Esame di Fisica Matematica I
23 giugno 2005

1) Considerato il **moto piano centrale** di un punto materiale di massa 1 in un campo di forze centrali piane con energia potenziale $U(\rho) = \frac{\rho^6}{6}$

a) descrivere qualitativamente il **moto radiale** nel caso di condizioni iniziali con momento angolare $M = 0$ e $M = 1$

b) mostrare che nel caso $M = 1$ c'è almeno un'orbita del **moto piano** *chiusa* e trovare le condizioni iniziali che la determinano e il periodo del moto.

c) nel caso $M = 0$ il punto può raggiungere il centro del moto?

d) e nel caso $M = 1$?

2) Considerato il moto unidimensionale di un punto materiale di massa 1 con lagrangiana $L = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}\dot{x}^2$,

a) trovare un momento conservato e dimostrarne la conservazione.

b) trovare il tempo necessario per andare da $x = 4$ a $x = 2$ lungo un'orbita con energia $E = 1$

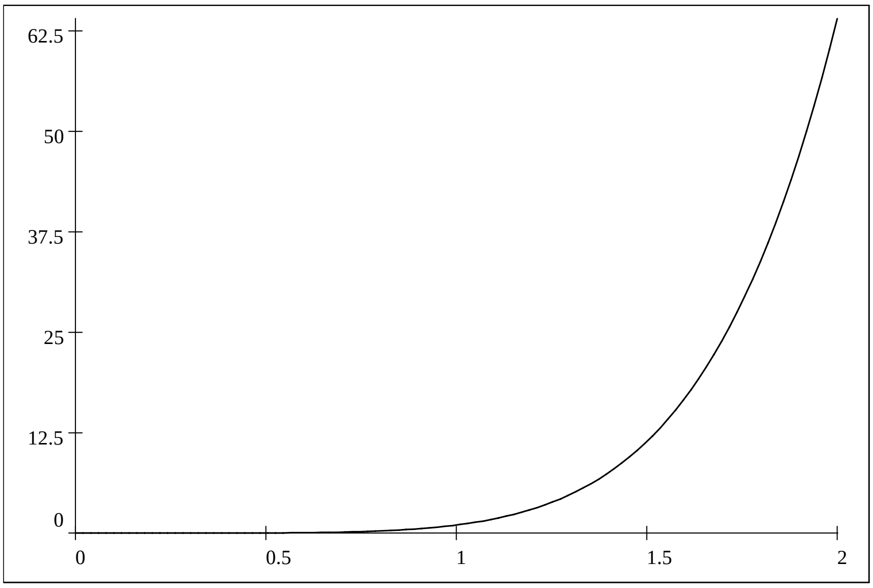
c) trovare il tempo necessario per andare da $x = 4$ a $x = 1$ lungo un'orbita con energia $E = 1$

Cenni sulle soluzioni

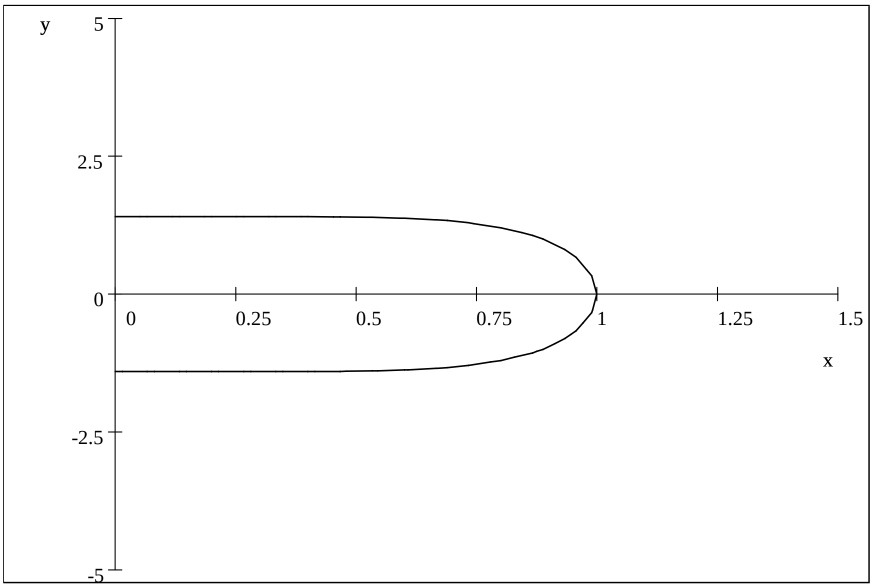
1) Il potenziale effettivo è:

$$V(\rho) = \frac{\rho^6}{6} + \frac{M^2}{2\rho^2}$$

Nel caso $M = 0$ si ha il seguente andamento:



Si nota che per energie positive le orbite hanno questa forma:

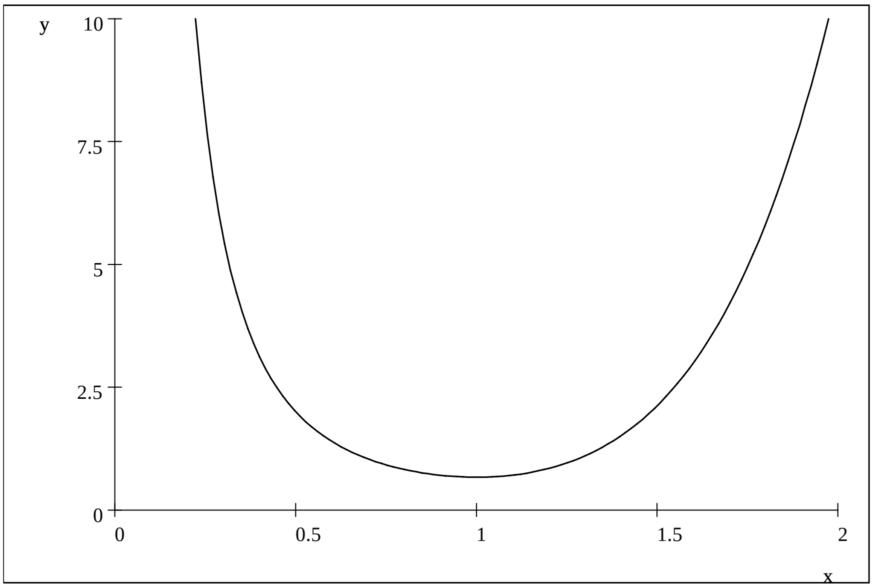


Il punto materiale può raggiungere il centro del moto in un tempo **finito** dato da**:**

$$\int_a^0 \frac{-d\rho}{\sqrt{2\left(E-\frac{\rho^6}{6}\right)}}$$

Per energia nulla c'è l'orbita $\rho = 0$.

Nel caso $M = 1$ si ha il seguente andamento:



C'è moto solo per energie superiori al valore del minimo. Il punto non può raggiungere il centro perchè:

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^2 U(\rho) \leq -\frac{M^2}{2m} = -1$$

non è soddisfatta.

In corrispondenza del minimo, il moto piano completo ha un'orbita circolare chiusa, di periodo T dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi m\rho^2}{M} = 2\pi$$

2) Siccome l'energia si conserva, un momento conservato è, chiaramente, la sua radice quadrata:

$$\Pi = \frac{(1+x^2)}{(1-x^2)}\dot{x}$$

Troviamo la soluzione delle equazioni del moto:

$$\int \frac{(1+x^2)}{(1-x^2)}dx = \ln(x+1) - \ln(x-1) - x$$

Da cui:

$$t = \int_4^x \frac{(1+x^2)}{(1-x^2)}dx = \ln 3 - x - \ln 5 - \ln(x-1) + \ln(x+1) + 4,$$

per cui i tempi richiesti sono:

$$\int_4^2 \frac{(1+x^2)}{(1-x^2)}dx = 2\ln 3 - \ln 5 + 2 = 2.5878...$$

$$\lim_{a\to+1} \int_4^a \frac{(1+x^2)}{(1-x^2)}dx = \infty$$