il terzo blocco è (3) con autovalore **3.**

L'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 3 ha molteplicità algebrica uguale a 3 si devono quindi trovare le loro molteplicità geometriche.

Il rango della matrice è 3 per cui la dimensione del nucleo è 2 e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è 2.

Per l'autovalore 3 si può calcolare così:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ 2x-2y \\ -2z+2t \\ z-t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per cui: $(x = y,\ z = t)$ l'autovettore generico è quindi $\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \\ z \\ u \end{pmatrix}$ questi autovettori formano uno spazio di dimensione 3, e quindi la molteplicità geometrica è 3.

Tutti gli autovalori sono regolari e quindi la matrice è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico è, in base agli autovalori trovati e alle loro molteplicità algebriche, $p(\lambda) = \lambda^2(3-\lambda)^3$.

Esercizio 2.

$f(2 - 2x + 4x^2 + x^3) = 0 + 2x + 0 + 3x^3$

Nelle basi assegnate l'applicazione è data da:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(x) &= -x \\ f(x^2) &= 0 \\ f(x^3) &= 3x^3 \end{aligned}$$

Per cui la matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Il nucleo di A^2 è costituito dai polinomi del tipo: $\{a + cx^2 \text{ con } a, c \in \mathbb{R}\}$
L'immagine di A^2 è costituita dai polinomi del tipo: $\{bx + dx^3 \text{ con } b, d \in \mathbb{R}\}$
Gli autovalori di A sono $0, -1, 3$. I corrispondenti autospazi sono:

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{a + cx^2 \text{ con } a, c \in \mathbb{R}\right\} \\ V_{-1} &= \{bx \text{ con } b \in \mathbb{R}\} \\ V_3 &= \left\{dx^3 \text{ con } d \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

$f^{-1}(2x + 3x^3) = \{w \text{ tali che } f(w) = 2x + 3x^3\} = \{a - 2x + cx^2 + x^3 \text{ con } a, c \in \mathbb{R}\}$
infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow b = -2, d = 1, a, c \text{ arbitrari}$$

$f^{-1}(1 + x + x^2) = \{w \text{ tali che } f(w) = 1 + x + x^2\} = \varnothing$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{impossibile}$$