

Appunti del corso di Fisica Matematica I.

Roberto Catenacci

Versione del 21 Maggio 2009

Argomenti e approfondimenti di Fisica Matematica svolti a lezione e non completamente contenuti (o esposti in modo differente) nel testo di Landau consigliato per il corso.

Testi di riferimento consigliati per questi argomenti:

G.Dell'Antonio, *Elementi di meccanica*, Liguori, Roma 1996.

B.Dubrovin, S.Novikov, A.Fomenko, *Geometria Contemporanea*, volume I°, Editori Riuniti, Roma 1987.

V.I.Arnold, *Metodi matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma 1979.

Indice

1	Campi vettoriali.	3
2	Gruppi ad un parametro di diffeomorfismi.	4
2.1	Esempi in $\mathbb{R}^2$.	5
3	Algebra di Lie dei campi vettoriali.	7
3.1	Gruppi a un parametro di rotazioni in $\mathbb{R}^3$.	8
3.2	Gruppi a un parametro di dilatazioni in $\mathbb{R}^3$.	9
3.3	Gruppi a un parametro di traslazioni in $\mathbb{R}^3$.	10
4	Simmetrie e invarianza.	11
4.1	Funzioni invarianti e Integrali primi del campo.	12
4.2	Campi invarianti e derivata di Lie.	13
5	Elementi di calcolo delle variazioni.	14
5.1	Equazioni di Eulero-Lagrange.	15
5.2	Il Principio di (minima) Azione.	17
6	Vincoli e Moti vincolati.	17
6.1	Superficie di vincolo.	18
6.2	Reazioni vincolari e Equazioni del moto.	19
6.3	Teorema di Lagrange-d'Alembert.	20
7	Simmetrie e Integrali del moto.	22
7.1	Invarianza di una Lagrangiana.	23
7.2	Integrali primi del moto e momenti.	24
7.3	Coordinate cicliche.	27
8	Teorema di Noether.	28
8.1	Il caso di più simmetrie.	29
8.2	Applicazioni ed esempi:	30
9	Il Problema dei due corpi.	31
9.1	Invarianza per traslazioni e moto del baricentro.	31
9.2	Moto in un campo centrale e invarianza per rotazioni.	32
9.3	Analisi del moto radiale.	35
9.4	Analisi del moto angolare e del moto nel piano.	37
10	Il problema di Keplero	40
11	Sistemi a un grado di libertà.	45
11.1	Analisi qualitativa nello spazio delle fasi.	46
11.2	Esempi di analisi qualitativa.	48

1 Campi vettoriali.

Sia $x^i, i = 1 \dots n$, un fissato sistema di coordinate cartesiane ortogonali in $\mathbb{R}^n$. Un **campo vettoriale** m -**dimensionale** in un aperto U di $\mathbb{R}^n$ è una funzione differenziabile (tante volte quante serviranno) $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, data, in componenti, da

$$v(x^i) = (v^1(x^i), v^2(x^i), \dots, v^m(x^i)).$$

Usualmente considereremo il caso $n = m$. Questa definizione è strettamente legata al sistema di coordinate introdotto. Per essere più liberi è necessaria una definizione intrinseca e si rivela molto utile un altro punto di vista.

Se f e g sono funzioni differenziabili da U a $\mathbb{R}$, $x_0 \in U$, si definisce **vettore** v **in** x_0 **un operatore differenziale lineare del primo ordine**, definito dalle seguenti proprietà: (in altre parole si identificano gli usuali vettori con le derivate direzionali)

- $v(f) \in \mathbb{R}$
- $v(f + g) = v(f) + v(g)$
- $v(fg) = g(x_0)v(f) + f(x_0)v(g)$

Gli operatori di questo tipo possono essere naturalmente sommati e moltiplicati per un numero reale, e costituiscono quindi uno spazio vettoriale, indicato con $T_{x_0}(U)$ e detto spazio tangente ad U nel punto x_0 . Sia ora $x^i, i = 1 \dots n$, un sistema di coordinate (non necessariamente cartesiane ortogonali) in $U \subseteq \mathbb{R}^n$; gli operatori $\frac{\partial}{\partial x^i}|_{x_0}$ sono indipendenti e formano una base di $T_{x_0}(U)$. Facendo variare il punto x_0 in U , si perviene alla seguente definizione di campo vettoriale: **un campo vettoriale in U è un operatore differenziale della forma:**

$$v = \sum a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Naturalmente la n -upla di funzioni differenziabili $a^i(x)$ dipende dal sistema di coordinate scelto: se $y^i, i = 1 \dots n$, è un altro sistema di coordinate, si deve avere, per consistenza:

$$v = \sum a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum b^j(y) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Ne consegue che, essendo:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_l \frac{\partial y^l(x)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^l}$$

Abbiamo subito la seguente legge di trasformazione delle componenti di un campo vettoriale quando cambiamo sistema di coordinate:

$$b^k(y(x)) = \sum_i a^i(x) \frac{\partial y^k(x)}{\partial x^i}$$

Se $x(t)$ è una curva in U , un importante campo vettoriale è il campo dei vettori tangenti:

$$\tau(x) = \sum \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

E' infatti un campo vettoriale perchè, se cambiamo coordinate, abbiamo la giusta legge di trasformazione: (questo esempio è alla base della definizione di campo vettoriale data sopra)

$$\frac{dy^k}{dt} = \sum_i \frac{\partial y^k(x)}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}$$

2 Gruppi ad un parametro di diffeomorfismi.

Un **gruppo ad un parametro locale di diffeomorfismi** G su un aperto U di $\mathbb{R}^n$ è l'insieme di funzioni:

$$G = \{\varphi_t : U \rightarrow U, t \in I\}$$

tali che,

1. $I = (a, b)$ è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ contenente 0 e $\forall t \in I$, φ_t è un diffeomorfismo di U .
2. La funzione $Q(x, t) = \varphi_t(x)$ è C^∞ da $U \times I \rightarrow U$.
3. $\varphi_0(x) = x$.
4. $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ cioè $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$.

Ad ogni campo vettoriale corrisponde un gruppo ad un parametro e viceversa.

Sia infatti $v(x)$ un campo vettoriale (pensato come n -upla delle sue componenti); consideriamo il sistema di equazioni differenziali $dQ(x, t)/dt = v(Q(x, t))$ con le condizioni iniziali $Q(x, 0) = x$. Le condizioni di regolarità usualmente imposte ai campi vettoriali assicurano l'esistenza e l'unicità (in un aperto U e per un intervallo di tempo I) della funzione $Q(x, t)$. Osserviamo ora che $Q(x, t+s)$ e $Q(Q(x, t), s)$ sono ambedue soluzioni che, per $s = 0$, valgono $Q(x, t)$; per l'unicità devono quindi coincidere. Ponendo

$$Q(x, t) = \varphi_t(x)$$

si ottengono subito le proprietà 3 e 4. Viceversa, la proprietà 2 consente di calcolare la derivata:

$$\left. \frac{d\varphi_t(x)}{dt} \right|_{t=0} \equiv v(x)$$

Si definisce quindi un campo vettoriale v (è il campo tangente alla curva $x(t) = \varphi_t(x)$ detta anche orbita del gruppo). E' immediato verificare anche che

$$v(\varphi_s(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t(\varphi_s(x)) - \varphi_0(\varphi_s(x))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{s+t}(x) - \varphi_s(x)}{t} = \left. \frac{d\varphi_t(x)}{dt} \right|_{t=s}$$

Scriveremo quindi, con un certo abuso di notazioni, $\varphi_t(x) = x(t)$, $x(0) = x$, e quindi:

$$\frac{d(x(t))}{dt} = v(x(t))$$

2.1 Esempi in $\mathbb{R}^2$.

Sia $v(x, y) = (v^1(x, y), v^2(x, y))$ un campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$, troviamo il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi associato: $\varphi_t(x, y) = Q(x, y, t)$ dove (x, y) è un generico punto di $\mathbb{R}^2$. Ponendo $Q(x, y, t) = (Q^1, Q^2) \in \mathbb{R}^2$, il sistema da integrare è:

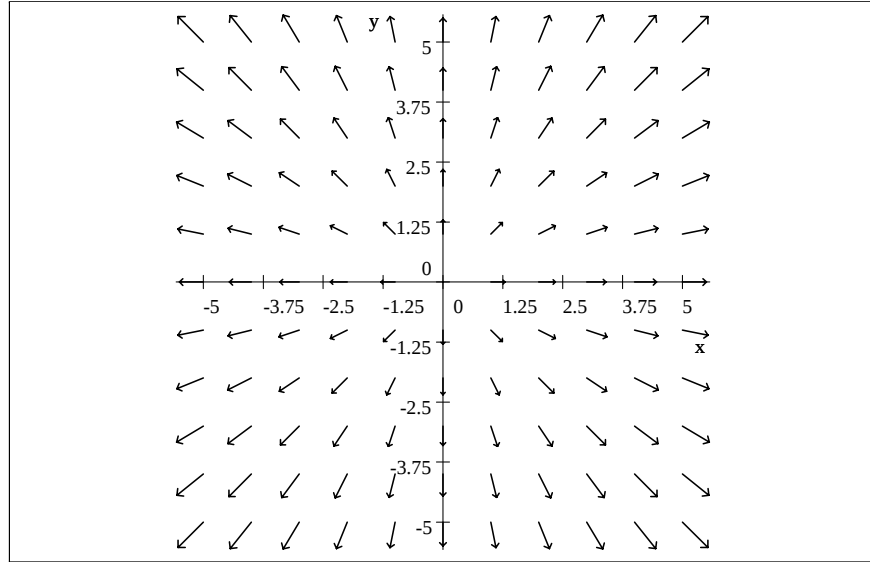
$$dQ(x, y, t)/dt = v(Q(x, y, t))$$

cioè:

$$\begin{aligned} dQ^1(x, y, t)/dt &= v^1(Q^1(x, y, t), Q^2(x, y, t)) \\ dQ^2(x, y, t)/dt &= v^2(Q^1(x, y, t), Q^2(x, y, t)) \end{aligned}$$

con le condizioni iniziali: $Q(x, y, 0) = (x, y)$ (cioè l'identità: $\varphi_0(x, y) = (x, y)$).

- $v(x, y) = (x, y)$



Ovvero:
$$\begin{cases} dQ^{(1)}/dt = Q^{(1)} \\ dQ^{(2)}/dt = Q^{(2)} \\ Q^{(1)}(0) = x \\ Q^{(2)}(0) = y \end{cases} \quad \text{che riscriviamo, per semplicità notazionale, così:} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ x(0) = a \\ y(0) = b \end{cases} .$$

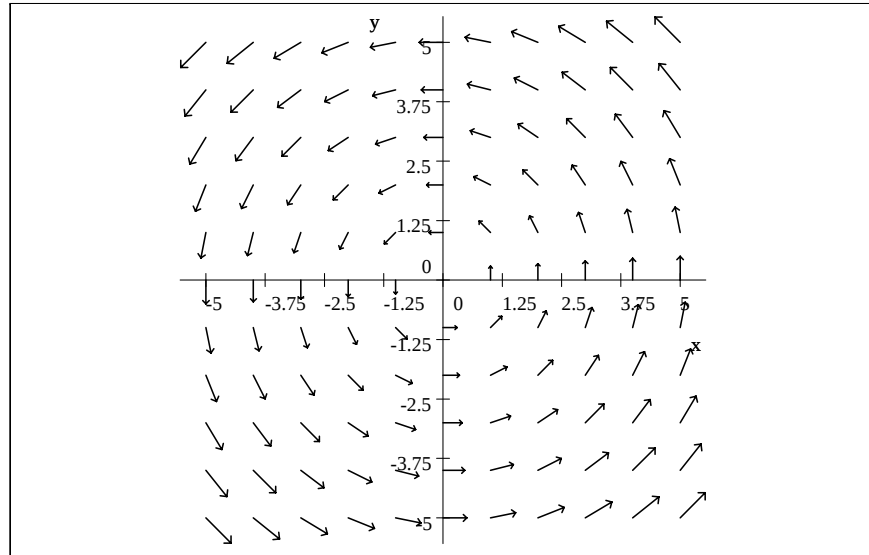
La soluzione è:

$$\begin{cases} y(t) = e^t b \\ x(t) = e^t a \end{cases}$$

dove ora il gruppo è indicato da : $\varphi_t(x(0), y(0)) = (x(t), y(t))$. Questa formula si usa scrivere anche:

$$\varphi_t(x, y) = (x(t), y(t)) = (e^t x, e^t y)$$

- $v(x, y) = (-y, x)$



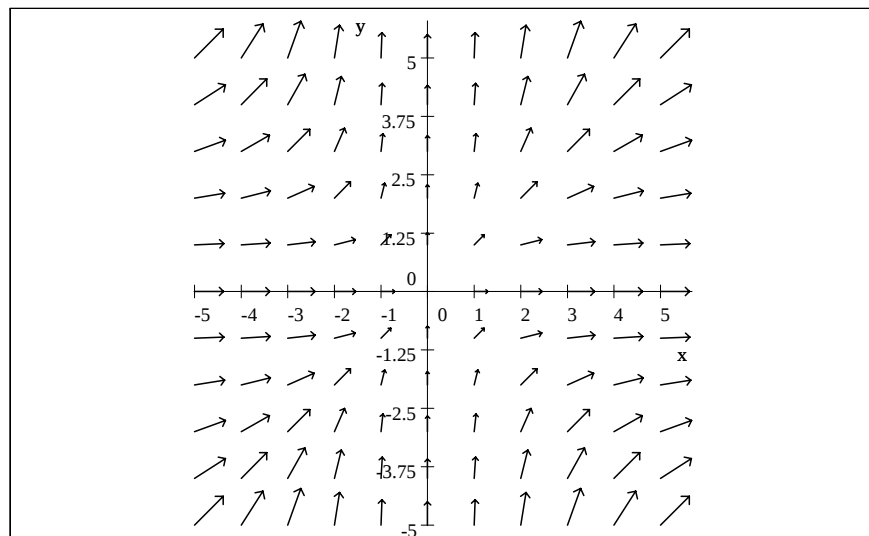
Il sistema si scrive:
$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ x(0) = a \\ y(0) = b \end{cases} \quad \text{La soluzione è: } \begin{cases} y(t) = (\cos t)b + (\sin t)a \\ x(t) = -(\sin t)b + (\cos t)a \end{cases}$$

In altri termini:

$$\begin{aligned} \varphi_t(x, y) &= (x(t), y(t)) = (-(\sin t)y + (\cos t)x, (\cos t)y + (\sin t)x) \\ \varphi_t &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

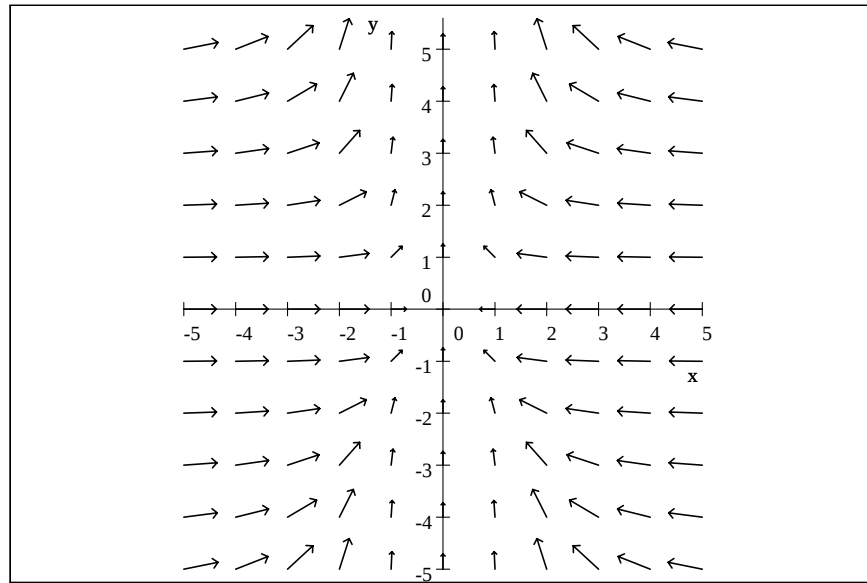
che rappresenta una rotazione antioraria di angolo t .

- $v(x, y) = (x^2, y^2)$



Il sistema è $\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = y^2 \\ x(0) = a \\ y(0) = b \end{cases}$ con soluzione: $x(t) = -\frac{1}{t-\frac{1}{a}}, y(t) = -\frac{1}{t-\frac{1}{b}}$

• $v(x, y) = (-x^3, y^2)$



Il sistema è: $\begin{cases} x' = -x^3 \\ x(0) = a \\ y' = y^2 \\ y(0) = b \end{cases}$; con soluzioni : $y(t) = -\frac{1}{t-\frac{1}{b}}, x(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2t+\frac{1}{a^2}}}$

(attenzione, ci sono gruppi locali diversi nei due semipiani $x \geq 0$ e $x \leq 0$!).

Ricordiamo che le curve $x(t)$, con $x(0) = x_0$ sono tangenti in ogni punto al campo vettoriale e sono dette linee del campo oppure orbite del gruppo associato.

3 Algebra di Lie dei campi vettoriali.

Ritorniamo alla notazione dei campi vettoriali come operatori differenziali; siano $v(x) = \sum v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $u(x) = \sum u^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$ due campi vettoriali; se f è una funzione C^∞ , possiamo calcolare la seguente espressione, detta commutatore:

$$[v, u](f) = v(u(f)) - u(v(f))$$

Si ottiene, ricordando di applicare la commutatività delle derivate miste, la seguente formula:

$$[v, u](f) = \sum_{i,j} \left[v^i \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right] \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Si noti il risultato importantissimo: **il commutatore di due campi vettoriali è ancora un campo vettoriale** (le derivate seconde spariscono!) di componenti:

$$[v, u]^j = \sum_i \left[v^i \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right]$$

Si può verificare, attraverso alcuni conti diretti ed elementari ma abbastanza noiosi, che il commutatore rende i campi vettoriali un'algebra di Lie.

3.1 Gruppi a un parametro di rotazioni in $\mathbb{R}^3$.

Per questo esempio e per le definizioni e i concetti di carattere generale si consultino le dispense di Teoria dei Gruppi di Matrici.

Consideriamo le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E' facile verificare che la loro struttura di Algebra di Lie è data da:

$$[A_1, A_2] = A_3, [A_2, A_3] = A_1, [A_3, A_1] = A_2.$$

Posto:

$$R_i(t) = e^{tA_i},$$

si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & +\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \\ R_2(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \\ R_3(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e che gli $R_i = \{R_i(t), t \in \mathbb{R}\}$ sono sottogruppi **abeliani** di $SO(3)$. Le matrici R_i operano su $\mathbb{R}^3$ mediante il prodotto righe per colonne, come **rotazioni in senso antiorario** attorno,

rispettivamente, R_1 all'asse x , R_2 all'asse y , R_3 all'asse z . Si verifica subito che abbiamo tre gruppi ad un parametro di diffeomorfismi di $\mathbb{R}^3$, e che i campi vettoriali associati sono dati da:

$$\xi_i = \left. \frac{d\varphi_t^i(x, y, z)}{dt} \right|_{t=0} = A_i(x, y, z)$$

In altre parole,

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \\ \xi_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \\ \xi_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ritornando alla notazione dei campi vettoriali come operatori differenziali, si ottiene:

$$\xi_1 = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}, \xi_2 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \xi_3 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

I loro commutatori verificano:

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, [\xi_2, \xi_3] = \xi_1, [\xi_3, \xi_1] = \xi_2.$$

Si trova che l'algebra di Lie dei campi vettoriali ξ_i è isomorfa all'algebra di Lie di $SO(3)$.

3.2 Gruppi a un parametro di dilatazioni in $\mathbb{R}^3$.

Consideriamo le seguenti matrici:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E' facile verificare che la loro struttura di Algebra di Lie è data da:

$$[B_1, B_2] = 0, [B_2, B_3] = 0, [B_3, B_1] = 0.$$

Posto:

$$D_i(t) = e^{tB_i},$$

si verifica facilmente che:

$$D_1(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

e che i $D_i = \{D_i(t), t \in \mathbb{R}\}$ sono sottogruppi **abeliani** di $D^+(3, \mathbb{R})$, detto gruppo delle dilatazioni di $\mathbb{R}^3$. Le matrici dei D_i operano sui **vettori** di $\mathbb{R}^3$, rappresentati da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, mediante il prodotto righe per colonne, come **dilatazioni** rispettivamente, D_1 lungo l'asse x , D_2 lungo l'asse y , D_3 lungo l'asse z . Posto, come nell'esempio precedente :

$$\varphi_t^i(x, y, z) = D_i(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si verifica subito che abbiamo tre gruppi ad un parametro di diffeomorfismi di $\mathbb{R}^3$, e che i campi vettoriali associati sono dati da:

$$\delta_i = \left. \frac{d\varphi_t^i(x, y, z)}{dt} \right|_{t=0} = B_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

In altre parole,

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \delta_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \delta_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ritornando alla notazione dei campi vettoriali come operatori differenziali, si ottiene:

$$\delta_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \delta_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \delta_3 = z \frac{\partial}{\partial z}$$

I loro commutatori verificano:

$$[\delta_1, \delta_2] = 0, [\delta_2, \delta_3] = 0, [\delta_3, \delta_1] = 0.$$

Si trova che l'algebra di Lie dei campi vettoriali δ_i è banale e isomorfa all'algebra di Lie di $D^+(3, \mathbb{R})$.

3.3 Gruppi a un parametro di traslazioni in $\mathbb{R}^3$.

Questo esempio non si può realizzare con gruppi di matrici operanti su $\mathbb{R}^3$, perchè non stiamo considerando trasformazioni lineari (non lo facciamo ora, ma si potrebbe realizzare con matrici in $\mathbb{R}^4$).

Consideriamo il gruppo additivo $\mathbb{R}^3$ operante sui punti di $\mathbb{R}^3$ per traslazioni mediante la seguente definizione: (dove $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$).

$$\varphi_t(x, y, z) = (x + at, y + bt, z + ct)$$

In questa formula, φ_t trasla il punto (x, y, z) lungo la retta passante per (x, y, z) di direzione (a, b, c) . Si verifica subito che abbiamo un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di $\mathbb{R}^3$, e che il campo vettoriale associato è dato da:

$$\eta = \left. \frac{d\varphi_t^i(x, y, z)}{dt} \right|_{t=0} = (a, b, c)$$

In altre parole,

$$\eta = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}$$

Se consideriamo i sottogruppi di traslazioni lungo rette parallele agli assi coordinati, otteniamo i tre campi vettoriali:

$$\eta_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \eta_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \eta_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

I loro commutatori verificano:

$$[\eta_1, \eta_2] = 0, [\eta_2, \eta_3] = 0, [\eta_3, \eta_1] = 0.$$

Si trova che l'algebra di Lie dei campi vettoriali η_i è banale e isomorfa all'algebra di Lie del gruppo additivo $\mathbb{R}^3$.

4 Simmetrie e invarianza.

In questa sezione studiamo l'effetto dei gruppi ad un parametro di diffeomorfismi sulle funzioni e sui campi vettoriali. Iniziamo a studiare l'effetto di un diffeomorfismo fissato.

Caso delle funzioni a valori reali.

Se abbiamo un *diffeomorfismo* φ di U in U , $u \in U$, e un dato sistema di coordinate q (**punto di vista attivo**), sia $u' = \varphi(u)$, $q(u) \equiv q$, $q(u') \equiv q'$. La funzione f si trasforma nella funzione $f'(u) = f(\varphi(u))$. Cioè passiamo da una funzione valutata in u' a una funzione valutata in u . La trasformazione di funzioni va in senso opposto al diffeomorfismo. Abbiamo, nelle coordinate q :

$$f'(q) = f(q')$$

La f è detta *invariante* se

$$f'(q) = f(q') = f(q)$$

Cioè se le due funzioni f e f' coincidono in ogni punto di U .

Esempio in $\mathbb{R}^2$: $q \equiv (x, y)$ e $q' \equiv (x' = 2x, y' = 2y)$ e le funzioni $f(x, y) = xy$ e $g(x, y) = x/y$. La f non è invariante secondo il punto di vista attivo: $f'(x, y) = f(2x, 2y) = 4xy$, mentre la g lo è, perchè $g'(x, y) = g(2x, 2y) = x/y = g(x, y)$.

Caso dei campi vettoriali.

Secondo il punto di vista *attivo*, un vettore in u è trasformato in un vettore in u' in modo che, per ogni funzione, valga l'uguaglianza numerica: $v'(f)|_{u'} = v(f')|_u$. La trasformazione di vettori va nello stesso senso del diffeomorfismo. In coordinate il valore del campo vettoriale v nel punto q si scrive $v|_q = \sum_{i=1}^n g(q^i) \frac{\partial}{\partial q^i}$. Se poniamo, omettendo sia gli indici, sia la somma sugli indici ripetuti, $v'|_{q'} = h(q') \frac{\partial}{\partial q'}$, (il valore del campo vettoriale v' nel punto q') l'uguaglianza numerica $v'(f)|_{u'} = v(f')|_u$ diventa:

$$h(q') \frac{\partial f}{\partial q'} = g(q) \frac{\partial f'}{\partial q} = g(q) \frac{\partial f}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial q}$$

Troviamo quindi:

$$h(q') = g(q) \frac{\partial q'}{\partial q}$$

Questa formula può essere interpretata (scambiando il ruolo di q e q' , cosa lecita perchè il diffeomorfismo è invertibile) nel senso che il diffeomorfismo φ trasforma il **campo vettoriale** v nel **campo vettoriale** v' :

$$v = g(q) \frac{\partial}{\partial q} \rightarrow v' = h(q) \frac{\partial}{\partial q} = g(q') \frac{\partial q}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial q} = g'(q) \frac{\partial q}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial q}$$

Si ricava quindi:

$$h(q) = g'(q) \frac{\partial q}{\partial q'}$$

Il campo è detto *invariante* se

$$g(q) = h(q)$$

ovvero:

$$g'(q) = g(q') = g(q) \frac{\partial q'}{\partial q}$$

Cioè se $v' = v$ in ogni punto.

Esempio in $\mathbb{R}^2$: $q \equiv (x, y)$ e $q' \equiv (x' = 2x, y' = 2y)$. Consideriamo il campo vettoriale $v = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$, abbiamo subito $g(x, y) = (x, y)$ e $h(x, y) = (2x, 2y) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (x, y) = g(x, y)$ e quindi il campo è invariante.

4.1 Funzioni invarianti e Integrali primi del campo.

Un *gruppo a un parametro di diffeomorfismi* in un aperto di $\mathbb{R}^n$ con coordinate q sarà, in meccanica, indicato con $q(\alpha)$ e un campo vettoriale sarà indicato con $f(q)$ omettendo gli indici, la base e la eventuale dipendenza dal tempo dovuta al moto.

Il *campo vettoriale associato* è $\left[\frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = f(q)$. Da questa formula e dalle proprietà di $q(\alpha)$ si ottiene: $\frac{dq(\alpha)}{d\alpha} = f(q(\alpha))$; questo è il sistema di equazioni differenziali che, con la condizione iniziale $q(0) = q$, dà il gruppo a un parametro noto il campo vettoriale $f(q)$.

Una funzione $F(q)$ è **invariante sotto il gruppo** $q(\alpha)$ se tutti i diffeomorfismi la lasciano invariata: $F(q(\alpha)) = F(q)$ cioè, in particolare:

$$\left. \frac{dF}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial F}{\partial q} \left. \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

Si noti che le proprietà di gruppo implicano che $\left[\frac{dF}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow \frac{dF}{d\alpha} = 0$.

Se si indica con $\xi = f(q)\partial/\partial q$ il campo vettoriale associato (ora indichiamo anche la base e non solo le componenti) si ottiene allora che $F(q)$ è *invariante* se: $\xi(F) = 0$. Infatti:

$$\xi(F) = f(q)\partial F/\partial q = \left. \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

In questo contesto, l'operazione indicata si chiama **derivata di Lie di F rispetto a ξ** . Una funzione F invariante sotto un gruppo di diffeomorfismi è detta anche *integrale primo* del campo vettoriale associato al gruppo. Il campo ξ risulta allora tangente alle superfici $F(q) = c$, per ogni valore della costante c : basta infatti osservare che la F non varia nella direzione di ξ . *L'esistenza di una tale F permette di ridurre di uno il numero delle equazioni da integrare per determinare le curve integrali del campo.*

Esempio. La funzione $F(x, y) = x^2 + y^2$ verifica banalmente la relazione:

$$\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 + y^2) = 0$$

Le curve integrali del campo vettoriale sono determinate dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \\ x(0) = x \\ y(0) = y \end{cases},$$

di due equazioni. L'esistenza di F permette però di concludere subito che:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = x^2 + y^2$$

E quindi trovata la $x(t)$, la $y(t)$ risulta determinata algebricamente senza alcuna integrazione.

4.2 Campi invarianti e derivata di Lie.

Un campo vettoriale $g(q)$ è *invariante sotto un gruppo* $q(\alpha)$ se tutti i diffeomorfismi del gruppo lo lasciano invariato:

$$g(q(\alpha)) = g(q) \frac{\partial q(\alpha)}{\partial q}$$

Ovvero, in altri termini:

$$g(q) \frac{\partial}{\partial q} = g(q(\alpha)) \frac{\partial}{\partial q(\alpha)}$$

E quindi:

$$g(q(\alpha)) \left(\frac{\partial q(\alpha)}{\partial \alpha} \right)^{-1} = g(q)$$

Esempio in $\mathbb{R}^2$: Consideriamo il campo vettoriale $v = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ e il gruppo di diffeomorfismi dato da:

$$x(\alpha) = \frac{x}{1 - x\alpha}, y(\alpha) = \frac{y}{1 - y\alpha}$$

E' facile verificare che il campo assegnato è invariante:

$$(x(\alpha)^2, y(\alpha)^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\partial y(\alpha)}{\partial \alpha} \end{pmatrix}^{-1} = (x^2, y^2)$$

Se si indica ancora con $\xi = f(q)\partial/\partial q$ il campo vettoriale associato al gruppo di diffeomorfismi (ora indichiamo anche la base e non solo le componenti) si ottiene allora che v è *invariante* se: $[\xi, v] = 0$. Infatti:

$$[\xi, v] = f \frac{\partial g}{\partial q} - g \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=0} \frac{\partial g(q)}{\partial q} - g(q) \frac{\partial}{\partial q} \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=0}$$

Osservando che $\frac{\partial^2}{\partial q \partial \alpha} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial q}$ si ottiene:

$$\frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=0} \frac{\partial g(q)}{\partial q} = \frac{dg(q(\alpha))}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} g(q) \frac{\partial q(\alpha)}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} = g(q) \frac{\partial}{\partial q} \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=0}$$

E quindi il risultato voluto.

In questo contesto, l'operazione indicata si chiama ancora **derivata di Lie di v rispetto a ξ** . Osserviamo che, essendo la parentesi di Lie antisimmetrica, $[v, v] = 0$ e quindi ogni campo vettoriale è invariante per il gruppo di diffeomorfismi generato da sè stesso!

5 Elementi di calcolo delle variazioni.

Sia $L(x, v, t)$ una funzione a valori reali di un punto x , di un vettore v nel punto x e di un parametro reale t . La L è presa differenziabile rispetto a tutti i suoi argomenti quando $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ varia in un aperto U , $v(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))$ è un campo vettoriale in U e t varia in un intervallo aperto (a, b) . Una tale funzione è usualmente detta *Lagrangiana*. Consideriamo una coppia fissata di punti, $P, Q \in U$ e l'insieme:

$$\Gamma(P, Q) = \{\gamma : x^i = x^i(t), t \in (a, b) \text{ con } x(a) = P \text{ e } x(b) = Q\}$$

delle curve differenziabili che li congiungono. Consideriamo l'integrale (che esiste sempre per le proprietà di L) :

$$S(\gamma) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

Il numero reale $S(\gamma)$ è detto *azione* della curva γ . Il problema tipico del *calcolo delle variazioni* è il seguente: **trovare (quando esiste!) la curva γ per cui $S(\gamma)$ è minimo.**

5.1 Equazioni di Eulero-Lagrange.

La risposta al quesito posto sopra è la seguente: se $\gamma(t)$ è la curva che rende minima $S(\gamma)$, allora γ verifica, in ognuno dei suoi punti, il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine (dette equazioni di Eulero-Lagrange):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

dove si intende: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial v^i} \Big|_{v=\dot{x}}$. In altre parole: prima si risolve il sistema di equazioni scritto sopra e poi si verifica che la soluzione rende minima l'azione.

Dimostrazione: se la quantità $S(\gamma)$ è minima, allora per ogni curva $\delta(t)$ tale che $\delta(a) = \delta(b) = 0$, (queste condizioni sono necessarie per preservare i punti P e Q) si ha:

$$\frac{d}{d\epsilon} S(\gamma + \epsilon\delta) \Big|_{\epsilon=0} = 0$$

Sviluppando l'espressione della derivata si ottiene:

$$\frac{d}{d\epsilon} \int_a^b L(x(t) + \epsilon\delta(t), \dot{x}(t) + \epsilon\dot{\delta}(t), t) dt \Big|_{\epsilon=0} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{\delta}_i(t) \right] dt = 0$$

Integrando per parti abbiamo: (passiamo ora alla notazione senza indici e sommatorie)

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\delta}(t) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta(t) \Big|_a^b - \int_a^b \delta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt$$

Ricordando che $\delta(a) = \delta(b) = 0$, otteniamo, finalmente:

$$\frac{d}{d\epsilon} S(\gamma + \epsilon\delta) \Big|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta(t) dt = 0$$

Questa espressione deve essere soddisfatta per ogni funzione $\delta(t)$ che si annulla alle estremità, e quindi otteniamo che l'integrando deve annullarsi per ogni t . $\square$

Le curve soluzioni delle equazioni di E-L sono dette **estremali** della funzione d'azione S . Non è detto, in generale, che siano minimi. Lo sono sempre invece per le Lagrangiane che considereremo in questo corso. Le curve estremali rendono l'azione **stazionaria**:

$$\frac{d}{d\epsilon} S(\gamma + \epsilon\delta) \Big|_{\epsilon=0} = 0.$$

Esempio 1: $S(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ è la lunghezza dell'arco di curva che collega i punti $P = (0, 0)$ e $Q = (1, 1)$. Le equazioni di E-L sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0 \end{aligned}$$

La soluzione (*la curva parametrizzata*) è:

$$x(t) = t, y(t) = t$$

L'orbita, cioè l'insieme di punti $\{x(t), y(t) \mid 0 \leq t < \infty\}$, è la retta $x = y$, che risulta quindi la curva più corta tra P e Q .

Esempio 2: $S(\gamma) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \right) dt$ è il valore medio della differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale di una particella di massa m che si muove lungo l'asse x attratta verso il punto $x = 0$ da una molla di costante elastica $k/2$. Supponiamo che il moto si svolga, nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 1$, dal punto $P = x(0) = 0$ al punto $Q = x(1) = \sin \sqrt{\frac{k}{m}}$. L'equazione di E-L è:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m \ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

La soluzione è $x(t) = \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$. Si trova che la *legge oraria* che rende *stazionaria* l'azione è proprio quella che si ottiene integrando l'equazione di Newton. Si potrebbe mostrare che, in realtà, la curva estrema rende l'azione minima. *L'orbita* del moto, cioè l'insieme di punti $\{x(t) \mid 0 \leq t < \infty\}$, è il segmento $[-1, 1]$.

Osservazione: usualmente le equazioni di Newton, essendo del secondo ordine, si integrano con due condizioni iniziali (posizione e velocità iniziali, $x(0)$ e $\dot{x}(0)$) e non due condizioni al contorno ($x(0)$ e $x(1)$). Possiamo però ragionare così: la soluzione trovata fornisce $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e, come deve essere, se risolviamo l'equazione di Newton con le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}$, otteniamo proprio $x(1) = \sin \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Esempio 3: $S(\gamma) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2} (x^2 + y^2) \right] dt$ è il valore medio della differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale di una particella di massa m che si muove nel piano x, y attratta verso il punto $(0, 0)$ da una molla di costante elastica $k/2$. Supponiamo ora che il moto si svolga, nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 1$, tra i due punti $P = (1, 1)$ e $Q = \left(\sin \sqrt{\frac{k}{m}} + \cos \sqrt{\frac{k}{m}}, -\sin \sqrt{\frac{k}{m}} + \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$. Le equazioni di E-L sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= m \ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= m \ddot{y}(t) + ky(t) = 0 \end{aligned}$$

La soluzione (*la legge oraria o traiettoria*) è:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \\ y(t) &= \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t - \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \end{aligned}$$

L'orbita del moto, cioè l'insieme di punti $\{x(t), y(t) \mid 0 \leq t < \infty\}$, è la circonferenza $x^2 + y^2 = 2$.

5.2 Il Principio di (minima) Azione.

Gli ultimi due esempi della sezione precedente mostrano che le equazioni di E-L sono equivalenti alle equazioni del moto di Newton, se si sceglie opportunamente la Lagrangiana. Nel caso della meccanica degli insiemi di N particelle in $\mathbb{R}^3$ sottoposte a forze conservative, se come Lagrangiana si prende la differenza tra l'energia cinetica T e l'energia potenziale U , il moto si può determinare ricorrendo al principio di azione: *tra le infinite curve differenziabili congiungenti due punti dati, il moto fisico si svolge lungo una curva estrema della azione (in realtà lungo minimi dell'azione)*. Basta infatti calcolare:

$$L = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{2} m_i \dot{v}_i^2 - U(x_1, y_1, z_1, \dots) = \frac{1}{2} v m v^t - U(x)$$

dove $x = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, $v = \dot{x}$ è la velocità in $\mathbb{R}^{3N}$ e m la matrice di massa

$$m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_N \end{pmatrix}$$

(vedi anche più sotto). Quindi, essendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \ddot{x}^t \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = F \end{aligned}$$

si vede subito che le equazioni di E-L sono equivalenti a quelle di Newton:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff m \ddot{x}^t = F.$$

Questa equivalenza è molto di più di un semplice cambio di descrizione; quasi tutte le teorie fisiche interessanti ammettono una descrizione Lagrangiana e il passaggio al formalismo Lagrangiano consente uno studio molto più approfondito delle proprietà della teoria e del moto (vedi, ad esempio, più sotto, il teorema di Noether).

6 Vincoli e Moti vincolati.

Studiamo in questo capitolo il moto vincolato, limitandoci al caso più semplice, quello dei vincoli *olonomi, fissi, bilateri, regolari, e lisci*.

6.1 Superficie di vincolo.

Consideriamo, come al solito, il moto di N punti materiali in $\mathbb{R}^3$, tale moto può essere considerato come una curva in $\mathbb{R}^n$ con $n = 3N$. Un vincolo **olonomo, fisso e bilatero** è un sistema di $M < 3N$ equazioni della forma:

$$G_k(x) = 0, k = 1 \dots M$$

dove le funzioni $G_k : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ sono differenziabili in un aperto e abbiamo indicato, come al solito:

$$x \equiv (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) \equiv \{x_{i(l)}\} \equiv \{x_j\}; i = 1, 2, 3, l = 1 \dots N, j = 1 \dots 3N$$

Il vincolo è anche **regolare** quando gli M campi vettoriali $\nabla G_m(x)$ (attenzione, il gradiente è preso in $\mathbb{R}^{3N}$) sono diversi da zero e indipendenti in ogni punto di un aperto di $\mathbb{R}^{3N}$. In questo caso, considerata la funzione $f : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^M$ data da:

$$f(x) = (G_1(x), G_2(x), \dots, G_M(x)),$$

il suo differenziale Df risulta una matrice a M righe e $3N$ colonne i cui elementi sono:

$$(Df)_{mj} = \frac{\partial G_m(x)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \nabla G_1(x) \\ \dots \\ \nabla G_M(x) \end{pmatrix}$$

La condizione di regolarità implica che Df abbia rango M (il massimo possibile), infatti le sue righe sono proprio i gradienti. Un importante teorema di analisi, (*il teorema del rango massimo*) ci assicura in questo caso che l'insieme:

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^{3N} \mid f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^{3N}$$

è una superficie regolare di dimensione $3N - M$, detta **superficie di vincolo**.

Esempio 1: $M, N = 1$. Consideriamo la sfera bidimensionale $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Posto $G_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ si trova subito che $\nabla G_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Questo campo vettoriale è diverso da zero per $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ e quindi l'insieme degli zeri della funzione $G_1(x, y, z)$, cioè la sfera S^2 , risulta essere una superficie regolare di dimensione $3 - 1 = 2$.

Esempio 2: $M = 4, N = 2$. Consideriamo due particelle in $\mathbb{R}^3$ vincolate, sul piano $z = 0$, alla parabola di equazione $y = x^2$. Siano x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2 le coordinate in $\mathbb{R}^6$. Il vincolo è dato dalle equazioni:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= z_1 = 0 \\ G_2(x) &= z_2 = 0 \\ G_3(x) &= y_1 - x_1^2 = 0 \\ G_4(x) &= y_2 - x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

La funzione f è data da:

$$f(x) = (z_1, z_2, y_1 - x_1^2, y_2 - x_2^2)$$

Il differenziale è dato da:

$$Df = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango massimo, cioè 4, in tutto $\mathbb{R}^6$. Ne consegue che la superficie di vincolo è regolare e ha dimensione $6 - 4 = 2$.

6.2 Reazioni vincolari e Equazioni del moto.

Il vincolo è schematizzabile, dal punto di vista fisico-matematico, con una forza $\vec{F}_{(k)}^V$ (detta **reazione vincolare**) agente sulla k -esima particella. Se sulla particella agiscono anche delle forze esterne $\vec{F}_{(k)}$, le equazioni del moto della k -esima particella si scrivono:

$$m_{(k)}\ddot{x}_{(k)i} = F_{(k)i} + F_{(k)i}^V; \quad i = 1, 2, 3; k = 1 \dots N.$$

Passando alla notazione più compatta (cioè in $\mathbb{R}^{3N}$, e scrivendo ora le x in colonna per evitare la trasposizione):

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}) + F^V(x, \dot{x})$$

In questa equazione m è ancora la matrice di massa:

$$m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_N \end{pmatrix}$$

La soluzione $x(t)$ delle equazioni di moto deve sempre soddisfare il vincolo, cioè $G_m(x(t)) = 0 \quad \forall t$ per cui la soluzione esiste, date condizioni iniziali $x(0)$ e $\dot{x}(0)$ *compatibili col vincolo*, cioè tali per cui:

$$G_m(x(0)) = 0 \text{ e } \left. \frac{dG_m(x(t))}{dt} \right|_{t=0} = \nabla G_m(x(t)) \cdot \dot{x}(t)|_{t=0} = 0.$$

Le incognite del problema sono le $6N$ funzioni $x(t)$ e $F^V(t) = F^V(x(t), \dot{x}(t))$ (sono infatti due campi vettoriali in $\mathbb{R}^{3N}$ e quindi in tutto hanno $6N$ componenti), mentre le equazioni sono le $3N$ equazioni di Newton e le M equazioni che definiscono il vincolo.

Osservazione importante: Il problema del moto vincolato così come è stato sin qui descritto, non è formulato correttamente, perchè non ammette una unica soluzione (date le condizioni iniziali), come invece imporrebbe il determinismo della fisica classica (le incognite sono in numero superiore alle equazioni).

6.3 Teorema di Lagrange-d'Alembert.

Abbiamo visto che *mancano* $3N - M$ equazioni. Le equazioni mancanti sono le cosiddette **condizioni di d'Alembert**, valide nel caso di vincoli olonomi, fissi, bilateri, regolari e **lisci** (cioè privi di attrito):

$$\left(F^V \cdot \xi^{(h)} \right)_{\mathbb{R}^{3N}} = 0; h = 1 \dots 3N - M$$

Nella formula precedente, la parentesi denota il prodotto scalare in $\mathbb{R}^{3N}$, mentre gli $\xi^{(h)}$ sono $3N - M$ campi vettoriali che formano una base dello spazio tangente alla superficie di vincolo. Esistono, e sono proprio $3N - M$, perchè il vincolo è olonomo, fisso, bilatero e regolare. **In altre parole, con un vincolo liscio, la reazione vincolare è ortogonale (in $\mathbb{R}^{3N}$) alla superficie di vincolo.** Nel caso di una sola particella l'ortogonalità è nello spazio fisico $\mathbb{R}^3$.

Esempio: studiamo il moto *libero da forze esterne* di una particella di massa m in $\mathbb{R}^3$ vincolata, nel piano $z = 0$, alla circonferenza liscia $x^2 + y^2 = 1$. Prendiamo le condizioni iniziali (compatibili con il vincolo)

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, y(0) = 0, z(0) = 0, \\ \dot{x}(0) &= 0, \dot{y}(0) = a, \dot{z}(0) = 0. \end{aligned}$$

Convienne passare alle coordinate polari per cui i punti della circonferenza sono parametrizzati da: $x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 0$. Non è necessario integrare le equazioni di Newton, perchè la legge di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2) = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ma^2,$$

fornisce subito la soluzione delle equazioni di moto: $\theta(t) = at$ e quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos at, \\ y(t) &= \sin at, \\ z(t) &= 0. \end{aligned}$$

A questo punto, se sostituiamo la soluzione nelle equazioni di Newton, abbiamo le reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{Vx} = -mx(t) \\ m\ddot{y} &= F_{Vy} = -my(t) \\ m\ddot{z} &= F_{Vz} = 0 \end{aligned}$$

La reazione vincolare $\vec{F}_V = -m(x, y, 0)$ risulta ortogonale al vincolo, (ricordiamo che il campo tangente alla circonferenza è $\vec{\xi} = (-y, x, 0)$), e diretta verso il centro. In fisica si chiama *forza centripeta* e rappresenta la forza che il vincolo deve esercitare per bilanciare la forza centrifuga prodotta dal moto circolare. Per intenderci è la stessa forza che esercita il filo a cui abbiamo attaccato la pietra che facciamo ruotare.

- Il risultato principale della teoria su esposta è il **teorema di Lagrange-d'Alembert**: *per forze conservative e vincoli olonomi, fissi, bilateri, regolari e lisci, le equazioni di moto (cioè le equazioni di Newton con la condizione di d'Alembert) sono equivalenti alle equazioni di Eulero-Lagrange per la¹ Lagrangiana L' che si ottiene restringendo localmente alla superficie di vincolo la Lagrangiana del sistema non vincolato L . In altre parole, se la superficie di vincolo è data localmente dalle equazioni parametriche $x = x(q)$, si ha:*

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(x(q), \dot{x}(q), t)$$

Inoltre le reazioni vincolari si possono ottenere dalla formula:

$$F_V(t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{x=x(q(t))}$$

dove $q(t)$ è la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange della Lagrangiana L' .

Esempio: riprendiamo l'esempio elementare visto più sopra della circonferenza parametrizzata da $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$. Si ha:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ L' &= \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Le equazioni di E-L sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} m \dot{\theta} = 0$$

La soluzione è $\theta = at$ e la reazione vincolare è data da:

$$\begin{aligned} F_{V_x} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{x=\cos at} = \frac{d}{dt} m \dot{x} = -m x(t) \\ F_{V_y} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} \Big|_{y=\sin at} = \frac{d}{dt} m \dot{y} = -m y(t) \end{aligned}$$

Cenno di dimostrazione del teorema di Lagrange-d'Alembert: dimostriamo prima che se una curva² γ sulla superficie di vincolo è un estremo della Lagrangiana vincolata, cioè verifica le equazioni di E-L per la Lagrangiana vincolata, allora è soddisfatta (oltre ovviamente le equazioni di Newton) anche la condizione di d'Alembert. Poniamoci nell'aperto in cui la superficie di vincolo è data localmente dalle equazioni parametriche $x = x(q)$, e sia $q(t)$ la rappresentazione nelle coordinate q della curva γ . Sia $h(t)$ un'altra curva sulla superficie di vincolo (con $h(a) = h(b) = 0$). Poniamo:

$$\delta(h)(t) = x(q(t) + \epsilon h(t)) - x(q(t)) = \sum \epsilon \frac{\partial x(q)}{\partial q^i} h^i(t) + O(\epsilon^2); \text{ dove } i = 1 \dots 3N - M$$

¹In realtà, essendo i parametri q definiti solo localmente, sulla superficie di vincolo possono benissimo essere definite tante differenti restrizioni L' di L .

²Assumiamo qui che la curva di cui parliamo sia tutta contenuta nell'aperto sulla superficie di vincolo parametrizzato dalle coordinate q . Se non fosse così il teorema sarebbe ancora valido ma con un enunciato e una dimostrazione più complicati.

I $3N - M$ campi vettoriali in $\mathbb{R}^{3N}$ definiti da $\eta_{(i)} = \frac{\partial x(q)}{\partial q^i}$ appartengono al piano tangente alla superficie di vincolo, perchè sono ortogonali all'iperpiano normale alla superficie (cioè ortogonali ai gradienti delle funzioni che definiscono il vincolo): se

$$f(x(q)) = (G_1(x(q)), G_2(x(q)), \dots, G_M(x(q))) = 0$$

è l'equazione parametrica della superficie di vincolo segue subito che, $\forall i$,

$$\frac{\partial f(x(q))}{\partial q^i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{\partial x(q)}{\partial q^i} = \begin{pmatrix} \nabla G_1(x) \cdot \eta_{(i)} \\ \vdots \\ \nabla G_M(x) \cdot \eta_{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ne consegue che, $\forall t$, $\delta(h)(t)$ appartiene al piano tangente alla superficie di vincolo, e quindi si può porre:

$$\delta(h)(t) = \sum \epsilon \frac{\partial x(q)}{\partial q^i} h^i(t) = \epsilon \xi(t)$$

con $\xi(t) = \sum \frac{\partial x(q)}{\partial q^i} h^i(t) \in$ piano tangente alla superficie di vincolo. Possiamo ora concludere, calcolando come nel paragrafo sul calcolo delle variazioni:

$$\frac{d}{d\epsilon} \int_a^b L[x(q(t) + \epsilon h(t)), \dot{x}(q(t) + \epsilon h(t)), t] dt \Big|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \cdot \xi(t) \right)_{\mathbb{R}^{3N}} dt$$

Questa ultima espressione, se la curva $q(t)$ è un estrema per la Lagrangiana vincolata, si deve annullare. Se deve essere nulla per ogni $\xi(t) \in$ piano tangente alla superficie di vincolo, significa che l'integrando deve annullarsi per ogni t , il che fornisce proprio le condizioni di ortogonalità di d'Alembert, dopo aver posto:

$$F_V = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{x=x(q(t))}$$

Tale posizione rende soddisfatte anche le equazioni di Newton, infatti basta ricordare che, per le Lagrangiane senza vincoli:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \frac{\partial L}{\partial x} = F.$$

Gli stessi conti possono chiaramente essere ripetuti a ritroso per mostrare che Newton+d'Alembert $\Rightarrow$ E-L per la Lagrangiana vincolata. $\square$

7 Simmetrie e Integrali del moto.

Affrontiamo in questa sezione lo studio delle relazioni tra le simmetrie di una Lagrangiana e l'esistenza di integrali del moto. Il risultato principale è il teorema di Noether; questo teorema e le sue numerose generalizzazioni costituiscono uno dei risultati più importanti e generali di tutta la fisica teorica moderna.

7.1 Invarianza di una Lagrangiana.

Una Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ è detta *invariante* sotto un gruppo a un parametro $q(\alpha)$ se $L(q, \dot{q}, t) = L(q(\alpha), \dot{q}(\alpha), t)$. In particolare otteniamo:

$$\left. \frac{dL}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

dove:

$$\left. \frac{d\dot{q}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d}{dt} \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} f(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q} \dot{q}$$

In altri termini, se consideriamo il campo vettoriale di componenti $\hat{f}(q, \eta) = (f(q), \frac{\partial f(q)}{\partial q} \eta)$, (dove, come al solito, $f(q) = \left. \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$) definito in un aperto nello spazio posizione-velocità (q, η) , il suo gruppo a un parametro associato è dato da:

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\alpha} = f(q) \\ \frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{\partial f(q)}{\partial q} \eta \\ q(0) = q \\ \eta(0) = \dot{q} \end{cases}$$

L'invarianza della Lagrangiana è quindi ricondotta al caso della derivata di Lie: $\hat{\xi}(L) = 0$, Dove $\hat{\xi} = f(q)\partial/\partial q + \frac{\partial f(q)}{\partial q} \eta \partial/\partial \eta$. Infatti si trova che:

$$0 = \left. \frac{dL}{d\alpha} \right|_{\alpha=0, \dot{q}=\eta} = \hat{\xi}(L)$$

Osserviamo che anche in questo caso le proprietà di gruppo implicano che:

$$\left. \frac{dL}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow \frac{dL}{d\alpha} = 0$$

Esempi di ricerca di una simmetria.

- $L(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{4q^2}$: L'incognita del problema è $q(\alpha)$, con $q(0) = q$, mentre le variabili in gioco sono q, t e α : a seconda dei casi se ne privilegia una. Si può imporre l'invarianza come uguaglianza numerica di funzioni: $L(q, \dot{q}) = L(q(\alpha), \dot{q}(\alpha))$. Esplicitamente si ha: $\frac{\dot{q}^2}{4q^2} = \frac{\dot{q}(\alpha)^2}{4q(\alpha)^2}$ cioè $\frac{dq}{q} = \pm \frac{dq(\alpha)}{q(\alpha)}$. Integrando e imponendo la condizione $q(0) = q$, scartando la soluzione banale $q(\alpha) = q$, si ottiene $q(\alpha) = qe^{\pm\alpha}$.
- $L(q, \dot{q}) = q\dot{q}^2$. Imponendo l'uguaglianza si ha: $q\dot{q}^2 = q(\alpha)\dot{q}(\alpha)^2$. Cioè $\sqrt{q}dq = \sqrt{q(\alpha)}dq(\alpha)$ che integrata dà $\frac{2}{3}(\sqrt{q})^3 + \alpha = \frac{2}{3}(\sqrt{q(\alpha)})^3$ cioè $q(\alpha) = \left(q^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\alpha\right)^{\frac{2}{3}}$
- $L = \frac{1}{4}(q_1 + q_2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$ si trova a vista il gruppo $q_1(\alpha) = q_1 + \alpha, q_2(\alpha) = q_2 - \alpha$
- $L = \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$ si trova a vista il gruppo $(q_1(\alpha), q_2(\alpha)) = (q_1, q_2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

7.2 Integrali primi del moto e momenti.

Una funzione $F(q, \dot{q})$ è detta **integrale primo del moto (o costante del moto)** se:

$$\frac{dF(q(t), \dot{q}(t))}{dt} = 0$$

quando $q(t)$ rappresenta un moto. L'importanza delle costanti del moto risulterà in tutta la sua evidenza solo dopo aver studiato il teorema di Noether; accenniamo qui semplicemente ad un esempio. Consideriamo la Lagrangiana $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$; consideriamo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}$. E' noto che l'energia $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$ si conserva durante il moto, e quindi è una costante del moto. L'equazione che ne deriva:

$$E(t) = E(x(t), \dot{x}(t)) = E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(0) + \frac{k}{2}x^2(0) = \frac{k}{2}$$

è una equazione differenziale del primo ordine $\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{k}{2}x^2)}$ (il segno si determina in base al segno di $\dot{x}(0)$, e quindi nel nostro caso si deve prendere il +), integrabile immediatamente per quadrature:

$$t(x) = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin x$$

che, invertita, da:

$$x(t) = \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

La soluzione soddisfa anche l'equazione di Lagrange (che è del secondo ordine). L'esempio è generalizzabile facilmente (noi lo approfondiremo in un'altra sezione) a tutte le Lagrangiane indipendenti dal tempo e dipendenti da una sola variabile di posizione (moto a una dimensione). Limitiamo ora le nostre considerazioni a **Lagrangiane quadratiche nelle velocità e indipendenti esplicitamente dal tempo**. Le costanti del moto che dipendono **linearmente** dalle $\dot{q}$ (e non quadraticamente come l'energia) sono dette **momenti**. Sia $L(q, \dot{q})$ una tale Lagrangiana e $\xi(q)$ un campo vettoriale. Si definisce **momento** della Lagrangiana rispetto al campo vettoriale la funzione:

$$\pi_\xi^L(q, \dot{q}) = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \xi^i(q)$$

Questa funzione dipende solo dal campo vettoriale e dalla Lagrangiana e risulta definita in modo indipendente dalle coordinate scelte. Infatti se q' è un altro sistema di coordinate, e $J = \frac{\partial q'}{\partial q}$ è la matrice jacobiana della trasformazione, essendo $\dot{q}' = J\dot{q}$ e $\xi' = \xi J$, si ottiene:

$$\xi' \frac{\partial}{\partial \dot{q}'} = \xi' \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} = \xi J J^{-1} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} = \xi \frac{\partial}{\partial \dot{q}}$$

Applichiamo ora la definizione di momento ad alcuni importanti casi particolari.

- **Quantità di moto** : $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$; sia $\eta = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$ (con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$) il campo vettoriale associato al gruppo ad un parametro delle **traslazioni** nella direzione $\vec{\tau} = (a, b, c)$. Si ottiene

$$\pi_{\eta}^L = am\dot{x} + bm\dot{y} + cm\dot{z} = \vec{\tau} \cdot \vec{p}$$

Riconosciamo nella formula precedente la componente lungo la direzione (a, b, c) del vettore **quantità di moto** $\vec{p} = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z})$. Otteniamo quindi (vedi sezione 3.3):

$$\pi_{\eta_1}^L = m\dot{x} = \vec{p}_x, \pi_{\eta_2}^L = m\dot{y} = \vec{p}_y, \pi_{\eta_3}^L = m\dot{z} = \vec{p}_z$$

- **Momento angolare** : $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ e siano:

$$\xi_1 = +z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\xi_2 = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\xi_3 = +y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

i campi vettoriali (vedi sezione 3.1) associati ai gruppi a un parametro di **rotazioni** in $\mathbb{R}^3$. Si ottiene:

$$\pi_{\xi_1}^L = (0, -z, +y) \begin{pmatrix} \vec{p}_x \\ \vec{p}_y \\ \vec{p}_z \end{pmatrix} \equiv \vec{M}_x$$

$$\pi_{\xi_2}^L = (z, 0, -x) \begin{pmatrix} \vec{p}_x \\ \vec{p}_y \\ \vec{p}_z \end{pmatrix} \equiv \vec{M}_y$$

$$\pi_{\xi_3}^L = (-y, x, 0) \begin{pmatrix} \vec{p}_x \\ \vec{p}_y \\ \vec{p}_z \end{pmatrix} \equiv \vec{M}_z$$

Si riconoscono le tre componenti del vettore **momento angolare**:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

- **Additività della quantità di moto**: consideriamo due particelle di masse m_1 e m_2 in $\mathbb{R}^3$. Abbiamo $L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2)^2$ dove indichiamo con una freccia i vettori di $\mathbb{R}^3$. Possiamo anche considerare la descrizione equivalente in $\mathbb{R}^6$. Posto $x = (\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, $v = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ e m la matrice di massa, abbiamo:

$$L = \frac{1}{2}vmv^t$$

Consideriamo una traslazione del sistema nel suo complesso $x \rightarrow x + \alpha a$ dove $a = (\vec{a}, \vec{a})$; la traslazione in $\mathbb{R}^6$ che consideriamo è composta quindi da due identiche traslazioni in $\mathbb{R}^3$,

una su ogni particella del sistema. Il campo vettoriale associato risulta quindi $\eta = (\vec{\eta}, \vec{\eta})$ e il momento associato è

$$\pi_{\eta}^L = \frac{\partial L}{\partial v} a = (mv \cdot a)_{\mathbb{R}^6} = (m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{a})_{\mathbb{R}^3} + (m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{a})_{\mathbb{R}^3}$$

Posto $P = \frac{\partial L}{\partial v} = (\vec{p}_1, \vec{p}_2)$, otteniamo

$$(P \cdot a)_{\mathbb{R}^6} = \vec{p}_1 \cdot \vec{a} + \vec{p}_2 \cdot \vec{a} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \cdot \vec{a} = (\vec{P} \cdot \vec{a})_{\mathbb{R}^3}$$

Come nel caso di una sola particella nasce quindi il vettore P (di $\mathbb{R}^6$) che si dice quantità di moto. Questo vettore corrisponde in $\mathbb{R}^3$ all'usuale **quantità di moto totale** $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Risulta ora con tutta evidenza il carattere **additivo** della quantità di moto.

- **Additività del momento angolare:** un ragionamento analogo porta alla definizione di **momento angolare totale** $\vec{M}$ e la corrispondente additività in $\mathbb{R}^3$. Consideriamo esplicitamente solo il caso particolare di rotazioni del sistema nel suo complesso attorno all'asse z . Le coordinate in $\mathbb{R}^3$ delle due particelle saranno indicate con (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) . Le coordinate di $\mathbb{R}^6$ saranno indicate con $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$ con la corrispondenza ovvia. Il campo vettoriale di $\mathbb{R}^6$ da considerare è quindi $\xi = (\xi_3, \xi_3)$, cioè:

$$(-y_1, +x_1, 0, -y_2, +x_2, 0)$$

e allora si ha:

$$\pi_{\xi}^L = (-q_2, +q_1, 0, -q_5, +q_4, 0) \begin{pmatrix} m\dot{q}_1 \\ m\dot{q}_2 \\ m\dot{q}_3 \\ m\dot{q}_4 \\ m\dot{q}_5 \\ m\dot{q}_6 \end{pmatrix} = -m_1 \dot{q}_1 q_2 + m_1 \dot{q}_2 q_1 - m_2 \dot{q}_4 q_5 + m_2 \dot{q}_5 q_4$$

Lo stesso risultato si può interpretare in termini di vettori di $\mathbb{R}^3$. Denotando con $\vec{M}_{1z}$ e $\vec{M}_{2z}$ rispettivamente la terza componente (quella lungo il versore k) del vettore $\vec{M}_1$ e quella del vettore $\vec{M}_2$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{1z} &= (-y_1, +x_1, 0) \begin{pmatrix} m_1 \dot{x}_1 \\ m_1 \dot{y}_1 \\ m_1 \dot{z}_1 \end{pmatrix} = -m_1 \dot{q}_1 q_2 + m_1 \dot{q}_2 q_1 \\ \vec{M}_{2z} &= (-y_2, +x_2, 0) \begin{pmatrix} m_2 \dot{x}_2 \\ m_2 \dot{y}_2 \\ m_2 \dot{z}_2 \end{pmatrix} = -m_2 \dot{q}_4 q_5 + m_2 \dot{q}_5 q_4 \end{aligned}$$

E quindi:

$$\pi_{\xi}^L = (\vec{M}_{1z} + \vec{M}_{2z})$$

In definitiva, considerando anche le altre rotazioni, abbiamo la seguente formula in $\mathbb{R}^3$ che definisce il **momento angolare totale** ed esprime l'additività del momento angolare :

$$\vec{M} \equiv \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{p}_2$$

7.3 Coordinate cicliche.

Veniamo ora al terzo e ultimo ingrediente del teorema di Noether, il concetto di **coordinata ciclica**. Sia $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ e supponiamo che, per un certo fissato indice i , sia:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

La coordinata *mancante*, q_i , è detta **ciclica**. In presenza di una coordinata ciclica, le equazioni di E-L danno:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Posto $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, si vede che p_i rappresenta un momento, detto **momento coniugato alla q_i** , che è precisamente il momento associato al gruppo di diffeomorfismi che lascia fisse tutte le q_j con $j \neq i$ e che agisce sulla q_i come traslazione: $q_i \rightarrow q_i + \alpha$. In questo caso, il campo è $\xi = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, 0)$ con 1 nella i -esima posizione, e quindi il momento associato diventa proprio:

$$\pi_\xi^L = p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Questo momento è un integrale primo del moto: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = c$, con c una costante fornita dalle condizioni iniziali (si dice anche che è un **momento conservato**).

- **Osservazione:** notiamo anche che, se q_i è ciclica, cioè mancante, ovviamente la Lagrangiana è invariante per il gruppo sopra considerato: $\hat{\xi}(L) = \frac{dL}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$. Vediamo qui iniziare a manifestarsi il fenomeno della simultanea presenza di simmetrie, costanti del moto e coordinate cicliche che costituirà l'essenza del teorema di Noether.

La presenza di una coordinata ciclica permette di ridurre di uno il numero delle equazioni da risolvere per trovare il moto del sistema, semplificando quindi il problema.

Consideriamo infatti la condizione $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = c$; essa fornisce una relazione del tipo:

$$c = c(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n),$$

in cui c è vista come funzione delle variabili indicate. Se questa relazione è invertibile (cosa sempre vera per le Lagrangiane quadratiche e definite positive nelle velocità), possiamo usarla per esplicitare la $\dot{q}_i$:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, c, \dots, \dot{q}_n)$$

A questo punto consideriamo le $n - 1$ equazioni di E-L:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \text{ con } j \neq i$$

Sostituiamo in queste equazioni (**non** nella Lagrangiana) $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, c, \dots, \dot{q}_n)$ e risolviamole. Una volta risolte, si sostituiscono le $q_j(t)$ con $j \neq i$ nella formula della $\dot{q}_i$, ottenendo così una formula del tipo $\dot{q}_i = f(c, t)$. La $q_i(t)$ si trova quindi con una semplice integrazione:

$$q_i(t) = \int_0^t f(c, t) dt + q_i(0).$$

8 Teorema di Noether.

Il teorema di Noether (nel caso semplice che ci interessa) si enuncia così:

Teorema di Noether: Sia $L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ la Lagrangiana di un sistema meccanico; le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

1. Si può trovare un sistema di coordinate in modo che una di esse sia ciclica.
2. C'è un momento conservato (cioè un momento che è un integrale primo).
3. La Lagrangiana è invariante sotto un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi.

Inoltre il momento che si conserva è quello associato al gruppo di simmetria.

La dimostrazione sarà fatta mostrando che $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

- $1 \Rightarrow 2$: è già stato dimostrato nel paragrafo precedente.
- $2 \Rightarrow 3$: Sia π_ξ^L un momento conservato associato ad un campo vettoriale $\xi = f(q) \frac{\partial}{\partial q}$. Sia $q(\alpha)$ il corrispondente gruppo ad un parametro di diffeomorfismi. Possiamo calcolare così:

$$\frac{d\pi_\xi^L}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} f(q) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(q(\alpha))}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \frac{d(q(\alpha))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(\dot{q}(\alpha))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

Sappiamo anche (vedi paragrafo 6.1) che:

$$\frac{dL}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial L}{\partial q} \frac{d(q(\alpha))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(\dot{q}(\alpha))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

Usando le equazioni di E-L:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

si ottiene finalmente:

$$\frac{d\pi_\xi^L}{dt} = \frac{dL}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

In definitiva:

$$\frac{d\pi_\xi^L}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dL}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$$

Osserviamo che l'ultima formula mostra in realtà più di quello che volevamo dimostrare, e cioè che $2 \Leftrightarrow 3$.

- $3 \Rightarrow 1$: possiamo usare un teorema di analisi (**lemma di Frobenius**, vedi più sotto) che dice che in un aperto di $\mathbb{R}^n$ si possono sempre trovare coordinate y tali che il sistema di

equazioni ordinarie $\frac{d(q(\alpha))^k}{d\alpha} = f^k(q(\alpha))$ diventi: $\frac{dy^n}{d\alpha} = 1$ e $\frac{dy^i}{d\alpha} = 0$ per $i = 1, 2, \dots, n-1$. In queste coordinate possiamo calcolare così:

$$0 = \left. \frac{dL}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial L}{\partial y^k} \frac{dy^k}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^k} \frac{d\dot{y}^k}{d\alpha} \right) + \frac{\partial L}{\partial y^n} \frac{dy^n}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^n} \frac{d\dot{y}^n}{d\alpha} \right]_{\alpha=0}$$

Abbiamo anche:

$$\frac{d\dot{y}^j}{d\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{dy^j}{d\alpha} \quad \forall j$$

E quindi, nel sistema di coordinate scelto, la y^n risulta ciclica:

$$0 = \left. \frac{dL}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial L}{\partial y^n}.$$

Nel sistema di coordinate y il campo vettoriale associato alla simmetria è quindi $\frac{\partial}{\partial y^n}$. $\square$

8.1 Il caso di più simmetrie.

Se sono presenti più simmetrie *indipendenti* (nel senso che i campi vettoriali associati sono *linearmente indipendenti* in ogni punto dell'aperto su cui sono definiti) la parte $2 \iff 3$ del teorema resta vera: ad esempio, è chiaro che se ci sono due (o più) momenti conservati (*funzionalmente* indipendenti) allora ci sono due (o più) campi vettoriali linearmente indipendenti, rispetto ai quali la derivata di Lie della Lagrangiana è nulla. Lo stesso vale ovviamente per la parte $1 \Rightarrow 2$, a due (o più) coordinate cicliche corrispondono due (o più) momenti conservati. La parte $3 \Rightarrow 1$ è la più interessante e delicata: si generalizza solo nel caso in cui le simmetrie *commutano* nel senso che i campi vettoriali indipendenti associati hanno fra loro parentesi di Lie nulle. Enunciamo (senza dimostrarlo; la dimostrazione è solo una noiosa serie di calcoli) un risultato interessante che permette di costruire una nuova simmetria a partire da due simmetrie indipendenti e *non commutanti* note, e quindi un nuovo momento conservato a partire da due momenti conservati funzionalmente indipendenti.

- a.** Siano ξ e ζ due campi vettoriali indipendenti, e siano $\hat{\xi}$ e $\hat{\zeta}$ i rispettivi campi vettoriali estesi allo spazio posizioni-velocità con coordinate q e η . (Ricordiamo che se $\xi = f(q)\partial/\partial q$ si ha $\hat{\xi} = f(q)\partial/\partial q + \frac{\partial f(q)}{\partial q}\eta\partial/\partial\eta$). Se poniamo $\psi = [\xi, \zeta]$ si ottiene dopo alcuni calcoli che non riportiamo, $\hat{\psi} = [\hat{\xi}, \hat{\zeta}]$, dove ora il commutatore è calcolato nello spazio posizioni-velocità.

Segue immediatamente il risultato promesso:

- b.** Se $\psi = [\xi, \zeta] \neq 0$ e se $\hat{\xi}(L) = 0$ e $\hat{\zeta}(L) = 0$, allora $\hat{\psi}(L) = 0$.

Passiamo ora alla questione dell'esistenza di coordinate cicliche. Nel caso di una sola simmetria della Lagrangiana abbiamo l'esistenza di una coordinata ciclica; nel caso di più simmetrie questo non è sempre vero. Ci sono, in generale, più simmetrie che coordinate cicliche, come mostra il seguente risultato.

- c. Lemma di Frobenius.** Siano χ_i , $i = 1 \dots k$, campi vettoriali in un aperto di $\mathbb{R}^n$. Esiste un sistema di coordinate q^l , $l = 1, 2, \dots, k, \dots, n$ tali che $\chi_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$ con $i = 1 \dots k$ se e solo se $\forall i, j$ vale la proprietà $[\chi_i, \chi_j] = 0$.

Se allora abbiamo $\hat{\chi}_i(L) = 0$, in queste coordinate otteniamo (con un calcolo identico al caso di una sola simmetria) che $\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$.

Consideriamo allora le seguenti tre affermazioni:

- 1'. *Si può trovare un sistema di coordinate q^l , $l = 1, 2, \dots, k, \dots, n$ in modo che le prime k di esse siano cicliche.*
- 2'. *Ci sono k momenti conservati.*
- 3'. *La Lagrangiana è invariante sotto k gruppi ad un parametro di diffeomorfismi.*
- 4'. *La Lagrangiana è invariante sotto k gruppi ad un parametro di diffeomorfismi i cui campi vettoriali commutano.*

La discussione precedente si riassume nelle seguenti implicazioni: $1' \Rightarrow 2' \Leftrightarrow 3'$ e $4' \Rightarrow 1'$ che danno la generalizzazione cercata del Teorema di Noether.

8.2 Applicazioni ed esempi:

- Se durante il moto di una particella in un campo di forze si conservano due componenti del momento della quantità di moto si conserva necessariamente anche la terza: basta osservare che l'algebra di Lie dei campi associati alle rotazioni è non banale:

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, [\xi_2, \xi_3] = \xi_1, [\xi_3, \xi_1] = \xi_2.$$

In questo caso non possiamo costruire due coordinate cicliche (vedi anche la seguente sezione).

- Se durante il moto di una particella in un campo di forze si conservano due componenti della quantità di moto non si conserva necessariamente anche la terza: basta osservare che l'algebra di Lie dei campi associati alle traslazioni è banale:

$$[\eta_1, \eta_2] = 0, [\eta_2, \eta_3] = 0, [\eta_3, \eta_1] = 0.$$

In questo caso ad ogni componente conservata corrisponde una coordinata ciclica. (vedi anche la seguente sezione).

- Se durante il moto di una particella in un campo di forze si conservano M_z e p_y si conserva anche p_x : basta calcolare la parentesi di Lie coinvolta:

$$[\xi_3, \eta_2] = \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} = \eta_1.$$

9 Il Problema dei due corpi.

Lo studio del moto per il sistema costituito da due corpi interagenti tra loro, con una energia potenziale (e quindi una forza) dipendente solo dalla loro distanza, è forse l'esempio principale in cui si esplica tutta l'efficacia dei risultati della precedente sezione. La Lagrangiana del sistema è:

$$L = \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2)^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Abbiamo quindi un problema in cui appaiono 6 coordinate spaziali indipendenti (le tre coordinate di posizione delle due particelle, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$). Notiamo subito **l'invarianza per traslazioni** del sistema nel suo complesso: se, per ogni direzione $\vec{a}$, trasliamo i vettori di posizione nello stesso modo,

$$\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_1 + \alpha\vec{a} \text{ e } \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_2 + \alpha\vec{a}$$

la Lagrangiana del problema resta inalterata.

9.1 Invarianza per traslazioni e moto del baricentro.

Ragionando come nello studio della proprietà di additività della quantità di moto totale, osserviamo che dall'invarianza per traslazioni e dalla parte $3' \Rightarrow 2'$ della generalizzazione del teorema di Noether, ricaviamo la conservazione delle tre componenti del vettore quantità di moto totale:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = (m_1 + m_2)\frac{d}{dt}\vec{R}.$$

Dove abbiamo introdotto il vettore:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Il punto di coordinate $\vec{R}$ è detto **baricentro del sistema**. In virtù della conservazione di $\vec{P}$, abbiamo:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{R} = \text{costante}.$$

E quindi abbiamo un primo risultato importante:

- **il moto del baricentro avviene a velocità costante, cioè è rettilineo e uniforme.**

Possiamo ora passare alle coordinate:

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

La Lagrangiana diventa:

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(|\vec{r}|) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{V}^2$$

Dove $\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{R}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (detta massa ridotta). L'ultimo termine è quindi una costante e può essere tralasciato. Si nota che la Lagrangiana dipende ora da solo 3 coordinate spaziali; la presenza delle 3 costanti del moto associate alle traslazioni (le tre componenti di $\vec{P}$) ha prodotto l'esistenza di un sistema di coordinate ($\vec{R}$ e $\vec{r}$) di cui 3 sono cicliche. La dimensione del problema è passata da 6 a 3.

9.2 Moto in un campo centrale e invarianza per rotazioni.

Avendo risolto completamente il problema del moto del baricentro, possiamo porci nel sistema di riferimento inerziale centrato nel baricentro e solidale con esso. Rimane ora da studiare il problema ridotto in $\mathbb{R}^3$ di Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(|\vec{r}|)$$

Forze con energie potenziali di questo tipo (dipendenti solo da $|\vec{r}|$) sono dette *forze centrali*. Il moto del sistema attorno al suo baricentro è equivalente al moto di un punto di massa $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ in un campo di forza centrale. Osserviamo subito che la Lagrangiana è **invariante per rotazioni** in $\mathbb{R}^3$ e quindi, dalla parte $3' \Rightarrow 2'$ della generalizzazione del teorema di Noether, ricaviamo la conservazione delle tre componenti del vettore momento angolare $\vec{M} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0$$

Nel sistema di riferimento del baricentro si ha:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

e quindi,

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1$$

Inoltre si ottiene

$$\vec{r} = (1 + \frac{m_1}{m_2})\vec{r}_1, \quad \vec{v} = (1 + \frac{m_1}{m_2})\vec{v}_1$$

Si può verificare che :

$$\vec{M} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{p}_2$$

Questa formula ci dice che, nel sistema di riferimento del baricentro, il momento angolare totale del sistema è uguale al momento angolare del sistema ridotto. La costanza di $\vec{M}$ implica che, durante il moto, i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ si mantengano entrambi sempre ortogonali ad un vettore costante, e quindi giacciono in un piano, il piano ortogonale al momento angolare. Abbiamo ottenuto un secondo risultato importante:

- in un campo di forze centrali, il moto è piano.

L'invarianza per rotazioni della Lagrangiana del sistema ridotto ha prodotto una ulteriore riduzione del numero delle dimensioni da 3 a 2. Nel sistema di riferimento in cui l'asse z è diretto come il vettore $\vec{M}$, la z è ciclica perchè il moto avviene nel piano x, y . Si noti che, nel caso delle rotazioni, essendo l'algebra di Lie non banale, il numero di coordinate cicliche è minore del numero delle simmetrie indipendenti.

La Lagrangiana diventa:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Nel piano del moto possiamo ora prendere coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{con } \rho \geq 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi$$

La Lagrangiana diventa:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - U(\rho)$$

Questa Lagrangiana è a sua volta invariante per rotazioni nel piano x, y e quindi si conserva il momento associato a queste rotazioni:

$$M = m(xy\dot{y} - yx\dot{x})$$

Si poteva anche osservare che la coordinata θ è ciclica e quindi si conserva il momento ad essa associato:

$$M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta}$$

La relazione precedente implica che $\dot{\theta} = \frac{M}{m\rho^2}$ (almeno fino a che $\rho(t) \neq 0$). Questa equazione, ammettendo di conoscere $\rho(t)$, può essere integrata facilmente:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \frac{M}{m\rho^2(t)} dt$$

Il caso $M = 0$ è banale: $\theta(t) = \theta(0)$.

- **Osservazione:** Si trova facilmente il **significato fisico** del momento M :

$$\vec{M}_z = m(xy\dot{y} - yx\dot{x}) = M$$

Più interessante è il **significato geometrico**: $dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$ è l'area del settore (triangolare a meno di infinitesimi di ordine superiore a uno) formato da due raggi infinitamente vicini e l'elemento di arco della traiettoria. Si ottiene:

$$M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} = 2m\frac{dS}{dt}$$

La quantità $\frac{dS}{dt}$ è la **velocità areolare**, cioè la derivata temporale dell'area spazzata dal raggio vettore del punto nel suo moto sull'orbita; la costanza di M implica la costanza di $\frac{dS}{dt}$. Questo è esattamente il contenuto della legge scoperta da Keplero osservando il moto del pianeta Marte: *in tempi uguali il raggio vettore del pianeta spazza aree uguali e quindi la velocità areolare è costante*. A Keplero può, a buon diritto, essere attribuita la scoperta della legge di conservazione del momento della quantità di moto.

Rimane solo il problema di studiare $\rho(t)$; le simmetrie del problema ci hanno consentito di passare da un problema a 6 dimensioni ad uno monodimensionale!

Osserviamo ora che l'energia totale E del sistema descritto dalla Lagrangiana $L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - U(\rho)$ si conserva:

$$\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + U(\rho) = E$$

Sostituendo l'espressione ottenuta più sopra: $\dot{\theta} = \frac{M}{m\rho^2}$, otteniamo:

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{M^2}{2m\rho^2} + U(\rho) = E$$

Differenziando questa equazione rispetto a t , otteniamo (quando $\dot{\rho}(t) \neq 0$):

$$m\ddot{\rho} = -\frac{dU(\rho)}{d\rho} + \frac{M^2}{m\rho^3} = -\frac{d}{d\rho} \left(U(\rho) + \frac{M^2}{2m\rho^2} \right) = -\frac{dV(\rho)}{d\rho}$$

Cioè il moto radiale è un moto a una dimensione sulla semiretta $\mathbb{R}^+$ provocato da una forza di energia potenziale:

$$V(\rho) = U(\rho) + \frac{M^2}{2m\rho^2}$$

La forza di modulo $\frac{M^2}{m\rho^3}$ e direzione radiale è detta **forza centrifuga**.

- **Osservazione 1:** questa forza nasce perchè, essendo $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, vediamo che $\vec{r}$ può essere visto anche come il raggio vettore della posizione della particella 1 nel sistema di riferimento in cui la particella 2 è ferma nell'origine. Tale sistema di riferimento **non è inerziale** e quindi la legge del moto per la particella 1, in questo riferimento, non è quella usuale:

$$\text{massa} \times \text{accelerazione} = \text{forza esterna agente}$$

Alla forza esterna si deve aggiungere una ulteriore forza correttiva dovuta alla non inerzialità del riferimento.

- **Osservazione 2:** l'energia potenziale vera $V(\rho) = U(\rho) + \frac{M^2}{2m\rho^2}$ è esattamente quella che si ricava sottraendo il termine di energia cinetica dall'energia totale.
- **Osservazione 3:** nel corso della discussione sulle coordinate cicliche abbiamo detto che si deve sostituire il momento conservato nelle equazioni di moto (o, equivalentemente, nel nostro caso, nella legge di conservazione dell'energia) e **non** nella Lagrangiana. Vediamo ora un esempio del tipo di errore che si commetterebbe: sostituendo $\dot{\theta} = \frac{M}{m\rho^2}$ nella Lagrangiana L si ottiene:

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{M^2}{2m\rho^2} - U(\rho)$$

L'energia di questa Lagrangiana risulta

$$E' = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{M^2}{2m\rho^2} + U(\rho)$$

che **non è** quella che si conserva nel nostro problema! Il moto radiale è, nondimeno, Lagrangiano; la Lagrangiana corretta risulta:

$$L'' = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{M^2}{2m\rho^2} - U(\rho)$$

9.3 Analisi del moto radiale.

Basandoci sulle proprietà generali del moto ad una dimensione, analizziamo in questa sezione e nella successiva il moto radiale ed il moto angolare, ed anche il corrispondente moto planare. Supporremo che il potenziale $V(\rho)$ sia derivabile infinite volte per $\rho \neq 0$, e che la sua derivata prima si annulli solo in punti isolati. Sfruttando la presenza di due costanti del moto, E ed M , le equazione da integrare sono:

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V(\rho) = E \text{ e } m\rho^2\dot{\theta} = M$$

Dove le costanti E e M sono determinate dalle condizioni iniziali.

Abbiamo già visto che la seconda equazione fornisce:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \frac{M}{m\rho^2(t)} dt.$$

Analizziamo ora la prima, che possiamo riscrivere:

$$\dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}$$

Oppure:

$$\frac{d\rho}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}} = dt$$

Il moto può ovviamente avvenire solo nelle regioni dove $E - V(\rho) \geq 0$, $\rho \geq 0$. Il segno è inizialmente determinato da $\dot{\rho}(0)$ e si mantiene fino a un **punto di inversione del moto** (se esiste, altrimenti si mantiene per sempre), dove, per definizione, $E - V(\rho) = 0$ (cioè $\dot{\rho} = 0$) e $\frac{dV(\rho)}{d\rho} \neq 0$; **dal punto di inversione in poi** (dimostreremo più sotto che l'eventuale punto di inversione viene raggiunto in un tempo finito) **si deve prendere il segno opposto**.

Infatti nel punto di inversione il punto materiale non può avere accelerazione nulla perchè la forza $-\frac{dV(\rho)}{d\rho}$ non è nulla, e quindi non può restare fermo; non può nemmeno proseguire nella stessa direzione perchè, altrimenti, entrerebbe nella zona in cui $E - V(\rho) < 0$.

Supponiamo che $\rho(0)$ e $\dot{\rho}(0) > 0$ siano condizioni iniziali "compatibili col moto" cioè $E - V(\rho(0)) > 0$. Integrando l'equazione per $\dot{\rho}$ si ha:

$$t = \int_{\rho(0)}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}}$$

Questa formula vale dove $E - V(\rho) \geq 0$. Quando $\dot{\rho} \neq 0$ la formula precedente può essere invertita e si ottiene la legge oraria del moto radiale:

$$\rho = \rho(t).$$

La soluzione può essere studiata anche per valori di ρ tali che $E - V(\rho) = 0$ (**punti critici**). Sia $\rho_1 > \rho(0)$ (sempre che esista!) il primo di questi punti incontrato; ci sono due casi distinti:

1. Se si incontra un punto di inversione $\left(\frac{dV(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho_1} \neq 0\right)$, **l'integrale converge**, (vedi sotto), il punto di inversione si raggiunge in un tempo finito e poi si deve cambiare segno. La soluzione può essere continuata:

$$t = - \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}}$$

fino ad un altro eventuale punto critico $\rho_2 < \rho_1$. Se esiste ρ_2 , il moto radiale è *confinato*: $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$. Se anche ρ_2 è di inversione, possiamo mostrare che il moto radiale è, in questo caso, *periodico*. Il tempo T occorrente per compiere una **oscillazione completa** partendo da $\rho(0)$ con velocità $\dot{\rho}(0)$ e ritornando in $\rho(0)$ *con la stessa velocità* (naturalmente nel suo moto da ρ_1 a ρ_2 il punto ripassa da $\rho(0)$, ma con velocità *diversa* da $\dot{\rho}(0)$) è indipendente da $\rho(0)$, e vale:

$$T = \int_{\rho(0)}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}} - \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}} + \int_{\rho_2}^{\rho(0)} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}}$$

Allora $\rho(t + T)$ e $\rho(t)$ sono due soluzioni corrispondenti agli stessi dati iniziali e quindi devono coincidere. Abbiamo quindi dimostrato che, per ogni t ,

$$\rho(t + T) = \rho(t)$$

Quindi il moto è periodico. Il tempo T è detto periodo del moto radiale; l'additività dell'integrale mostra che:

$$T = 2 \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}}$$

Osservazione importante: anche se il moto radiale inteso come moto a una dimensione è periodico, ciò non significa automaticamente che il moto nel piano del punto rappresentativo del sistema sia anch'esso periodico, cioè si svolga ripetendo indefinitamente lo stesso moto su un'orbita **chiusa**. Studieremo il problema in seguito.

2. Se si incontra un **punto di equilibrio** $\left(\frac{dV(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho_1} = 0\right)$, **l'integrale diverge**, (vedi sotto) ed il punto critico si raggiunge in un tempo infinito:

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_1} \int_{\rho(0)}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}} = \infty$$

■ **Osservazioni sulla convergenza dell'integrale:** si deve essenzialmente studiare il caso di un integrale improprio del tipo:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

Dove $f(x)$ è una funzione strettamente positiva nell'intervallo semichiuso $[a, b)$ e infinitamente derivabile nell'intervallo chiuso $[a, b]$, che presenta in b uno zero di ordine 1 (oppure uno zero di ordine ≥ 2). L'ordine di infinito in b dell'integrando è quindi come quello di $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ con $\alpha = 1/2$ nel primo caso, e $\alpha \geq 1$ nel secondo. Applicando il criterio del confronto asintotico si trova che nel primo caso l'integrale converge mentre nel secondo diverge.

9.4 Analisi del moto angolare e del moto nel piano.

Noto il moto radiale, il moto angolare $\theta(t)$ si può ricavare dalla formula:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \frac{M}{m\rho^2(t)} dt.$$

Osserviamo che per il moto angolare non esistono punti di inversione, se $\dot{\theta}(0) \neq 0$, $\theta(t)$ è una funzione monotona crescente o decrescente.

Studiamo ora il moto piano dato dalla composizione del moto angolare $\theta(t)$ e del moto radiale $\rho(t)$. Possiamo riscrivere la formula precedente in funzione di ρ invece che di t , usando la formula:

$$t = \int_{\rho(0)}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}}$$

Si ottiene allora **l'equazione dell'orbita per il moto piano**:

$$\theta(\rho) = \theta(\rho(0)) + \int_{\rho(0)}^{\rho} \frac{M}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}}.$$

Che, eventualmente, può essere invertita per ottenere l'orbita nella forma più usuale:

$$\rho = \rho(\theta).$$

Se consideriamo il caso di moto radiale confinato, $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$, per $M \neq 0$, nel tempo T in cui ρ compie una oscillazione completa $\rho(0) \rightarrow \rho_{\max} \rightarrow \rho_{\min} \rightarrow \rho(0)$, il raggio vettore ruota di un angolo:

$$\Delta\theta = \theta(T) - \theta(0) = \int_0^T \frac{M}{m\rho^2(t)} dt = 2 \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{M}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(\rho)]}}$$

La traiettoria nel piano x, y è un'orbita chiusa se e solo se è verificata la relazione:

$$\Delta\theta = \int_0^T \frac{M}{m\rho^2(t)} dt = \frac{2\pi a}{b}$$

con a e b numeri interi.

Infatti, ricordando che T è il periodo del moto radiale, e quindi $\rho(t) = \rho(t + T)$, si ha:

$$\int_0^{2T} \frac{M}{m\rho^2(t)} dt = \int_0^T \frac{M}{m\rho^2(t)} dt + \int_T^{2T} \frac{M}{m\rho^2(t)} dt = 2 \int_0^T \frac{M}{m\rho^2(t)} dt$$

E quindi, iterando il calcolo b volte:

$$\int_0^{bT} \frac{M}{m\rho^2(t)} dt = b \int_0^T \frac{M}{m\rho^2(t)} dt$$

Allora essendo anche:

$$\theta(T) = \theta(0) + \int_0^T \frac{M}{m\rho^2(t)} dt = \theta(0) + \frac{2\pi a}{b}$$

Si ottiene:

$$\theta(bT) = \theta(0) + \int_0^{bT} \frac{M}{m\rho^2(t)} dt = \theta(0) + b \int_0^T \frac{M}{m\rho^2(t)} dt = \theta(0) + 2\pi a$$

Cioè:

$$\theta(bT) = \theta(0) \pmod{2\pi}$$

Quindi il punto partito al tempo $t = 0$ da $x(0), y(0)$ ripassa dopo un tempo bT dallo *stesso punto con la stessa velocità*.

Infatti, abbiamo che, per ogni t :

$$\begin{cases} \rho(t + bT) = \rho(t) \\ \theta(t + bT) = \theta(t) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

- **Osservazione 1:** per una energia potenziale $U(\vec{r})$ generica, ci potranno benissimo essere orbite limitate ma, in generale, queste saranno chiuse *solo per valori molto particolari delle condizioni iniziali*. E' questo, ad esempio, il caso del moto con condizioni iniziali date da $\rho(0) = \rho^*$, $\dot{\rho}(0) = 0$ dove ρ^* corrisponde ad una **posizione di equilibrio**. In questo caso la soluzione del moto radiale è:

$$\rho(t) = \rho^*$$

Infatti dalla equazione $\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V(\rho) = E$ si ottiene che nel caso di una posizione di equilibrio $\left(\frac{dV(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho^*} = 0, E = V(\rho^*) \right)$, l'unica soluzione possibile è $\rho(t) = \rho^*$, perchè essendo la forza agente sul punto materiale nulla $\left(\frac{dV(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho^*} = 0 \right)$, un punto inizialmente fermo

in ρ^* ha accelerazione nulla, e quindi deve restarci indefinitamente. Possiamo ora risolvere il moto angolare, ottenendo banalmente:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \frac{M}{m\rho^2(t)} dt = \theta(0) + \left(\frac{M}{m\rho^{*2}} \right) t$$

Le condizioni di chiusura dell'orbita sono banalmente soddisfatte. Infatti essendo $\rho_{\max} = \rho_{\min} = \rho^*$, T è arbitrario, e quindi possiamo porre $\Delta\theta = 2\pi$. *L'orbita nel piano del moto è una circonferenza di raggio ρ^* percorsa a velocità angolare costante.*

Due casi particolari importanti:

Si può dimostrare che ci sono esattamente due energie potenziali per le quali **tutte le orbite limitate sono chiuse**: quella Newtoniana $U(\vec{r}) = -\frac{k}{r}$ e quella elastica $U(\vec{r}) = kr^2$ (con $k > 0$).

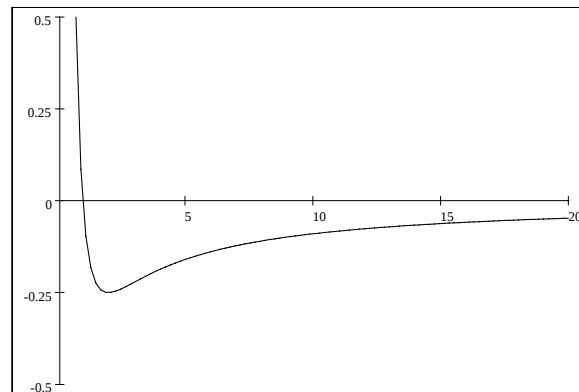
Nel primo caso, (vedi figura 1.), le orbite limitate corrispondono a **tutte le condizioni iniziali ammissibili** per cui inoltre si ha $E < 0$, e sono **ellissi col fuoco nell'origine**.

Quando la variabile angolare compie un giro completo, la variabile radiale compie **una** oscillazione completa tra $\rho_{\min}$ e $\rho_{\max}$ (nel caso dei pianeti, tra perielio e afelio); il periodo del moto radiale è uguale a quello del moto angolare. Si ha quindi $\Delta\theta = 2\pi$.

Nel secondo caso, (vedi figura 2.), le orbite limitate corrispondono a **tutte le condizioni iniziali** per le quali $E \geq E^*$ (dove $E^* > 0$ è il minimo dell'energia potenziale) e sono invece **ellissi col centro nell'origine**.

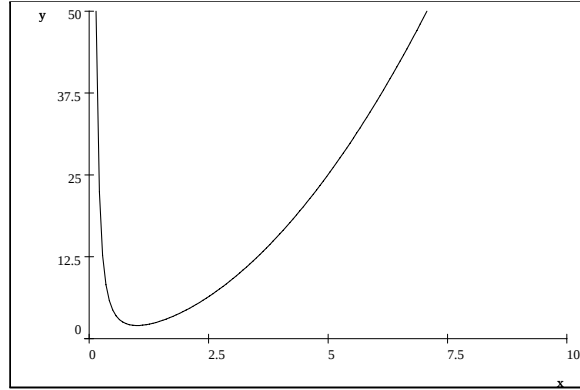
Quando la variabile angolare compie un giro completo, la variabile radiale compie **due** oscillazioni complete tra $\rho_{\min}$ e $\rho_{\max}$; il periodo del moto angolare è la metà di quello del moto radiale. Si ha quindi $\Delta\theta = \pi$.

- **Figura 1.** Esempio di grafico dell'energia potenziale totale nel caso Newtoniano per $k = 1, m = 1$ e $M = 1$.



Per dati iniziali per cui l'energia verifica $-\frac{1}{4} \leq E < 0$ le orbite sono limitate e chiuse.

- **Figura 2.** Esempio di grafico dell'energia potenziale totale nel caso elastico per $k = 1, m = 1$ e $M = 1$.



Per dati iniziali per cui l'energia verifica $E \geq 2$ le orbite sono limitate e chiuse.

- **La caduta sul centro:** la presenza del termine **repulsivo** dovuto alla forza centrifuga (presente quando $M \neq 0$) fa sì che, anche in presenza di una forza attrattiva, il punto materiale possa non raggiungere mai il centro del moto ($\rho = 0$). Questo fatto può essere provato ricorrendo alla legge di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{M^2}{2m\rho^2} + U(\rho) = E$$

da cui si ricava che:

$$\frac{M^2}{2m\rho^2} + U(\rho) - E \leq 0$$

ed anche:

$$2m\rho^2 U(\rho) - 2m\rho^2 E \leq -M^2$$

Abbiamo quindi che ci sono orbite che possono raggiungere il centro del moto solo se:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 U(\rho) \leq -\frac{M^2}{2m}$$

Nel caso Newtoniano ed elastico questo non si verifica mai.

10 Il problema di Keplero

In questa sezione studiamo il problema dei due corpi con potenziale di interazione inversamente proporzionale alla distanza. Questo è il caso dell' **interazione gravitazionale newtoniana**. In particolare discuteremo il moto di pianeti e comete attorno al sole. Il potenziale newtoniano è

$$U(\rho) = -\frac{k}{\rho}$$

con $k > 0$. Il grafico del potenziale effettivo

$$V = \frac{M^2}{2m\rho^2} - \frac{k}{\rho}$$

è stato dato in **figura 1**. La regione vicino all'origine ($\rho \rightarrow 0$) è dominata dal potenziale centrifugo, mentre a grandi distanze ($\rho \rightarrow \infty$) domina il potenziale newtoniano.

Il moto avviene solo per energie $E \geq E_0$. Se $E \geq 0$ il moto è illimitato, altrimenti è limitato. Il minimo E_0 dell'energia potenziale si ha per $\rho = \frac{M^2}{km}$ e risulta essere $E_0 = -\frac{k^2m}{2M^2}$. In questo caso il moto radiale è costante. Tenendo presente la conservazione del momento angolare, $M = m\rho^2\dot{\theta}$, abbiamo che il moto nel piano (ρ, θ) è circolare uniforme. Ci proponiamo ora di determinare la dipendenza angolare θ dalla distanza ρ . Ricordando la Sezione 9.4, l'equazione dell'orbita per il moto piano è data da

$$\theta(\rho) - \theta(\rho_0) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{M}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - \frac{M^2}{2m\rho^2} + \frac{k}{\rho}]}} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{M\rho^{-2}d\rho}{\sqrt{2mE + \frac{2mk}{\rho} - \frac{M^2}{\rho^2}}} .$$

Questo integrale si può ridurre all'integrale elementare

$$\arccos x = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Infatti ponendo $\ell = \frac{M}{\rho}$ l'integrale diventa:

$$\int_{\ell_0}^{\ell} \frac{-d\ell}{\sqrt{2mE + (\frac{2mk}{M})\ell - \ell^2}} .$$

Completando il quadrato si ha:

$$\int_{\ell_0}^{\ell} \frac{-d\ell}{\sqrt{2mE + (\frac{mk}{M})^2 - (\ell - \frac{mk}{M})^2}} .$$

È quindi

$$x = \frac{1}{\sqrt{2mE + (\frac{mk}{M})^2}} \left(\ell - \frac{mk}{M} \right),$$

ovvero (assorbendo con una rotazione dell'angolo θ la costante di integrazione e il segno meno)

$$\cos \theta = \frac{\frac{M}{\rho} - \frac{mk}{M}}{\sqrt{2mE + (\frac{mk}{M})^2}} .$$

Questa è l'equazione di una conica. Ricordiamo che fissato un punto F (detto fuoco) e una retta dir (detta direttrice) avente distanza d da F , la conica è definita come luogo geometrico dei punti P tali che la distanza $|PF|$ di P da F sia proporzionale alla distanza $|Pdir|$ di P dalla direttrice

$$e = \frac{|PF|}{|Pdir|} .$$

La conica è determinata dalla distanza d e dall'eccentricità e . Per $0 < e < 1$ la conica è un'ellisse:

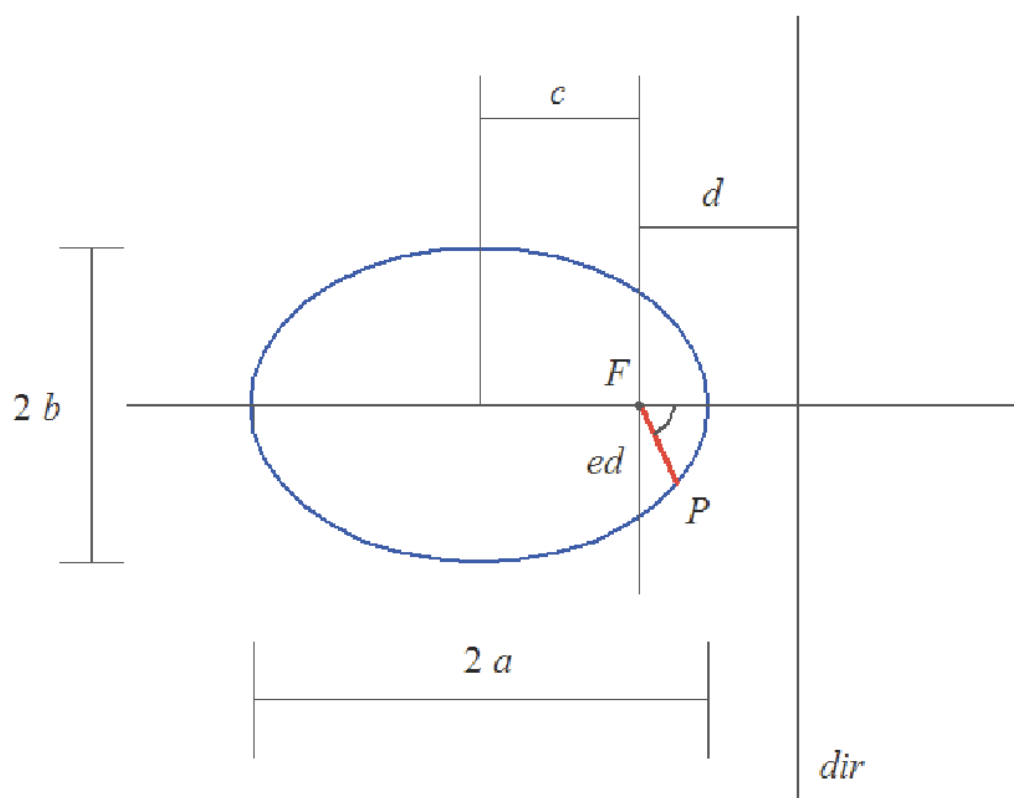


Figura 1:

Considerando coordinate polari con origine il fuoco F e ponendo $\rho = |FP|$, mentre θ è l'angolo del semiasse maggiore con il raggio vettore FP , si ha immediatamente l'equazione delle coniche $e = \frac{\rho}{d - \rho \cos \theta}$, ovvero

$$\rho = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}.$$

Paragonando questa equazione a quella dell'orbita in campo di forze newtoniano otteniamo la relazione tra le grandezze geometriche e quelle dinamiche

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{mk^2}}, \quad ed = \frac{M^2}{mk}.$$

Al variare dell'energia abbiamo le seguenti orbite,

Energia	Eccentricità	Orbita
$E > 0$	$e > 1$	Iperbole
$E = 0$	$e = 1$	Parabola
$\frac{-mk^2}{2M^2} < E < 0$	$0 < e < 1$	Ellisse
$E = \frac{-mk^2}{2M^2}$	$e = 0$	Circonferenza

In accordo con l'analisi qualitativa di inizio sezione, notiamo che il caso limite $E = \frac{-mk^2}{2M^2}$ è quello di una circonferenza di raggio $\frac{M^2}{mk}$. Infatti il limite $e \rightarrow 0$ avviene con momento angolare M , e quindi con $ed = \frac{M^2}{mk}$, fisso e finito. Studiamo più in dettaglio le orbite ellittiche. I punti di minima e massima distanza dal fuoco, rispettivamente detti perielio, afelio nel caso di orbite intorno al sole, e perigeo, apogeo nel caso di orbite intorno alla terra corrispondono ai punti di inversione del moto radiale,

$$\rho_{min} = \frac{ed}{1 + e}, \quad \rho_{max} = \frac{ed}{1 - e}.$$

Con riferimento alla figura segue che il semiasse maggiore a e la distanza $2c$ tra i fuochi sono dati da

$$a = \frac{ed}{1 - e^2}, \quad c = a - \rho_{min} = ea.$$

Ricordando che la somma delle distanze di un punto dell'ellisse dai fuochi è costante e uguale a $2a$ otteniamo $a^2 = c^2 + b^2$, e quindi il valore del semiasse minore $b = \frac{ed}{\sqrt{1 - e^2}}$. In termini delle quantità dinamiche abbiamo

$$a = \frac{k}{2|E|}, \quad b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Si noti che il semiasse maggiore dipende solo dall'energia e non dal momento angolare.

In base alle sue osservazioni planetarie e a quelle ereditate da Tycho Brahe, Keplero formula le sue tre leggi:

Leggi di Keplero

- (1608) Le orbite dei pianeti sono ellissi con il sole in uno dei due fuochi
- (1609) Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro di un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali
- (1618) I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono direttamente proporzionali ai cubi dei semiasse maggiori delle loro orbite

Il potenziale newtoniano $\frac{-k}{r}$ implica la prima legge. La seconda legge è la conservazione del momento angolare M , (vedasi la sezione 9.2) $2dS = \rho^2 d\theta = \frac{M}{m} dt$. Integrando questa equazione per tutto un periodo di rivoluzione otteniamo

$$T = 2\pi \frac{m}{M} Area = 2\pi \frac{m}{M} ab = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} a^{3/2}.$$

Si noti l'indipendenza del periodo di rivoluzione dal valore del semiasse minore dell'orbita: orbite con la stessa energia e diverso momento angolare sono percorse in tempi uguali. Per derivare la terza legge di Keplero dobbiamo, seguendo Newton, ipotizzare che l'interazione gravitazionale sia non solo inversamente proporzionale al quadrato della distanza, ma anche direttamente proporzionale alle masse dei due corpi:

$$k = G_N m_1 m_2$$

ove G_N è la costante gravitazionale universale di Newton. Ricordando la definizione di massa ridotta si ottiene $T = 2\pi \frac{1}{\sqrt{G_N(m_1+m_2)}} a^{3/2}$; la terza legge di Keplero è valida nell'approssimazione in cui le masse dei pianeti siano trascurabili rispetto alla massa del sole.

Ci proponiamo ora di studiare la traiettoria del moto relativo alle orbite ellittiche (problema che Keplero affronta e risolve utilizzando le sue leggi). Dalla conservazione dell'energia

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{M^2}{2m\rho^2} - \frac{k}{\rho}$$

si ricava (nella regione in cui $\dot{\rho} \geq 0$), $\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{M^2}{2m\rho^2} + \frac{k}{\rho})}$. Integrando, moltiplicando numeratore e denominatore per ρ e fattorizzando il valore assoluto dell'energia $|E| = -E$ otteniamo

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + \frac{k}{|E|}\rho - \frac{M^2}{2|E|m}}} + \text{costante}.$$

Il denominatore espresso rispetto alle variabili geometriche diventa $\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - b^2}$, ovvero, completando il quadrato e ricordando che $a^2 - b^2 = c^2 = (ea)^2$, $\sqrt{(ea)^2 - (\rho - a)^2}$. Poiché l'argomento della radice deve essere maggiore o uguale a zero non è restrittivo porre

$$\frac{\rho - a}{ea} = -\cos\xi$$

L'integrazione è ora banale e si ottiene (nell'ipotesi $\sin\xi \geq 0$)

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - e \sin\xi) + \text{costante}.$$

La costante di integrazione può essere assorbita da una traslazione temporale, otteniamo così la seguente rappresentazione parametrica della dipendenza radiale dal tempo

$$\rho = a(1 - e \cos \xi) \quad , \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}}(\xi - e \sin \xi) \quad .$$

Al tempo $t = 0$ è $\xi = 0$ e quindi $\rho = \rho_{\min}$. In accordo con le ipotesi $\dot{\rho} \geq 0$, $\sin \xi \geq 0$, la distanza ρ è funzione monotona crescente sia di t che di ξ per $\xi, \theta \in (0, \pi)$. L'intervallo $0 < \xi < \pi$ corrisponde a $0 < \theta < \pi$. Il punto di inversione $\rho_{\max}$ del moto radiale è raggiunto per $\xi = \pi$. L'espressione parametrica della traiettoria è valida anche nella regione $\pi < \xi < 2\pi$ (i segni meno relativi a $\dot{\rho} < 0$ e $\sin \xi < 0$ si compensano).

La traiettoria nel piano (ρ, θ) è data esprimendo anche l'angolo θ in termini dell'angolo ξ . Dall'equazione dell'orbita otteniamo

$$\cos \theta = \frac{\cos \xi - e}{1 - e \cos \xi} \quad .$$

Sostituendo questa espressione nell'identità trigonometrica elementare $\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$ perveniamo alla relazione

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\xi}{2} \quad .$$

La legge oraria del moto, utilizzando il parametro ξ , può anche essere data in termini delle coordinate cartesiane (x, y) aventi origine nel centro dell'ellisse (di equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$) e asse delle ordinate diretto verso la direttrice. Si ha $x = \rho \cos \theta + c$. Utilizzando l'equazione dell'ellisse in coordinate polari e poi la dipendenza di ρ dal parametro ξ otteniamo $ex = e \rho \cos \theta + e^2 a = ed - \rho + e^2 a = a - \rho = e a \cos \xi$. Ne segue

$$x = a \cos \xi \quad , \quad y = b \sin \xi \quad , \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}}(\xi - e \sin \xi) \quad .$$

11 Sistemi a un grado di libertà.

Quanto detto nel corso della analisi del moto radiale, vale (togliendo la limitazione $\rho \geq 0$) anche per lo studio del moto di un sistema con un solo grado di libertà, con energia:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E$$

Dove ora $U(x)$ è l'energia potenziale delle forze esterne (non essendoci momento angolare, la forza centrifuga sparisce). Il moto può avvenire solo nelle regioni dove $E - U(x) \geq 0$, i punti critici sono ancora quelli dove $E - U(x) = 0$, e le proprietà del moto periodico o di avvicinamento asintotico sono inalterate.

11.1 Analisi qualitativa nello spazio delle fasi.

Per studiare le proprietà qualitative del moto, conviene riferirsi allo spazio cartesiano di coordinate (x, y) , dove x rappresenta la posizione e y la quantità di moto del sistema (detto spazio delle fasi). Il moto nello spazio delle fasi (che è bidimensionale nel caso di sistemi ad un grado di libertà) è rappresentato da una curva $x(t), y(t) = m\dot{x}(t)$. La conservazione dell'energia si scrive:

$$\frac{1}{2m}y^2 + U(x) = E$$

L'insieme, *chiuso o aperto, limitato o illimitato, eventualmente anche vuoto, oppure ridotto ad un solo punto, oppure costituito da varie componenti disgiunte*,

$$\Gamma_E = \{x, y | \frac{1}{2m}y^2 + U(x) = E\},$$

è detto **curva di livello** del moto corrispondente ad una energia E ; le sue componenti connesse sono dette **orbite**. Le orbite sono sempre simmetriche rispetto all'asse delle x :

$$y = \pm \sqrt{2m} \sqrt{E - U(x)}$$

Durante il moto le orbite sono percorse dal punto materiale. La traiettoria si allontana dal punto di partenza quando $y \geq 0$.

I punti di equilibrio dove $U(x) = E$, $\frac{dU}{dx} = 0$ e $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$, sono sempre punti isolati e Γ_E è ridotto ad un insieme discreto di punti sull'asse x .

Nei punti di equilibrio dove invece $U(x) = E$, $\frac{dU}{dx} = 0$ e $\frac{d^2U}{dx^2} \leq 0$, Γ_E è costituito da più componenti connesse costituite da rami aperti e punti singoli sull'asse delle x .

Il moto periodico tra due punti di inversione è rappresentato ovviamente da orbite chiuse perchè:

$$x(t + T) = x(t) \Rightarrow y(t + T) = y(t)$$

Nel caso di moti periodici, il periodo T può essere espresso da un formula molto interessante: sia γ_E una delle componenti chiuse e disgiunte di Γ_E che racchiude una superficie limitata $S(E)$. L'area $A(E)$ di $S(E)$ è data da:

$$A(E) = \int \int_{S(E)} dx dy$$

Il teorema di Stokes ci dice che:

$$\int \int_{S(E)} dx dy = \int_{\gamma_E} y dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{2m} \sqrt{E - U(x)} dx + \int_{x_{\max}}^{x_{\min}} -\sqrt{2m} \sqrt{E - U(x)} dx$$

Otteniamo quindi, essendo l'orbita simmetrica rispetto all'asse x :

$$A(E) = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{2m} \sqrt{E - U(x)} dx$$

Ricordando che $x_{\min}$ e $x_{\max}$ verificano entrambi $E - U(x) = 0$, vediamo che dipendono ambedue da E . Vogliamo ora esprimere la variazione di $x_{\min}$ e di $x_{\max}$ quando $E \rightarrow E + \epsilon$. Ricordando il fatto fondamentale che sia in $x_{\min}$ sia in $x_{\max}$, $\frac{dU}{dx} \neq 0$, abbiamo che:

$$0 = E + \epsilon - U(x_{\min} + \delta x_{\min}) = \epsilon - \left[\frac{dU}{dx} \right]_{x=x_{\min}} \delta x_{\min}$$

da cui:

$$\delta x_{\min} = \epsilon/a, \quad \delta x_{\max} = \epsilon/b$$

Dove abbiamo posto

$$a = \left[\frac{dU}{dx} \right]_{x=x_{\min}}, \quad b = \left[\frac{dU}{dx} \right]_{x=x_{\max}}$$

Possiamo ora calcolare:

$$\frac{dA(E)}{dE} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[2 \int_{x_{\min} + \epsilon/a}^{x_{\max} + \epsilon/b} \sqrt{2m} \sqrt{E + \epsilon - U(x)} dx - 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{2m} \sqrt{E - U(x)} dx \right]$$

Ricordando che, all'ordine 1 in ϵ :

$$\int_{x_1 + \epsilon}^{x_2 + \epsilon} f(x) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \epsilon f(x_2) - \epsilon f(x_1)$$

e che:

$$E - U(x_{\min}) = E - U(x_{\max}) = 0$$

Otteniamo:

$$\int_{x_{\min} + \epsilon/a}^{x_{\max} + \epsilon/b} \sqrt{E + \epsilon - U(x)} dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{E + \epsilon - U(x)} dx + \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon}}{b} - \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon}}{a}$$

e quindi:

$$\frac{dA(E)}{dE} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{2m} \left[\sqrt{E + \epsilon - U(x)} - \sqrt{E - U(x)} \right] dx + \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon}}{b} - \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon}}{a} \right]$$

Finalmente, calcolando il limite:

$$\frac{dA(E)}{dE} = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{2m} \frac{d}{dE} \sqrt{E - U(x)} dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E - U(x)}} dx$$

E quindi, essendo proprio:

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}}$$

Otteniamo il risultato finale:

$$T = \frac{dA(E)}{dE}$$

Nota importante: abbiamo quindi dimostrato che, nel calcolo di $\frac{dA(E)}{dE}$ possiamo trascurare il fatto che anche gli estremi di integrazione dipendono da E .

Il caso dell'oscillatore armonico è semplice ed illuminante:

$$E = \frac{1}{2m}y^2 + \frac{k}{2}x^2$$

L'orbita per ogni $E > 0$ è quindi un'ellisse centrata nell'origine:

$$1 = \frac{1}{2mE}y^2 + \frac{k}{2E}x^2$$

di semiassi:

$$\alpha = \sqrt{2mE} \text{ e } \beta = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

e quindi di area:

$$A(E) = \pi\alpha\beta = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Abbiamo allora immediatamente:

$$T = \frac{dA}{dE} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Il periodo risulta indipendente dall'energia (questo **non** è un fatto generale). Possiamo confrontare il risultato con quello ottenuto quando abbiamo risolto esplicitamente le equazioni di moto dell'oscillatore armonico monodimensionale in un caso di condizioni iniziali semplici, ottenendo $x(t) = \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$. Si vede subito che

$$x(t+T) = \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t + 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}) \right] = x(t),$$

confermando così che, effettivamente, T è il periodo.

- **L'analisi qualitativa del moto consiste nello studio delle proprietà topologiche e geometriche dell'insieme Γ_E al variare di E .**

Non vogliamo affrontare questioni troppo generali, per cui ci limiteremo ad alcuni esempi che chiariranno concetti e metodi.

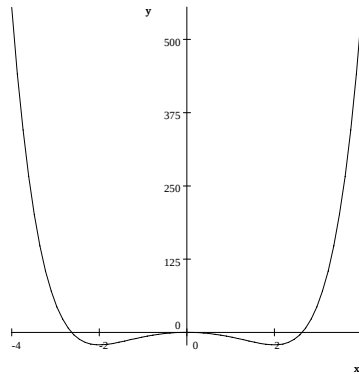
11.2 Esempi di analisi qualitativa.

1) *Disegnare le orbite nello spazio delle fasi per un sistema unidimensionale con energia potenziale:*

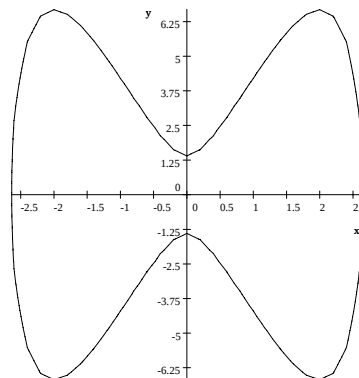
$$U(x) = \frac{1}{6}x^6 - 8x^2$$

Supponendo che la massa del sistema sia 1 (in opportune unità di misura), impostare un procedimento per calcolare il periodo T dell'orbita corrispondente a $E = 1$.

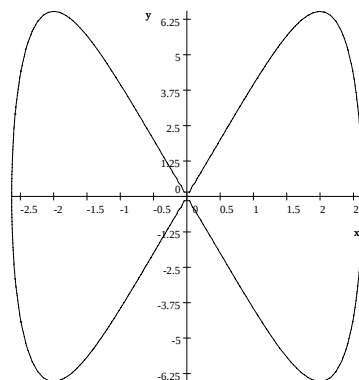
Poiché $U'(x) = x(x^4 - 16)$ l'energia potenziale ha tre punti critici: $x = 0$ (massimo), $x = -2$ e $x = 2$ (minimi). Si ha inoltre $U(0) = 0$, $U(2) = -\frac{64}{3}$ e $U(-2) = -\frac{64}{3}$. Il grafico dell'energia potenziale è:



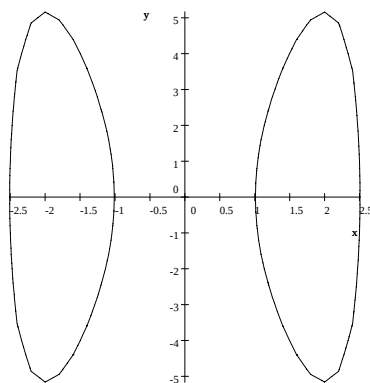
Poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = +\infty$ tutte le orbite sono limitate. Per ogni $E > 0$ esiste un'unica orbita; la traiettoria è differenziabile ovunque e assume la seguente forma:



Per $E = 0$ abbiamo due orbite **aperte** che tendono all'origine, più l'orbita puntiforme $x = y = 0$, corrispondente alla soluzione costante $x(t) \equiv 0$



Per ogni $-\frac{64}{3} < E < 0$ abbiamo una coppia di orbite periodiche, la cui traiettoria è differenziabile ovunque:



Per $E = -\frac{64}{3}$ ci sono solo le due orbite puntiformi $x = 2, y = 0$ e $x = -2, y = 0$ corrispondenti alle soluzioni costanti $x(t) \equiv \pm 2$, mentre per $E < -\frac{64}{3}$ non ci sono orbite.

Un metodo per calcolare il periodo è quello che usa la formula:

$$T = \sqrt{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(E - \frac{1}{6}x^6 + 8x^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

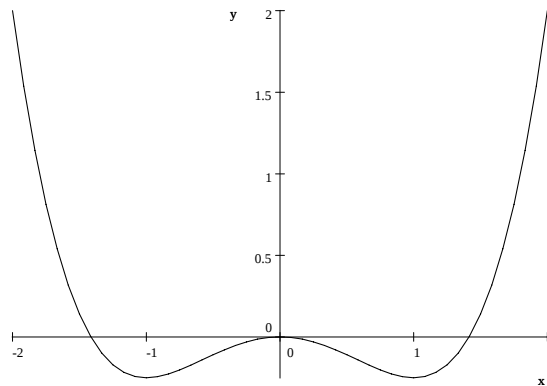
L'equazione dell'orbita è: $E = p^2/2 + \frac{x^6}{6} - 8x^2$ per cui i valori estremi x_1 e x_2 della x per $E = 1$ sono dati dalle **due soluzioni reali** di $1 = \frac{x^6}{6} - 8x^2$: $\{x_1 = -2.6438\}$ e $\{x_2 = 2.6438\}$.

2) *Disegnare le orbite nello spazio delle fasi per un sistema unidimensionale con energia potenziale:*

$$U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}.$$

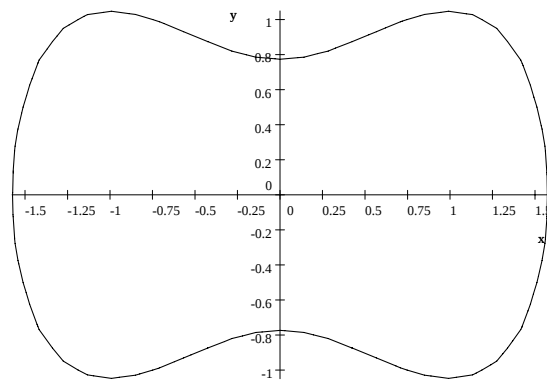
Supponendo che la massa del sistema sia 1 (in opportune unità di misura), impostare un procedimento per calcolare il periodo T dell'orbita corrispondente a $E = 2$.

Essendo $U'(x) = x^3 - x$, l'energia potenziale ha tre punti critici: $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. Si ha inoltre $U(-1) = U(1) = -\frac{1}{4}$ e $U(0) = 0$. Il grafico dell'energia potenziale è:

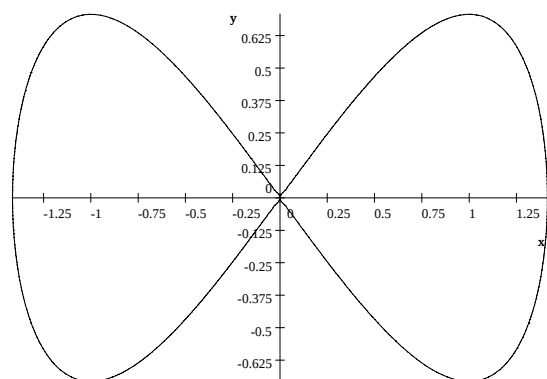


L'energia potenziale è una funzione pari, quindi l'insieme di livello della funzione $f(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$ è simmetrico rispetto a entrambi gli assi.

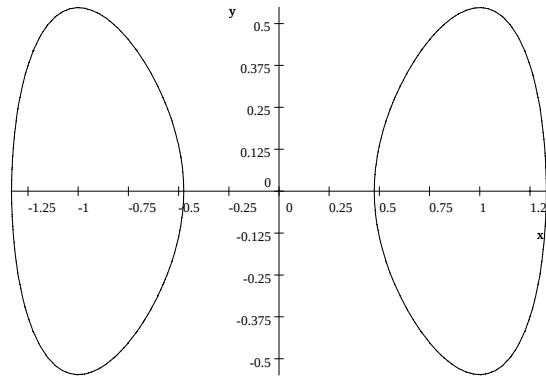
Poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = +\infty$ tutte le orbite sono limitate. Per ogni $E > 0$ l'orbita è chiusa, la traiettoria è differenziabile ovunque e assume la seguente forma:



Per $E = 0$ abbiamo **due orbite aperte** che tendono all'origine, e **l'orbita puntiforme** $x = y = 0$ corrispondente alla soluzione costante $x(t) \equiv 0$.



Per ogni $-\frac{1}{4} < E < 0$ abbiamo una coppia di orbite periodiche, la cui traiettoria è differenziabile ovunque



Per $E = -\frac{1}{4}$ ci sono solo le due orbite puntiformi $x = \pm 1, y = 0$, mentre per $E < -\frac{1}{4}$ non ci sono orbite.

Un metodo per calcolare il periodo è quello che usa la formula: $T = \frac{dA(E)}{dE}$, dove $A(E)$ è l'area racchiusa dall'orbita. L'equazione dell'orbita è: $E = p^2/2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$, per cui i valori estremi della x per $E = 2$ sono dati da: $2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$, le cui soluzioni reali sono $x = \pm 2$. Essendo l'orbita simmetrica e la funzione integranda pari si ha: *(si applica qui il calcolo descritto più sopra per cui si può trascurare la dipendenza da E degli estremi di integrazione)*

$$A(E) = 4\sqrt{2} \int_0^2 \sqrt{E - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}} dx$$

da cui, derivando sotto il segno di integrale, si ottiene:

$$T = \left. \frac{dA(E)}{dE} \right|_{E=2} = 2\sqrt{2} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(8 - x^4 - 2x^2)}} dx$$

Questo integrale è molto difficile da ottenere con metodi numerici, siete invitati a provarci!

3) Disegnare le orbite nello spazio delle fasi per un sistema unidimensionale con energia potenziale: $U(x) = \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$ nel semipiano $x > -1$.

Supponendo che la massa del sistema sia 1 (in opportune unità di misura), impostare un procedimento per calcolare il periodo T dell'orbita corrispondente a $E = 5/6$.

Poiché $U'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$, l'unico punto critico dell'energia potenziale è il minimo $x = 1$; $U(1) = \frac{3}{4}$. $U(x)$ ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e un asintoto verticale per $x \rightarrow -1^+$ è facile vedere che il grafico dell'energia potenziale è:

Per $E > 1$ abbiamo orbite aperte, la cui traiettoria è differenziabile ovunque e $\dot{x}(t) \rightarrow \pm\sqrt{E-1}$ quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Per $E = 1$ abbiamo ancora un'orbita aperta, la cui traiettoria è differenziabile ovunque, ma $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. L'orbita passa per $(0, 0)$.

Per $\frac{3}{4} < E < 1$ abbiamo ancora orbite periodiche, la cui traiettoria è differenziabile ovunque

Per $E = \frac{3}{4}$ c'è la sola orbita puntiforme $x = 1, y = 0$, mentre per $E < \frac{3}{4}$ non ci sono orbite.

Un metodo per calcolare il periodo è quello che usa la formula: $T = \frac{dA(E)}{dE}$, dove $A(E)$ è l'area racchiusa dall'orbita. L'equazione dell'orbita è:

$$E = p^2/2 + \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2}$$

per cui i valori estremi della x per $E = 5/6$ sono dati da:

$$\frac{5}{6} = \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2},$$

le cui soluzioni sono $\{x = 2 + \sqrt{3}\}, \{x = 2 - \sqrt{3}\}$. Essendo l'orbita simmetrica si ha:

$$A(E) = 2\sqrt{2} \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \sqrt{E - \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2}} dx$$

da cui:

$$T = \left. \frac{dA(E)}{dE} \right|_{E=5/6} = \sqrt{2} \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{(x + 1)}{\sqrt{-\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}}} dx = 6\sqrt{3}\pi$$

4) Disegnare le orbite nello spazio delle fasi per un sistema unidimensionale con energia potenziale: $U(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}$.

Supponendo che la massa del sistema sia 1 (in opportune unità di misura), impostare un procedimento per calcolare il periodo T dell'orbita corrispondente a $E = 1$.

Poiché $U'(x) = x^5 - x^4 - 2x^3$, l'energia potenziale ha tre punti critici: $x = 0$ (massimo), $x = -1$ e $x = 2$ (minimi). Si ha inoltre $U(0) = 0$, $U(-1) = -2/15$ e $U(2) = -\frac{56}{15}$. Il grafico dell'energia potenziale è

Poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = +\infty$ tutte le orbite sono limitate. Per ogni $E > 0$ esiste un'unica orbita; la traiettoria è differenziabile ovunque e assume la seguente forma:

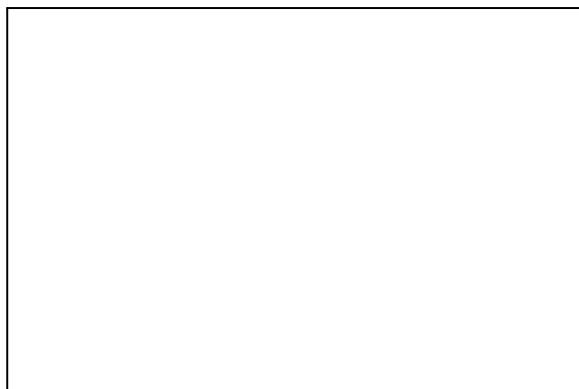
Per $E = 0$ abbiamo due orbite aperte che tendono a 0, più la soluzione costante $x(t) \equiv 0$. **Poiché $U''(0) = 0$, le traiettorie sono tangenti all'asse delle x in 0.**



Per ogni $-\frac{2}{15} < E < 0$ abbiamo una coppia di orbite periodiche, la cui traiettoria è differenziabile ovunque:



Per ogni $-\frac{56}{15} < E \leq -\frac{2}{15}$ abbiamo un'orbita periodica, la cui traiettoria è differenziabile ovunque. Per $E = -\frac{2}{15}$ c'è anche la traiettoria costante $x(t) = -1$.



Per $E = -\frac{56}{15}$ c'è solo l'orbita costante $x(t) \equiv 2$, mentre per $E < -\frac{56}{15}$ non ci sono orbite.

Un metodo per calcolare il periodo è quello che usa la formula:

$$T = \sqrt{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(E - \left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

L'equazione dell'orbita è: $E = p^2/2 + \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}$, per cui i valori estremi x_1 e x_2 della x per $E = 1$ sono dati dalle **due soluzioni reali** di $1 = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}$; si ottiene:

$$T = \sqrt{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Anche questo integrale è molto difficile da ottenere con metodi numerici, siete invitati a provarci!