Algebra B — 29 Luglio 2009

1. Sia $\mathbb{G}$ il gruppo di matrici:

$$\mathbb{G} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

   - Trovare l'ordine degli elementi.
   - Trovare un sottogruppo di ordine 3 e mostrare che è normale.
   - Mostrare che $\mathbb{G}$ è isomorfo a D_3 (il gruppo diedrale di 6 elementi) scrivendo un isomorfismo esplicito.
   - Mostrare che $\mathbb{G}$ è un sottogruppo di $O(2)$.

2. Sia n un intero positivo, dimostrare che $7^n + (-1)^n - 2$ è sempre divisibile per 4

3. Un anello R si dice *anello Booleano* se $\forall x \in R$, $x^2 = x$

   - Mostrare che in ogni anello Booleano si ha $\forall x$, $2x = 0$
   - Mostrare che ogni anello Booleano è commutativo

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

Esercizio n.1

Trovato l'ordine degli elementi si verifica subito a conti che ponendo

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = c, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = c^2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = bc, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = bc^2 \end{array} \right\}$$

la struttura del gruppo è quella del gruppo diedrale di 6 elementi. Il motivo geometrico è questo:
Le simmetrie di rotazione di un triangolo equilatero rispetto al centro sono date dalle matrici $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in SO(2)$ per $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ e 2π. Cioè dalle matrici:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La riflessione rispetto all'asse x è data dalla matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2)$. Se si pone:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sono verificate le relazioni che definiscono D_3 :

$$c^3 = b^2 = e, \;\; cb = bc^{-1}$$

Si trova quindi subito:

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = c, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = c^2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = bc, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = bc^2 \end{array} \right\} \subset O(2)$$

Esercizio n.2

Si deve dimostrare che:

$$(7^n + (-1)^n - 2) \bmod 4 = 0$$

La tesi segue immediatamente, infatti basta osservare che $7^2 \bmod 4 = 1$ e quindi:

$$\begin{gathered} \textbf{per } n \textbf{ pari}, \; (7^n + (-1)^n - 2) \bmod 4 = \left(49^{n/2} + (-1)^n - 2\right) \bmod 4 = 1 + 1 - 2 = 0 \\ \textbf{per } n \textbf{ dispari}, \; (7^n + (-1)^n - 2) \bmod 4 = \left(7^{2k+1} + (-1)^{2k+1} - 2\right) \bmod 4 = \\ = \left(49^k 7 + (-1)^{2k}(-1) - 2\right) \bmod 4 = 3 - 1 - 2 = 0 \end{gathered}$$

Esercizio n.3

Ogni anello booleano R soddisfa $x + x = 0$ per ogni x ; infatti:

$$x + x = (x + x)^2 = x^2 + 2x^2 + x^2 = x + 2x + x$$

e quindi sottraendo $x + x$ da entrambi i membri di questa equazione otteniamo la tesi.
Per la commuatatività:

$$x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$$

e questa uguaglianza implica

$$xy + yx = 0 \text{ cioè la tesi } yx = -xy = xy$$

(utilizzando la proprietà precedentemente dimostrata al punto 1 infatti si ha $2xy = xy+xy = 0$ cioè $xy = -xy$)