Algebra B - 18 marzo 2008

Linee guida: ogni affermazione che scrivete o utilizzate deve essere giustificata, o da un calcolo diretto, o da una dimostrazione, oppure dall'applicazione di un risultato trattato nel corso e adeguatamente citato.

1. Sia $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ il **gruppo additivo** prodotto diretto dei gruppi additivi $\mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_6$.
   - Dire quanti sono gli elementi di ordine 2, di ordine 3 e di ordine 6.
   - Trovare un sottogruppo di ordine 2, uno di ordine 3 e uno di ordine 6.

2. Sia $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ **l'anello** prodotto diretto degli anelli $\mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_6$.
   - Trovare le unità e i divisori dello zero.

3. Si consideri il gruppo diedrale $\mathbb{D}_4$ generato dai due elementi b e c con $b^2 = c^4 = 1$ e $cb = bc^{-1}$
   - Mostrare che c^2 appartiene al centro di $\mathbb{D}_4$;
   - Mostrare che per n **pari**, $c^{n/2}$ appartiene al centro di $\mathbb{D}_n$.

4. Sia R un anello e sia $x \neq 0 \in R$ tale che .
   - Mostrare che se si suppone $x^3 = 0$ allora $1 + x$ e $1 - x$ sono invertibili.
   - Mostrare che se si suppone $x^4 = 0$ allora $1 + x$ e $1 - x$ sono invertibili.
   - Sia ora $x \neq 0$ tale che $x^n = 0$ per un naturale n, mostrare che $1 + x$ e $1 - x$ sono invertibili.

Cenno alle soluzioni

1. I 18 elementi si ripartiscono in: 1 di ordine 1, 1 di ordine 2, 8 di ordine 3 e 8 di ordine 6. I sottogruppi cercati sono quelli generati da elementi di ordine corrispondente.

2. Le unità sono gli elementi di $\mathbb{Z}_3^* \times \mathbb{Z}_6^* = \{(1,2) \times (1,5)\}$, ovvero $(1,1), (1,5), (2,1)$, $(2,5)$. Essendo l'anello **finito** tutti gli altri elementi $\neq (0,0)$ sono divisori delle zero per il terorema che dice che in un anello finito ogni elemento non divisore di zero è unità.

3. x appartiene al centro se e solo se $xy = yx$ per ogni y, ovvero se e solo se $x = yxy^{-1}$. Se $x = c^2$ si deve calcolare yc^2y^{-1} per tutti gli elementi di $\mathbb{D}_4$: gli elementi di $\mathbb{D}_4$ sono di tre tipi: per $y = c^a$ $(a = 1, 2, 3)$ è chiaro che $yc^2y^{-1} = c^2$; per $y = b$ si ha:

$$bc^2b = bccb = bcbc^{-1} = b^2c^{-2} = c^2 \text{ (perchè } c^2 = c^{-2}\text{);} \tag{1}$$

   per $y = bc^a$ si ottiene:

$$bc^a c^2 (bc^a)^{-1} = bc^a c^2 c^{-a} b^{-1} = bc^2b = c^2 \tag{2}$$

   Gli stessi calcoli dimostrano il caso $c^{n/2}$:

$$bc^{n/2}b = bcccc....cb = bccccc...bc^{-1} = bcccc..bc^{-2} = ... = c^{-n/2} = c^{n/2} \text{ (perchè } c^{n/2} = c^{-n/2}\text{)} \tag{3}$$

4. Per l'invertibilità di $1-x$ basta eseguire la scomposizione: $1 = 1 - x^n = (1-x)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + 1)$ che dimostra l'invertibilità di $1-x$ perchè tutte le potenze di x commutano fra di loro e quindi $(1-x)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + 1) = (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + 1)\,(1-x) = 1$, e quindi

$$(1-x)^{-1} = (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + 1) \tag{4}$$

L'invertibilità di $1+x$ invece si dimostra con la sostituzione $x \to -x$ nella formula precedente, si ricava quindi:

$$\text{per } \mathbf{n} \text{ pari, } (1+x)^{-1} = (-x^{n-1} + x^{n-2} - x^{n-3} + ... + 1). \tag{5}$$

$$\text{per } \mathbf{n} \text{ dispari, } (1+x)^{-1} = (x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - .... + 1). \tag{6}$$