Calcolo 2B - Analisi III (corso 2003-2004)
18 dicembre 2003

1. Verificare il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ per il campo vettoriale

$$\vec{v} = x^3 y \vec{j}$$

nella regione V costituita dalla parte del cono circolare retto, di altezza 1 e raggio 1, con vertice nell'origine, contenuta nella regione di spazio dove $x, y, z \geq 0$.

2. Verificare che, per ogni a reale, l'origine è un punto critico della funzione:

$$f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2) - axy,$$

e studiare, al variare di a, la natura di tale punto.

Cenni sulle soluzioni - 18 dicembre 2003

1. Le equazioni cartesiane e quelle parametriche del cono circolare retto con vertice nell'origine dell'enunciato del problema sono:

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ e } \begin{cases} x = t\cos\varphi \\ y = t\sin\varphi \\ z = t \end{cases}$$

Con $0 \le \varphi \le \pi/2$ e $0 \le t \le 1$. Si ottiene quindi che la regione V è data da:

$$V = \{0 \le z \le 1, 0 \le y \le z, 0 \le x \le \sqrt{z^2 - y^2}\}$$

Essendo $div\, \vec{v} = x^3$ si ha: $\int\int\int_V div\, \vec{v}\, dV = \int_0^1 \int_0^z \int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} x^3 dxdydz = \int_0^1 \int_0^z \left(\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{2}y^2z^2\right) dydz = \int_0^1 \frac{2}{15}z^5 dz = \frac{1}{45}$. Le superfici che costituiscono il contorno di V e quindi da considerare per calcolare il flusso sarebbero, a priori, 4; si nota subito però che: il flusso uscente dalla superficie ortogonale al piano x, y è nullo perchè il campo vettoriale è ortogonale alla normale, il flusso uscente dalla superficie ortogonale al piano z, y è nullo perchè il campo vettoriale è ortogonale alla normale, il flusso uscente dalla superficie ortogonale al piano z, x è nullo perchè il campo vettoriale è nullo su questa superficie. Risulta quindi che il flusso totale si riduce a quello uscente dalla superficie Ω del quarto di cono. La normale **esterna** è:

$$\vec{n} = \frac{\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_t}}{\left|\vec{t_\varphi} \wedge \vec{t_t}\right|}$$

Il calcolo del flusso si può effettuare molto semplicemente scrivendo la due-forma ω corrispondente al campo $\vec{v}$:

$$\omega = -x^3 y dx \wedge dz$$

La sua restrizione alla superficie Ω **orientata positivamente** è allora:

$$\omega = t^5 \left(\sin^2\varphi\right)\left(\cos^3\varphi\right) d\varphi \wedge dt$$

e quindi:

$$\int\int_\Omega (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA = \int_0^1 t^5 \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\varphi\right)\left(\cos^3\varphi\right) d\varphi dt = \int_0^1 \frac{2}{15} t^5 dt = \frac{1}{45}$$

Il teorema della divergenza (che è applicabile per la regolarità del campo nella regione V) è verificato.

2. Essendo:

$$\nabla\left(\log(1+x^2+y^2)-axy\right)=\left(\begin{array}{c} -ay+2\frac{x}{x^2+y^2+1} \\ -ax+2\frac{y}{x^2+y^2+1} \end{array}\right)$$

si vede che in $x=0, y=0$ si annulla il gradiente. L'hessiano è:

$$H=\left(\begin{array}{cc} \frac{2}{x^2+y^2+1}-4\frac{x^2}{(x^2+y^2+1)^2} & -a-4x\frac{y}{(x^2+y^2+1)^2} \\ -a-4x\frac{y}{(x^2+y^2+1)^2} & \frac{2}{x^2+y^2+1}-4\frac{y^2}{(x^2+y^2+1)^2} \end{array}\right)$$

che, in $x=0, y=0$, diventa:

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & -a \\ -a & 2 \end{array}\right)$$

Gli autovalori sono $\lambda_1=a+2$ e $\lambda_2=-a+2$, risulta quindi che:

i) se $-2<a<2$ ambedue gli autovalori sono positivi: l'origine è un punto di minimo.

ii) se $a>2$ oppure $a<-2$ gli autovalori hanno segno opposto: l'origine è un punto di sella.

iii) se $a=2$ un autovalore si annulla. Lungo la retta $x=y$ la funzione diventa:

$$\log(1+2x^2)-2x^2$$

Il punto $x=0$ è un massimo. Lungo la retta $x=-y$ la funzione diventa:

$$\log(1+2x^2)+2x^2$$

Il punto $x=0$ è un minimo. L'origine è quindi un punto di sella.

iv) il caso $a=-2$ è analogo.

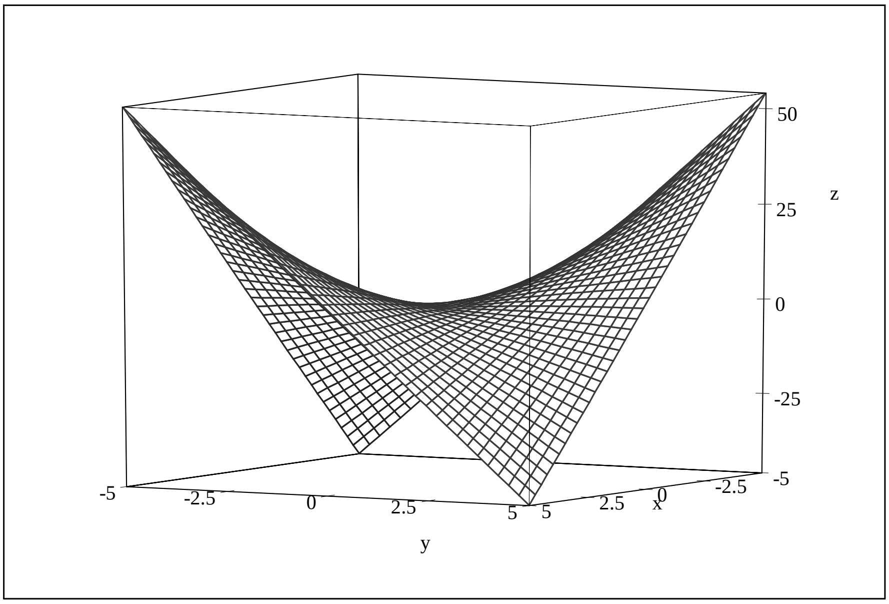

Figure 1: grafico per $a = 2$

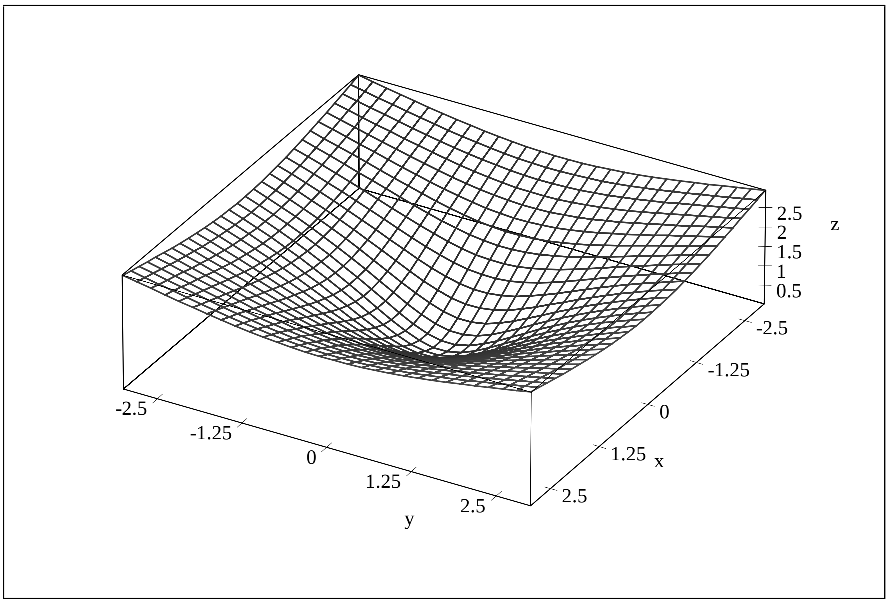

grafico per $a = 0$