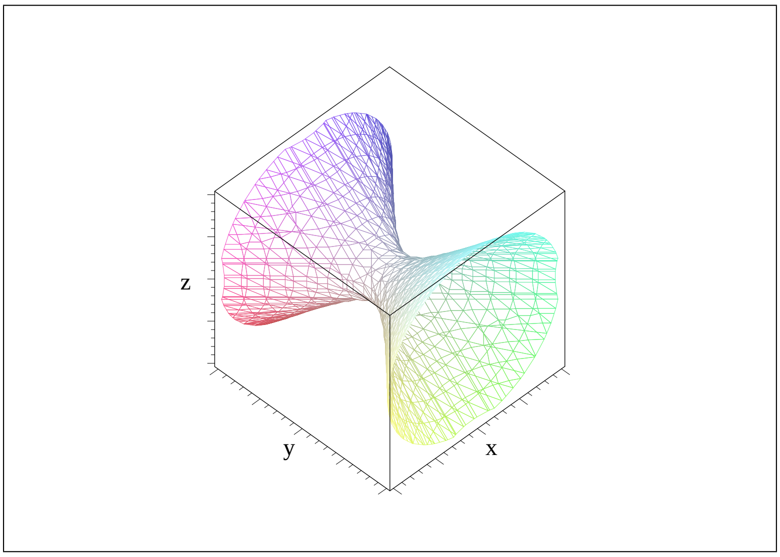
Calcolo 2B - Analisi III
maggio 2005

1. Considerato l'iperboloide ad una falda:
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$



   se ne faccia l'intersezione con i due piani $y = \pm 3$, e si calcoli il volume del solido compreso risultante.

2. Considerata la parte di iperboloide parametrizzata da[1]:
$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = \sinh u \\ z = \cosh u \sin v \end{cases}$$
   con $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v < 2\pi$, calcolare, mediante il teorema della divergenza, il flusso del campo vettoriale
$$\vec{v} = 2y^2 \vec{j}$$
   uscente dalla superficie chiusa S ottenuta "chiudendo" la porzione di iperboloide con due dischi.

3. Calcolare il flusso direttamente dalla definizione.

4. Calcolare l'integrale doppio $\int\int_\Omega xydxdy$, dove Ω è la regione di piano compresa tra le due curve $y = -x^2$ e $x = y^2$

[1] Ricordiamo la definizione delle funzioni iperboliche: $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$, $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$, e la relazione fondamentale: $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$.

Cenni sulle soluzioni - maggio 2005

1. Si può calcolare il volume molto semplicemente integrando per strati. Sezionando l'iperboloide con piani del tipo $y = a$ si ottengono delle curve di equazioni:

$$y = a$$
$$x^2 + z^2 = 1 + a^2$$

Queste curve sono circonferenze di raggio $\sqrt{1+a^2}$ e quindi racchiudono un'area $A(a) = \pi\left(1+a^2\right)$. Il volume cercato è quindi:

$$V = \int_{-3}^{3} \pi\left(1+a^2\right) da = 24\pi$$

2. Il teorema della divergenza (applicabile perchè il campo vettoriale è regolare nella regione di spazio interna alla superficie) dice che:

$$\int\int_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA = \int\int\int_V div\vec{v}\ dV$$

dove V è la regione di spazio racchiusa dalla superficie S. La regione V è data da :

$$V = \left\{x, y, z \mid 0 \leq y \leq \sinh 1, x^2 + z^2 \leq 1 + y^2\right\}$$

per cui, in coordinate cartesiane, essendo

$$div\vec{v} = 4y,$$

si ha:

$$\int\int\int_V div\vec{v}\ dV = \int_0^{\sinh 1}\left(\int\int_{D(y)} 4ydxdz\right) dy$$

dove $D(y)$ è il disco $x^2 + z^2 \leq 1 + y^2$. Essendo, per definizione,

$$\int\int_{D(y)} dxdz = \pi(1+y^2)\ ,$$

si ottiene subito:

$$\int\int_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA = \int_0^{\sinh 1} 4y\pi(1+y^2)dy = \pi\cosh^4 1 - \pi$$

3. **Calcolo diretto**: si calcola la due forma corrispondente al campo vettoriale sull'iperboloide (la normale uscente è ottenuta prendendo i parametri nell'ordine u, v)

$$\omega = 2y^2 dz \wedge dx = -2\sinh^3 u\,(\cosh u)\,du \wedge dv$$

Si calcola quindi il primo flusso:

$$\int\int_{S_1} \omega = -\int_0^1 4\pi\left(\sinh^3 u\right)(\cosh u)\,du =$$
$$= -\int_0^{\sinh 1} 4\pi y^3 dy = -\pi\cosh^4 1 + 2\pi\cosh^2 1 - \pi$$

Si calcola la due forma corrispondente al campo vettoriale sul disco in $y = \sinh 1$ (il disco è parametrizzato da:

$$x = \rho\cos\theta, z = \rho\sin\theta, 0 \le \rho \le \sqrt{1 + \sinh^2 1}$$

la normale uscente è ottenuta prendendo i parametri nell'ordine ρ, θ)

$$\omega = 2y^2 dz \wedge dx = 2\sinh^2 1 \rho d\rho \wedge d\theta$$

Si calcola quindi il secondo flusso:

$$\int\int_{S_2} \omega = \int_0^{\sqrt{1+\sinh^2 1}} 4\pi\left(\sinh^2 1\right)\rho d\rho = -2\pi\cosh^2 1 + 2\pi\cosh^4 1$$

Si osserva poi che il campo vettoriale è nullo sul disco situato in $y = 0$ quindi il flusso uscente è nullo.

Si calcola il flusso totale:

$$\int\int_{S_1} \omega + \int\int_{S_2} \omega = \pi\cosh^4 1 - \pi$$

4. La regione Ω è data, come regione y -semplice, da:

$$\Omega = \left\{x, y \mid 0 \le x \le 1, -\sqrt{x} \le y \le -x^2\right\}$$

e quindi si ottiene:

$$\int\int_\Omega xydxdy = \int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} xydy\right)dx = -\frac{1}{12}$$