# Calcolo 2B - Analisi III (corso 2003-2004)
# 25 marzo 2004

1. Sia $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ e sia

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 & x \leq y \\ \sqrt{x - y} & x > y \ . \end{cases}$$

Calcolare $\int_R f(x, y) dx dy$.

2. Studiare[1] tutti i punti stazionari della funzione:

$$f(x, y) = y^2(x^2 + y^2 - 2x)$$

3. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{v} = \left(3x + 8y^2\right) \vec{i} - y^2 x^2 \vec{j} + 2x^2 yz \vec{k}$$

uscente dal prisma $S$ avente generatrici parallele all'asse $z$, delimitato inferiormente dal trapezio $T_1$ :

$$T_1 = \left\{(x, y, z) \in R^3; z = 0, 0 < x < 1, x < y < 2\right\}$$

e superiormente dal trapezio $T_2$ :

$$T_2 = \left\{(x, y, z) \in R^3; z = 2, 0 < x < 1, x < y < 2\right\}$$

[1] Si consiglia, per i casi dubbi, di considerare la circonferenza $C : (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$, e studiare il segno di $f$ all'interno e all'esterno del disco delimitato da $C$.

# Cenni sulle soluzioni - 25 marzo 2004

1. L'integrale va diviso in due parti. Siano:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -1 \le x \le 1,\ x \le y \le 2\}$$
$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -1 \le x \le 1,\ -2 \le y \le x\}\ .$$

Allora $R = R_1 \cup R_2$ e quindi:

$$\int_R f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{x}^{2} xy^2\,dy\,dx + \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{x} \sqrt{x-y}\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(8x - x^4)\,dx\ + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(x+2)^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}(6\sqrt{3}-1)\ .$$

2. Si ha:

$$\nabla f = 2y\,(x-1)\,\vec{\imath} + 2y\left(x^2 - 2x + 2y^2\right)\vec{\jmath}$$

e quindi i punti stazionari sono $\left(1, \pm 1/\sqrt{2}\right)$ e $(x,0)$ $\forall x$. La $f(x,y)$ è nulla sulla circonferenza $C$, negativa all'interno (salvo sull'asse $x$ dove è nulla) e positiva all'esterno (salvo sull'asse $x$ dove è nulla). Quindi segue subito che:

- i punti $(x,0)$ con $-\infty < x < 0$ e $2 < x < +\infty$ sono di **minimo locale** perchè in tutte le direzioni del piano $x,y$ la funzione cresce (o si mantiene costante lungo l'asse $x$).
- i punti $(x,0)$ con $0 < x < 2$ sono di **massimo locale** perchè in tutte le direzioni del piano $x,y$ la funzione decresce (o si mantiene costante lungo l'asse $x$).
- i punti $(0,0)$ e $(2,0)$ **non sono massimi o minimi** perchè in alcune direzioni la funzione cresce e in altre no. Ad esempio lungo l'asse $y$ la funzione cresce, mentre lungo la retta $x = y$ presenta un flesso.
- i punti $\left(1, \pm 1/\sqrt{2}\right)$ sono di **minimo** perchè l'hessiano è:

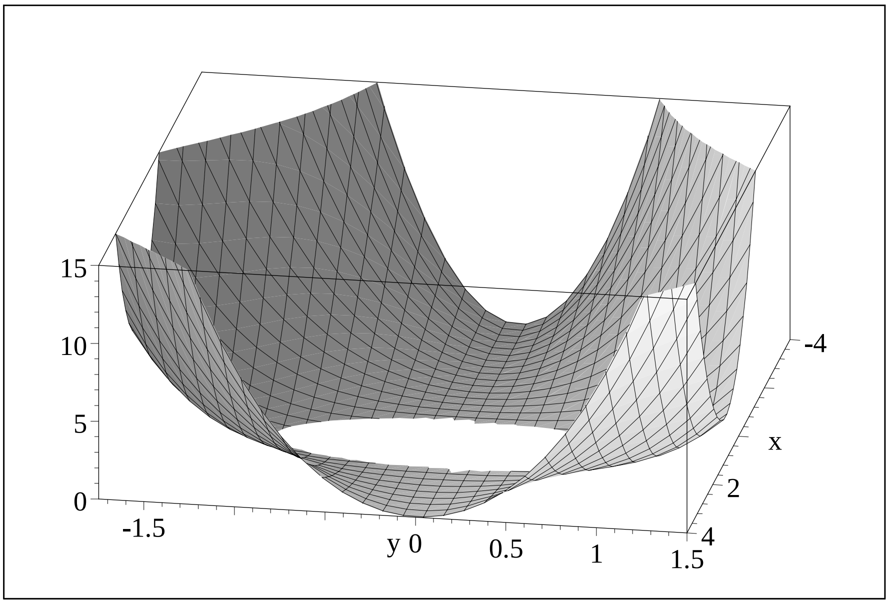
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 2y\,(2x-2) \\ 2y\,(2x-2) & 2x^2 + 12y^2 - 4x \end{pmatrix}$$

e quindi:

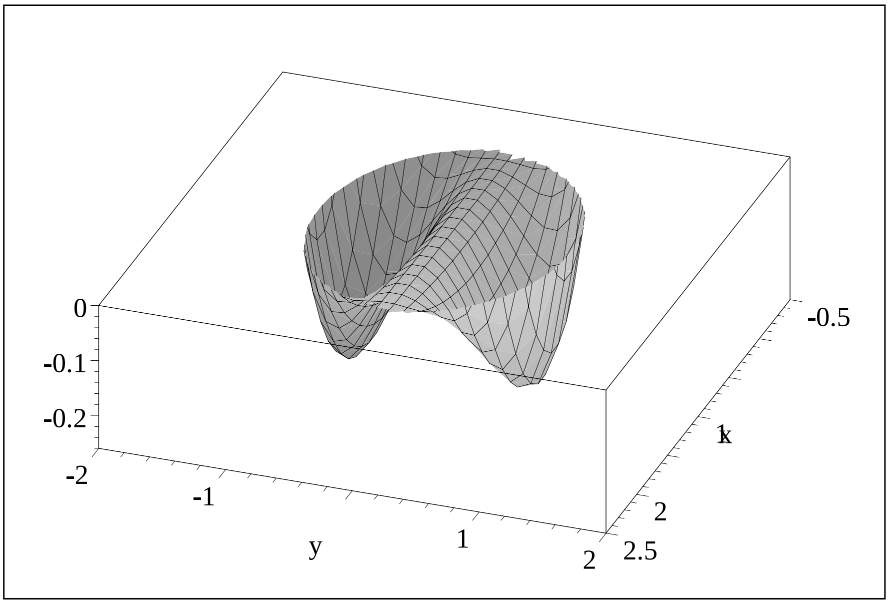
$$H(1, \pm 1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Questi minimi sono **assoluti,** perchè $f(1, \pm 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{4} < 0$

Ecco due grafici che mostrano chiaramente l'andamento della funzione.




All'esterno del disco




All'interno del disco

3. Il **teorema della divergenza** dice che:

$$\int \int_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA = \int \int \int_V div\vec{v}\ dV$$

dove $V$ è la regione di spazio racchiusa dalla superficie $S$. La regione $V$ è:

$$V = \{x, y, z \mid 0 \leq z \leq 2, 0 < x < 1, x < y < 2\}$$

e il campo vettoriale $\vec{v}$ è ben definito in tutta la regione $V$. In coordinate cartesiane, essendo

$$div\vec{v} = 3,$$

si ha:

$$\int\int\int_V div\vec{v}\ dV = \int_0^2 \left(\int\int_D 3dxdy\right) dz$$

dove

$$D = \{(x, y)\ \mid 0 < x < 1, x < y < 2\}$$

Essendo, per definizione,

$$\int\int_D dxdy = \frac{3}{2}\ \text{(Area del trapezio!)},$$

si ottiene subito:

$$\int\int_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA = \int_0^2 \frac{9}{2} dz = 9$$