Algebra B — 22 Settembre 2009

1. Sia $\mathbb{G}$ il gruppo generato dagli elementi x e y con le relazioni:

$$x^3 = y^2 = (xy)^2 = e \tag{1}$$

   - Trovare l'ordine del gruppo.
   - E' abeliano?
   - Trovare un sottogruppo di ord ine 3 e mostrare che è normale.
   - Trovare tutti i sottogruppi di $\mathbb{G}$

2. Dimostrare che $17777777777^{32} - 1$ è divisibile per 24.

3. Considerato l'anello $\mathbb{Z}_{24}$ trovare il gruppo delle unità e l'insieme dei divisori di zero. Mostrare che il gruppo delle unità non è ciclico.

4. Si dice *caratteristica* di un anello R il più piccolo intero positivo a (se esiste!) per cui $ax = 0$ per **ogni** elemento dell'anello[1]. Se non esiste un tale a l'anello si dice avere caratteristica 0.

   - Dare un esempio di un anello a caratteristica 0 e di un anello a caratteristica 8
   - Trovare la caratteristica di $\mathbb{Z}_n$
   - Dare un esempio di un campo a caratteristica 0 e di uno a caratteristica 7
   - Mostrare che la caratteristica di un campo è 0 oppure un numero **primo**.

[1] Ricordiamo che ax significa $x + x + ... + x$ a volte

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

Esercizio n.1
Gli elementi distinti del gruppo sono:

$$\{e, x, x^2, xy, x^2y\}$$

Infatti dalle relazioni date si ricava facilmente, moltiplicando a sinistra per x^2 e a destra per y :

$$xyxy = e \rightarrow yx = x^2y$$

Allora ogni prodotto di elementi del gruppo dopo alcuni scambi in cui si usa la formula precedente, si riduce ad uno del tipo $x^a y^b$ con $a = 1, 2, 3$; $b = 1, 2$. La struttura del gruppo è quella del gruppo diedrale di 6 elementi. Infatti se si pone:

$$c = x, \;\; b = y$$

sono verificate le relazioni che definiscono D_3 :

$$c^3 = b^2 = e, \;\; cb = bc^{-1}$$

Esercizio n.2
basta calcolare $\varphi(24)$ e applicare il teorema di Eulero. I numeri minori di 24 e primi con esso sono: $\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. Essendo in numero di 8 ne segue che $\varphi(24) = 8$. Essendo 32 multiplo di 8, e 17777777777 primo con 24, si applica subito il teorema di Eulero:

$$17777777777^{32} - 1 = \left(17777777777^{\varphi(24)}\right)^4 - 1 = 1^4 - 1 = 0 \bmod 24$$

Esercizio n.3
Le unità sono $\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ (i numeri minori di 24 e primi con 24) e tutti questi elementi hanno ordine 2. I restanti elementi $\neq 0$ sono divisori di zero.

Esercizio n.4
$\mathbb{Z}_n$ è generato da 1 e quindi ha caratteristica n. Se un campo avesse caratteristica $n = ab$ (per assurdo stiamo supponendo che n non sia primo e quindi supponiamo a, b entrambi $\neq 1$) si avrebbe: $n1 = (ab)\,1 = a1 \cdot b1 = 0$ ma questo è assurdo perchè $a1 \neq 0$ e $b1 \neq 0$ (perchè a e b sono entrambi minori di n) e un campo non ha divisori di zero.