Algebra B - 9 gennaio 2008

Linee guida: ogni affermazione che scrivete o utilizzate deve essere giustificata, o da un calcolo diretto, o da una dimostrazione, oppure dall'applicazione di un risultato trattato nel corso e adeguatamente citato.

1. Sia A l'anello dei polinomi in una indeterminata con coefficienti in $\mathbb{Z}_{25}$.
   - Trovare una unità di grado 0, una di grado 1 e una di grado 2.
   - Trovare un divisore dello zero di grado 0, uno di grado 1 e uno di grado 2
   - Ci sono unità e divisori dello zero di qualsiasi grado?
2. Sia G un gruppo e si consideri l'equazione $x^2ax = a^{-1}$ con $a, x \in G$
   - Dimostrare, trovando una soluzione esplicita, che se a è il cubo di qualche elemento di G allora l'equazione è risolubile.
   - Dimostrare che se l'equazione è risolubile allora a e x commutano.
   - Dimostrare che se l'equazione è risolubile allora x è il quadrato di qualche elemento di G.
   - Dimostrare che se l'equazione è risolubile allora a è il cubo di qualche elemento di G.
3. Si consideri il gruppo $\mathbb{Z}_{18}^*$ degli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_{18}$:
   - Determinare un sottogruppo di ordine 2;
   - Determinare un sottogruppo di ordine 3;
   - Esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbb{Z}_{18}^*$ sia isomorfo a $(\mathbb{Z}_n, +)$? In caso di risposta affermativa esplicitare tutti gli isomorfismi possibili.
4. Dimostrare che ogni numero primo differisce per 1 o -1 da un multiplo di 6.

Soluzione esercizio numero 1

- $1, 1+5x, 1+5x^2$
- $5, 5x, 5x^2$
- $1+5x^n, 5x^n$

Soluzione esercizio numero 2

- Se $a = y^3$ basta porre $x = y^{-2}$ e si ottiene: $y^{-4}y^3y^{-2} = y^{-3}$ e quindi l'equazione è soddisfatta.
- Se $x^2ax = a^{-1}$ si ottiene, da una parte $a = x^{-1}a^{-1}x^{-2}$ e anche $a = x^{-2}a^{-1}x^{-1}$. Uguagliando si ottiene $a^{-1}x^{-1} = x^{-1}a^{-1}$ e quindi $ax = xa$.
- Si ha: $x^2ax = xxax = a^{-1}$ e quindi $x\left(xa\right) = a^{-1}x^{-1}$ cioè $x = \left(a^{-1}x^{-1}\right)^2$.
- Si ha $x^2ax = a^{-1}$, per cui $ax^2ax = axxax = axa^{-1}axax = e$ e quindi, usando anche la commutatività, $a = axaxax = \left(ax\right)^3$

Soluzione esercizio numero 3

- $\mathbb{Z}_{18}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$. $\{5, 11\}$ hanno ordine 6, $\{7, 13\}$ hanno ordine 3 e $\{17\}$ ha ordine 2 per cui:
- Un sottogruppo di ordine 2 è $\{1, 17\}$
- Un sottogruppo di ordine 3 è $\{1, 7, 13\}$
- Gli elementi di $\mathbb{Z}_6$ hanno i seguenti ordini: $\{1, 5\}$ hanno ordine 6, $\{2, 4\}$ hanno ordine 3 e $\{3\}$ ha ordine 2
- Ci possono essere isomorfismi tra $\mathbb{Z}_{18}^*$ e $\mathbb{Z}_6$ ottenuti mappando $1 \to 0$ e poi elementi di ordine n in elementi di ordine n. Ci possono quindi essere due isomorfismi che si distinguono per il valore assunto sui due elementi di ordine 3

Soluzione esercizio numero 4

- Sia $n = 6k + r$; i resti che portano a numeri sicuramente composti sono $r = 0, 2, 3, 4$; per i numeri primi restano a disposizione solo 1 e 5.