

Algebra B - 21 luglio 2008

Linee guida: ogni affermazione che scrivete o utilizzate deve essere giustificata, o da un calcolo diretto, o da una dimostrazione, oppure dall'applicazione di un risultato trattato nel corso e adeguatamente citato.

1. L'insieme R di funzioni reali a valori reali

$$R = \{f_{a,b} \mid f_{a,b}(x) = ax + b \text{ con } x, a, b \in \mathbb{R}\}$$

con le operazioni:

$$\begin{aligned}(f_{a,b} + f_{c,d})(x) &\equiv f_{a,b}(x) + f_{c,d}(x) \\ (f_{a,b} \cdot f_{c,d})(x) &\equiv f_{a,b}(f_{c,d}(x))\end{aligned}$$

è un anello.

- a E' commutativo? Determinare gli elementi neutri rispetto alla somma e al prodotto.
- b Trovare l'opposto di $f_{a,b}$.
- c Trovare esplicitamente la somma $(f_{a,b} + f_{c,d})$ e il prodotto $(f_{a,b} \cdot f_{c,d})$.
- d Determinare R^* , il gruppo delle unità dell'anello, e per $f_{a,b} \in R^*$, trovare esplicitamente $(f_{a,b})^{-1}$.
- e Trovare un elemento di ordine due in R^* .
- f Sia $N = \{f_{a,b} \mid a = 1, b \in \mathbb{R}\}$, mostrare che N è sottogruppo di R^* .
- g Mostrare inoltre che N è sottogruppo normale di R^* .
- h Mostrare che gli elementi del tipo $f_{0,d}$ sono divisori **destri** dello zero.
- i Sono divisori dello zero?

2. Sia G un gruppo **infinito**.

- a Discutere, attraverso esempi, la verità delle affermazioni seguenti:
 - 1 G può contenere elementi di ordine finito diversi dall'elemento neutro.
 - 2 Ogni elemento di G diverso dall'elemento neutro ha ordine infinito.
 - 3 G ha necessariamente elementi di ordine infinito.
- b Dimostrare che G ha infiniti sottogruppi.

Soluzioni.

1.
 - L'anello non è commutativo, l'elemento neutro rispetto alla somma è $f_{0,0}$ e quello rispetto al prodotto è $f_{1,0}$.
 - L'opposto di $f_{a,b}$ è $f_{-a,-b}$,
 - la somma è data da:

$$f_{a,b} + f_{c,d} \equiv f_{a+c,b+d}$$

il prodotto è dato da:

$$f_{a,b} \cdot f_{c,d} \equiv f_{ac,ad+b}$$

- Gli elementi invertibili sono quelli per cui $a \neq 0$; l'inverso di un elemento invertibile $f_{a,b}$ è $f_{a^{-1},-ba^{-1}}$.
- L'elemento di ordine due è $f_{-1,0}$.
- N è sottogruppo perchè se $f_{1,b}$ e $f_{1,d} \in N$ allora:

$$f_{1,b} \cdot (f_{1,d})^{-1} = f_{1,b} \cdot f_{1,-d} = f_{1,b-d} \in N$$

- N è normale perchè se $f_{a,b} \in R^*$ e $f_{1,c} \in N$ si ha:

$$f_{a,b} \cdot f_{1,c} \cdot (f_{a,b})^{-1} = f_{a,b} \cdot f_{1,c} \cdot f_{a^{-1},-ba^{-1}} = f_{1,ac} \in N$$

- Se consideriamo un elemento del tipo $f_{0,d}$ si vede subito che:

$$f_{a,-ad} \cdot f_{0,d} = f_{0,0}$$

- Non sono divisori sinistri, infatti:

$$f_{0,b} \cdot f_{c,d} = f_{0,b}$$

Non sono quindi divisori dello zero, sono elementi che non sono né divisori dello zero, né unità.

2.
 - a **1:** vero, ad esempio in $\mathbb{R}^*$ l'elemento -1 ha ordine due. **2:** falso, come dimostra lo stesso esempio. **3:** falso, ad esempio il gruppo costituito da tutte le successioni di 0 e 1 con la somma modulo 2 ha tutti gli elementi di ordine al più 2.
 - b Alla luce del punto precedente, ci sono due casi distinti. Se G ha un elemento di ordine infinito g , il sottogruppo generato da g è isomorfo a $\mathbb{Z}$ che ha infiniti sottogruppi. Se invece tutti gli elementi di G hanno ordine finito, sia g_1 uno di questi e il sottogruppo generato sia G_1 . Per ipotesi G_1 è finito e quindi $G - G_1$ è non vuoto. Prendiamo ora un elemento di $G - G_1$, sia g_2 e chiamiamo G_2 il sottogruppo finito da lui generato. Prendiamo ora un elemento di $G - (G_1 \cup G_2)$, sia g_3 e sia G_3 il sottogruppo generato. Il procedimento continua all'infinito, e quindi il gruppo G possiede gli infiniti sottogruppi G_i .