SCRITTO DI FISICA MATEMATICA 1 - 14 luglio 2004.

Esercizio n.1:

Si consideri il sistema meccanico monodimensionale con Lagrangiana

$$L = (q+2)\dot{q}^2$$

(a) Studiare qualitativamente il moto a energia non nulla nello spazio delle fasi. Dopo aver risolto il punto (b) descrivere in dettaglio il caso delle orbite di energia nulla.

(b) Dimostrare che il tempo impiegato per raggiungere il punto $q = -2$ partendo da $q = -3$ con velocità iniziale 1 è finito e calcolarlo.

(c) Scrivere un gruppo a un parametro di simmetrie e il corrispondente momento conservato.

Esercizio n.2:

Studiare qualitativamente il moto unidimensionale di un punto materiale di massa 1, in un campo di forze con energia potenziale:

$$U(x) = x^{10} - 2x^5$$

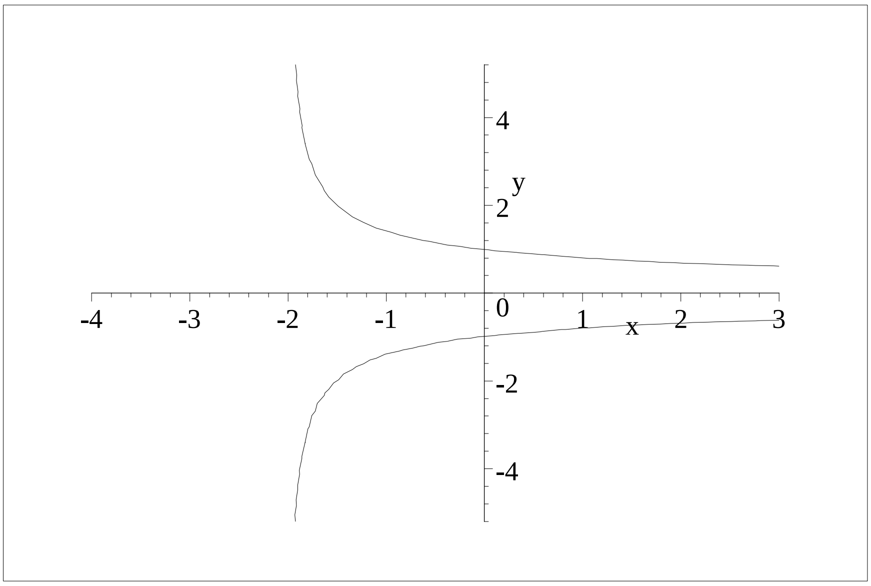
CENNO DI SOLUZIONI:

(a) L'energia è : $(q+2)\dot{q}^2$ e quindi le orbite sono le curve di livello della funzione:

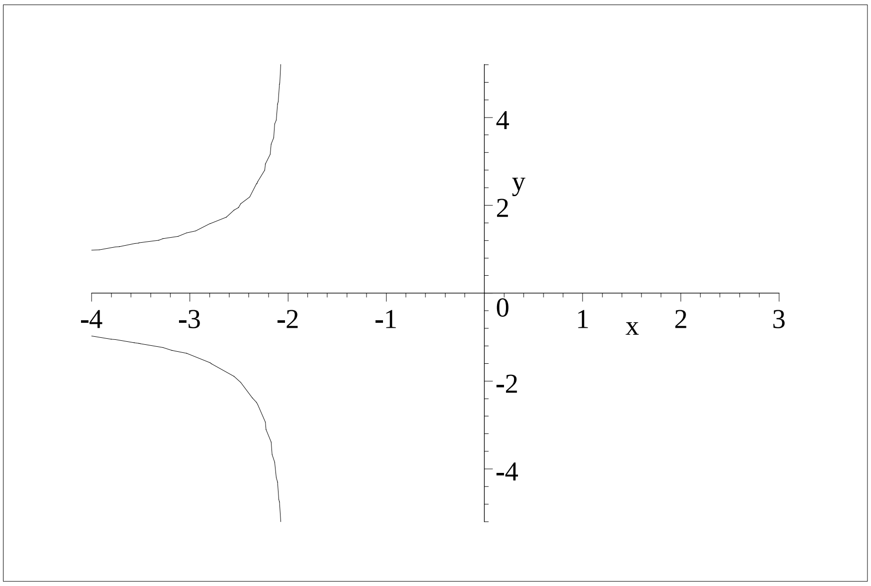
$$(x+2)y^2 = \text{costante}$$

Ci sono tre casi interessanti:

$(x+2)y^2 > 0$



$(x+2)y^2 < 0$



Nel caso di energia nulla: $(x+2)y^2 = 0$ ci sono infinite orbite: tutti i punti dell'asse $y = 0$ (la retta verticale passante per $x = 2$ non è un'orbita). Vedere lo studio più sotto.

(b) La conservazione dell'energia fornisce l'equazione:

$$(q+2)\dot{q}^2 = -1$$

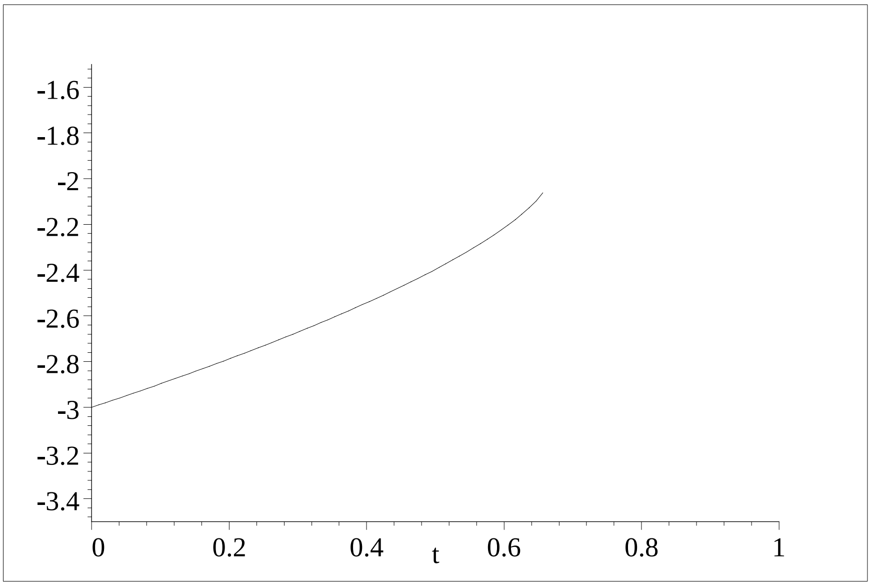
Cioè: $\dot{q} = (-q-2)^{\frac{1}{2}}$ e quindi $\int(-q-2)^{\frac{1}{2}}dq = \int dt$ cioè:

$$-\frac{2}{3}(-q-2)^{\frac{3}{2}} = t+c$$

Le condizioni iniziali forniscono subito $c = -\frac{2}{3}$.

$$q(t) = -2 - \frac{1}{4}(8 - 12t)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{2}{\sqrt[3]{8 - 12t}}$$



Dove, come deve essere: $q(0) = -3,\ \dot{q}(0) = 1.$ Il tempo richiesto è quindi:

$$t = \frac{2}{3}$$

Infatti, per controllo:

$$T = \int_{-3}^{-2} (-q-2)^{\frac{1}{2}} dq = 2/3$$

Nel caso di energia nulla $(q+2)\dot{q}^2 = 0,$ si devono distinguere due casi:

1) l'energia è nulla perchè la velocità iniziale è nulla e $q(0) \neq -2$; l'equazione fornisce $\dot{q}^2 = 0$ e il dato iniziale $q(0)$ si conserva indefinitamente, il "moto" è $q(t) = q(0).$ Tutti i punti dell'asse delle q sono di "equilibrio".

2) l'energia è nulla perchè il dato iniziale è $q(0) = -2.$ Se la velocità iniziale è diversa da zero non esiste nessun moto possibile.

(c) imponendo l'invarianza si ottiene l'equazione

$\sqrt[2]{q+2}\, dq = \sqrt[2]{q(\alpha)+2}\, dq(\alpha)$. Integrando tenendo conto della condizione iniziale $q(0) = q$ si ha: $\left(\sqrt{(q+2)}\right)^3 + \frac{3}{2}\alpha = \left(\sqrt{(q(\alpha)+2)}\right)^3.$

Semplificando si ha :$q(\alpha) = \left(\left(\sqrt{(q+2)}\right)^3 + \frac{3}{2}\alpha\right)^{\frac{2}{3}} - 2$. Inoltre

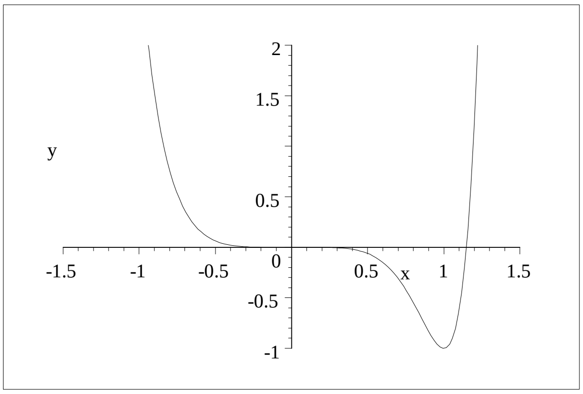
$q'(0) = \frac{2}{\sqrt[3]{\left(8\sqrt{(q+2)}\,q + 16\sqrt{(q+2)} + 0\right)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\left(\sqrt{(q+2)}\right)^3\right)}} = \frac{1}{\sqrt{(q+2)}}$ e quindi

$\Pi = m(q+2)\dot{q}\frac{1}{\sqrt{(q+2)}} = m\sqrt{(q+2)}\,\dot{q} = m\sqrt{(a+2)}\,b$

Calcoliamo l'energia $E = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}m(q+2)\dot{q}^2$ per cui, ovviamente il momento conservato è proporzionale alla radice dell'energia.

ESERCIZIO N.2

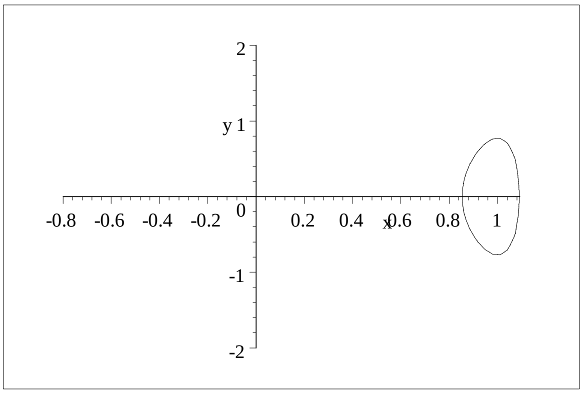
Il grafico dell'energia potenziale è: $U(x) = x^{10} - 2x^5$



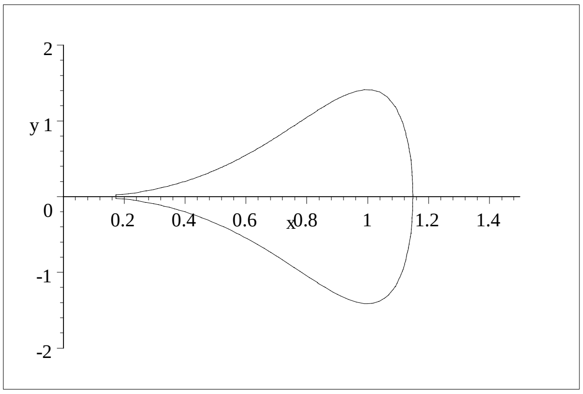
I punti di equilibrio sono 0 e 1.

Ecco i tre esempi significativi di orbite:

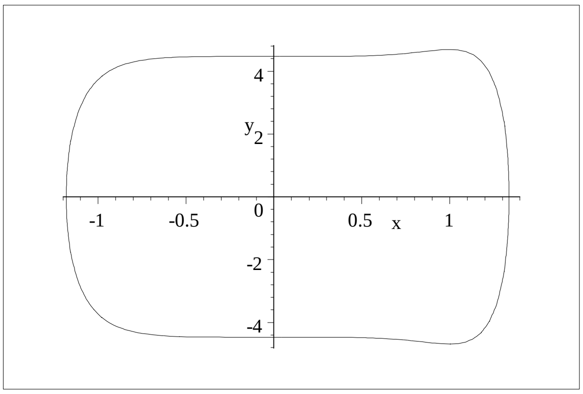
$y^2/2 + x^{10} - 2x^5 = -0.7$



$y^2/2 + x^{10} - 2x^5 = 0$



$y^2/2 + x^{10} - 2x^5 = 10$


4
y
2
0
-1
-0.5
0.5
x
1
-2
-4