Fisica matematica — 17 Luglio 2009

1. Si consideri una particella in $\mathbb{R}^3$ di massa m vincolata a muoversi sul cilindro liscio di equazione $x^2 + y^2 = R^2$ sottoposta all'azione della sua forza peso e di una molla di costante k fissata nell'origine degli assi.

   (a) Scrivere l'energia totale del sistema.

   (b) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.

   (c) Trovare un momento conservato.

   (d) Scrivere e integrare le equazioni di moto per la coordinata z con condizioni iniziali $z(0)$ e $\dot{z}(0) = 0$ e per la coordinata θ con condizioni iniziali $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$

   (e) Trovare le condizioni iniziali di θ per cui l'orbita (con condizioni iniziali in z date da $z(0)$ e $\dot{z}(0) = 0$) è chiusa.

2. Si consideri in $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $v = x^3 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$

   (a) Trovare il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi corrispondente.

   (b) Calcolare la parentesi di Lie $\left[v, \frac{\partial}{\partial x}\right]$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

Esercizio 1.

Usiamo coordinate cilindriche: l'energia potenziale è:

$$U = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) + mgz \tag{1}$$

L'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

La Lagrangiana è quindi:

$$L = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}kz^2 - mgz$$

La coordinata θ è ciclica e quindi si conserva il momento coniugato:

$$M = mR^2\dot{\theta}$$

Le equazioni di moto, posto $\frac{k}{m} = \omega^2$ sono:

$$\ddot{\theta} = 0 \tag{2}$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -g \tag{3}$$

La coordinata angolare si muove di moto uniforme e la coordinata z di moto armonico:

$$z(t) = \left(z(0) + \frac{g}{\omega^2}\right)\cos\omega t - \frac{g}{\omega^2} \tag{4}$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)t \tag{5}$$

Il periodo del moto in z è $T = \frac{2\pi}{\omega}$ per cui l'orbita è chiusa se $\frac{\dot{\theta}(0)}{\omega}$ è un numero razionale.