Esame di Fisica Matematica I - 25 luglio 2006

1) Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi per un sistema unidimensionale di massa 1 con energia potenziale:

$$U(x) = 7x^4 - 4x^7$$

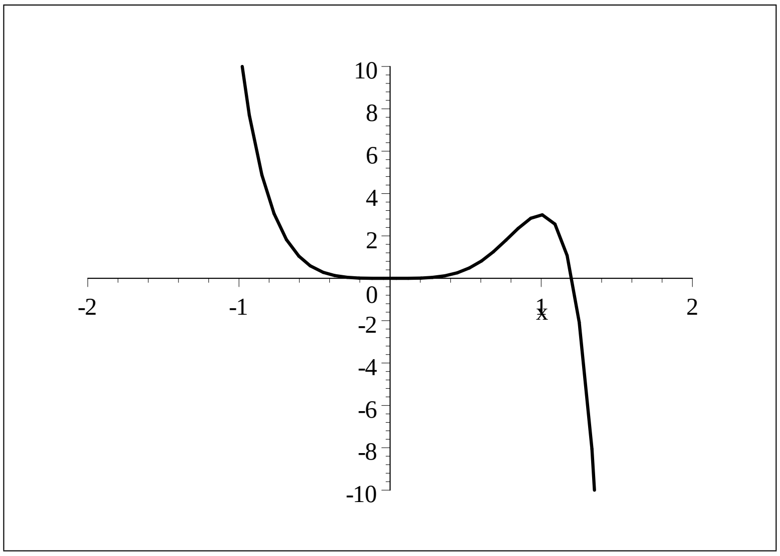
2) Considerato il moto unidimensionale di un punto materiale di massa 1 con lagrangiana $L = (1+x)^2\,\dot{x}^2$,

a) Integrare le equazioni del moto con condizioni iniziali $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$.

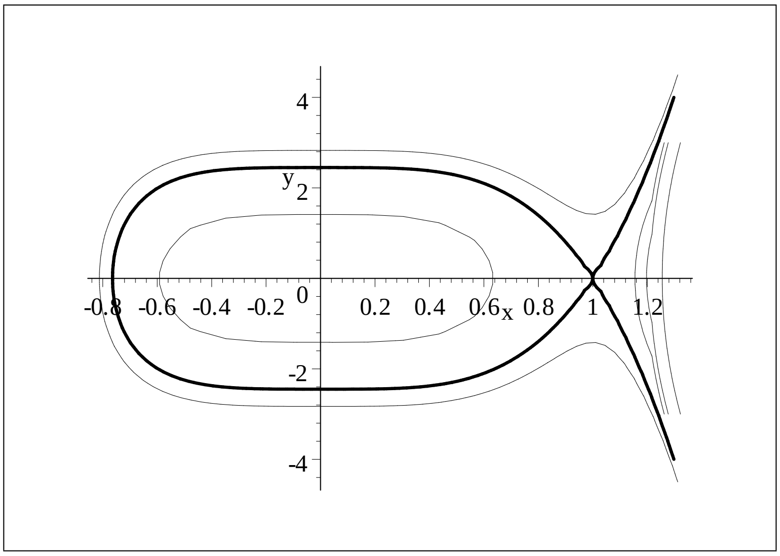
b) Individuare l'orbita a energia $E = 1$ lungo la quale il punto materiale partendo dal punto $x = -3$ si muove verso il punto $x = -2$, e calcolare il tempo necessario per raggiungerlo.

Cenno alle soluzioni.

1) La derivata prima $U'(x) = 28x^3 - 28x^6$ si annulla in $\{x = 0, 1\}$. Dal grafico dell'energia potenziale, si vede che le orbite esistono per tutti i valori dell'energia E.



Le orbite (abbiamo disegnato quelle per $E = -3, 0, 1, 3, 4$) nel piano delle fasi sono:



Le orbite a energia 3, **indicate in grassetto**, si incrociano nel punto $x = 1$ con tangenti diverse da 0 , perchè l'equazione dell'orbita a energia $E = 3$ è $3 = y^2/2 + 7x^4 - 4x^7$, che, in vicinanza di $x = 1$, ponendo $x = 1 \pm \epsilon$, diventa:

$$y(1 \pm \epsilon) = \pm\sqrt{84}\epsilon$$

2) L'energia è $E = (1+x)^2 \dot{x}^2$, per cui, dalle condizioni iniziali, si ricava: $E = 16$. L'equazione da integrare è quindi:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{4}{(1+x)}$$

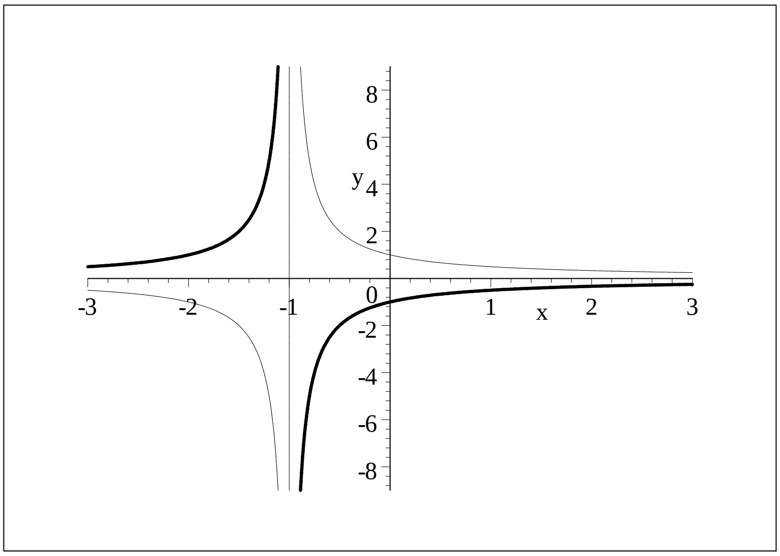
Attenzione, il segno giusto è il segno +, perchè la velocità iniziale è positiva. la soluzione è quindi:

$$\int_1^x \frac{1}{4}(1+x)\, dx = \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x^2 = t$$

Si ottiene quindi: $x(t) = -1 + 2\sqrt{1+2t}$ che soddisfa le condizioni iniziali.

Le orbite a energia $E = 1$ sono date da:

$$y = \pm \frac{1}{1+x}$$



Dove abbiamo indicato in grassetto l'orbita corrispondente al segno $-$. E' questa l'orbita da considerare.

Dall'equazione di conservazione dell'energia si ricava:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(1+x)}$$

da cui si ricava subito il tempo cercato:

$$\int_{-3}^{-2} -(1+x)\, dx = \frac{3}{2}$$