Algebra B — 26 Luglio 2007

1. Si consideri il gruppo $\mathbb{Z}_{15}^*$ degli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_{15}$:

   - Determinare **tutti** i sottogruppi di ordine 2;
   - Determinare **tutti** i sottogruppi di ordine 4;
   - $\mathbb{Z}_{15}^*$ è ciclico? Motivare la risposta;
   - Presi un sottogruppo K di ordine 4 e H di ordine 2, studiare i gruppi quozienti $\mathbb{Z}_{15}^*/H$ e $\mathbb{Z}_{15}^*/K$.

2. Si consideri l'anello di polinomi $\mathbb{Z}_9[x]$:

   - Ha divisori dello zero?
   - Ha elementi invertibili diversi da ± 1?

3. Considerato il gruppo G :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{Z}_5 \text{ e } ad - cb = 1 \right\}$$

   - Trovarne il centro.
   - Trovare l'inverso e l'ordine dell'elemento $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

SOLUZIONI DI ALCUNI PUNTI:

1. $\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$

   - sottogruppi di ordine 2: $\{1, 11\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 14\}$
   - sottogruppi di ordine 4: $\{1, 2, 4, 8\}$, $\{1, 4, 7, 13\}$
   - $\mathbb{Z}_{15}^*$ non è ciclico, ogni suo elemento ha ordine minore di 8.
   - Se $K = \{1, 2, 4, 8\}$ allora $\mathbb{Z}_{15}^*/K = \{K, 7K, \}$, dove $7K = \{7, 11, 13, 14\}$.
     Se $H = \{1, 11\}$ allora $\mathbb{Z}_{15}^*/H = \{H, 2H, 4H, 8H\}$, dove $2H = \{2, 7\}$, $4H = \{4, 14\}$ e $8H = \{8, 13\}$.

2. Ad esempio $3x$ è un divisore dello zero, infatti $3x \cdot 3x = 9x^2 = 0x^2 = 0$. Quindi, ad esempio, $(1 + 3x)$ è una unità , infatti:

$$(1 + 3x)(1 - 3x) = 1 - 9x^2 = 1$$

3. Il centro è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$; un facile calcolo mostra che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 30 & 41 \end{pmatrix} \bmod 5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$