Soluzioni Geometria — 26 Marzo 2003

ESERCIZIO n.1: Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base canonica si considerino i seguenti vettori:

$$v = (1, 1, 3) \quad w = (-1, 2, 1) \quad u = (1, 0, 1)$$

ed i seguenti sottospazi: $U = span\,\{v, w\}$ e $V = span\,\{v, w, u\}$. Si ricordi che $span\,\{...\}$ è il sottospazio generato dai vettori contenuti nella parentesi.

1. Calcolare le dimensioni di $U \cap V$ e di $U + V$. **(4 punti).** *I vettori v, w, u sono indipendenti, ne segue immediatamente che V ha dimensione 3 e U ha dimensione 2. Siccome $U \subset V$ si ha che $U \cap V = U$ ha dimensione 2 e $U + V = V$ ha dimensione 3.*

2. Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e ortogonale al piano che contiene v e w. **(2 punti).** *La direzione $a = (x, y, z)$ della retta r si trova imponendo l'ortogonalità:*

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x + y + 3z = 0 \text{ e } \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -x + 2y + z = 0$$

Si ricava facilmente una soluzione : $a = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ *e quindi l'equazione parametrica della retta cercata:* $r = t\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Per che valori di k il vettore $z = (3, 3, k)$ appartiene a U ? **(3 punti).** *Si devono imporre le condizioni*

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & k \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cioè studiare il sistema $\begin{pmatrix} x - y = 3 \\ x + 2y = 3 \\ 3x + y - k = 0 \end{pmatrix}$. *Si trova facilmente* $x = 3, y = 0, k = 9$

4. Per che valori di k il vettore $z = (5k^2, 4, 3k)$ è ortogonale a U ? **(3 punti).** *La soluzione del punto 2 fornisce immediatamente la risposta $k = -1$*

ESERCIZIO n.2: Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare **reale** definita da:

$$f(e_1) = 2e_2 + e_3$$
$$f(e_2) = \frac{k}{8}e_1 + \frac{k}{8}e_3$$
$$f(e_3) = e_1 + 2e_2$$

1. Scrivere il polinomio caratteristico e trovare gli autovalori. **(3 punti).** *La matrice associata è:*
$$\begin{pmatrix} 0 & k/8 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & k/8 & 0 \end{pmatrix}$$
il cui polinomio caratteristico risulta $p(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{1}{2}k\lambda + \frac{1}{2}k + \lambda$. *Gli autovalori sono quindi:* $\{\lambda_1 = -1\}, \{\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2k}\}, \{\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2k}\}$, *quando sono **reali**, cioè se* $1 + 2k \geq 0$.

2. Studiare la diagonalizzabilità della matrice al variare di k in $\mathbb{R}$. **(5 punti).** *Quando gli autovalori sono tutti reali e distinti cioè se* $1 + 2k > 0$ e $k \neq 4$, *la matrice è certamente diagonalizzabile. Si devono quindi studiare i casi in cui ci sono coincidenze di autovalori. Il primo caso è quello in cui* $1 + 2k = 0$, *cioè* $k = -1/2$, *e quindi* $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$. *L'autospazio dell'autovalore doppio si calcola come segue:*
$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/16 & 1 \\ 2 & -1/2 & 2 \\ 1 & -1/16 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
La matrice del sistema ha rango 2. Si trova quindi che il sistema omogeneo ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ *soluzioni e quindi l'autospazio dell'autovalore* $-1/2$ *ha dimensione uguale a 1. L'autovalore risulta quindi non regolare e la matrice, per* $k = -1/2$, *non è diagonalizzabile. Il secondo caso si ha per* $\lambda_1 = -1 = \lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2k}$, *cioè* $k = 4$. *L'autospazio dell'autovalore doppio si calcola come segue:*
$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
La matrice del sistema ha rango 1. Si trova quindi che il sistema omogeneo ha $\infty^{3-1} = \infty^2$ *soluzioni e quindi l'autospazio dell'autovalore* -1 *ha dimensione uguale a 2. L'autovalore risulta quindi regolare e la matrice, per* $k = 4$, *è diagonalizzabile.*

3. Per che valori di k la matrice è invertibile? **(2 punti).** *Il determinante della matrice è* $k/2$ *che è diverso da 0 per* $k \neq 0$.

4. Per che valori di k il vettore $v = 2e_1 + 4e_2 + 2e_3$ è un autovettore con autovalore 2 ? **(3 punti).** *Si deve imporre la condizione:*
$$\begin{pmatrix} 0 & k/8 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & k/8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2}k \\ 8 \\ 2 + \frac{1}{2}k \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Si trova subito $k = 4$.

5. Studiare, al variare di k, la risolubilità e il numero di soluzioni del sistema lineare $Au = b$, dove A è la matrice associata a f , $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(4 punti).** *La*

matrice del sistema ha rango 3 *per* $k \neq 0$ *e quindi in questi casi il sistema è risolubile con una sola soluzione; per* $k = 0$ *il rango della matrice del sistema è* 2*, mentre quello della matrice completa è* 3*; il sistema è non risolubile.*

6. Trovare i valori di k per cui la dimensione del nucleo di f è la più grande possibile e, in questo caso, trovarne una base. **(3 punti).** *La matrice ha rango minimo possibile* 2 *e ciò si ottiene per* $k = 0$*. In questo caso il sistema*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2x + 2z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica che tutti i vettori del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A$*. Una base è, quindi,* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.