Soluzioni dello scritto del 16 settembre 2003.

Esercizio n.1:

La matrice della applicazione è: $\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 2 \end{pmatrix}$.
Gli autovalori sono: $0, 0, 4$ e gli autospazi hanno come basi:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 4, \left\{ \begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0.$$

La matrice risulta diagonalizzabile perchè tutti gli autovalori sono regolari.
La base del nucleo è quella dell'autospazio dell'autovalore zero.
Una base per l'immagine è data da una colonna della matrice, ad esempio, $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1-i \end{pmatrix}$.
Essendo la matrice diagonalizzabile, il polinomio caratteristico risulta quello (semplicissimo da calcolare!) della forma diagonale: $p(\lambda) = \lambda^2 (4-\lambda)$.

Esercizio n.2:

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda^6(\lambda^2-2)(\lambda^3-3)$ per cui gli autovalori sono le **due** radici quadrate di 2, (ciascuna con molteplicità algebrica uguale a 1), le **tre** radici terze di 3 (ciascuna con molteplicità algebrica uguale a 1), e 0 (quest'ultimo con molteplicità algebrica uguale a 6). Se la matrice ha rango 5, il nucleo ha dimensione $11-5=6$ e quindi anche l'autovalore 0 risulta regolare e la matrice è diagonalizzabile. Se la matrice è diagonalizzabile, la sua forma diagonale contiene 6 volte il numero 0 sulla diagonale principale e quindi la matrice (avendo 6 righe tutte di zeri) ha rango uguale a $11-6=5$.

Esercizio n.3:

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice completata è:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & k-2 \\ 1 & k & 1 & k+2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A vale $4k$ per cui i casi da studiare sono: $k \neq 0$ e $k = 0$.

Per $k \neq 0$ il sistema è di rango massimo e quindi ha una sola soluzione.
Per $k = 0$ il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è uguale a 2, e il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è uguale ancora a 2, per cui il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty$ soluzioni.

Esercizio n.4:

La matrice dell'applicazione è:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante vale 0 per cui la matrice **non è invertibile.**

Il vettore $e_1 + e_2$ è rappresentato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il prodotto della matrice per il vettore dato vale:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il vettore dato **non è quindi un autovettore**.

Il vettore $e_3 - e_1 - e_2$ è rappresentato da $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il prodotto della matrice per il vettore dato vale:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il vettore dato **è quindi un autovettore con autovalore** 0.