Prova scritta di Matematica 2 (Chimici) – 18 dicembre 2003

I) Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{x-y}{2} \\ y(1) &= 2\ . \end{cases}$$

II) Disegnare nel piano $\mathbf{R}^2$ l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(x^2-y)}{x}\ .$$

Calcolare poi il gradiente di f.

III) Studiare la convergenza delle serie numeriche

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^{n-1}} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n}-1) \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\log n + \sqrt{n}}\ .$$

Prova scritta di Calcolo 3 – 18 dicembre 2003

I) Si consideri la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = x^n + \frac{1 + e^{-nx}}{1 + n \log(1 + \frac{x^2}{n})} \ , \qquad (x \geq 0).$$

1) Stabilire su quale intervallo massimale $I \subset [0, \infty)$ la successione converge puntualmente e determinare il suo limite puntuale f.
2) La convergenza è anche uniforme su I?
3) Dopo avere verificato le ipotesi del teorema della convergenza dominata, si calcoli

$$\lim_{n \to \infty} \int_I f_n(x) \, dx \ .$$

II) Integrando per serie, calcolare

$$\int_0^1 \cos(x^4) \, dx \ .$$

III) Sia $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 < x \leq 1,\ x^2 - y^2 \geq \frac{2}{3}\}$ e sia S la superficie di equazione $z = x^2 - y^2$ che si proietta in T. Disegnare T e calcolare il flusso del vettore

$$\underline{v}(x, y) \ = \ -y \, \underline{i} \ + \ x \, \underline{j} \ + \ \frac{\sqrt{z + 2y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, \underline{k}$$

che attraversa S nel verso delle z crescenti. Allo scopo, può essere utile calcolare la derivata della funzione $f(s) = \log \left| \dfrac{1 + \tan s}{1 - \tan s} \right|$.

NB. I fisici che sostengono l'esame di Calcolo 3 (2 CFU) devono fare solo l'esercizio III).

SOLUZIONE (CALCOLO 3 – 18/12/03)

I) 1) Si ha

$$x^n \to \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x \in (1,\infty) \end{cases} \qquad \frac{1+e^{-nx}}{1+n\log(1+\frac{x^2}{n})} \to \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x \in (0,\infty)\ . \end{cases}$$

Quindi, la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente solo su $I = [0,1]$ e

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x \in (0,1) \\ 3/2 & \text{se } x = 1\ . \end{cases}$$

2) Siccome $f_n \in C^0[0,1]$ ma $f \notin C^0[0,1]$, la convergenza non è uniforme.
3) Con un semplice calcolo si vede che $0 \le f_n(x) \le 3$; quindi, per quanto trovato in 1), valgono le ipotesi del teorema e abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\ .$$

II) Dalla nota serie di Taylor per $\cos x$, ricaviamo

$$\cos(x^4) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n}}{(2n)!}\ ,$$

con convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$. Quindi, possiamo integrare per serie e ottenere

$$\int_0^1 \cos(x^4)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 x^{8n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(8n+1)(2n)!}\ .$$

III) Come consigliato, calcoliamo subito

$$f'(s) = \frac{2}{\cos 2s}\ . \qquad (1)$$

Il versore $\underline{n}$ normale a S con terza componente positiva è:

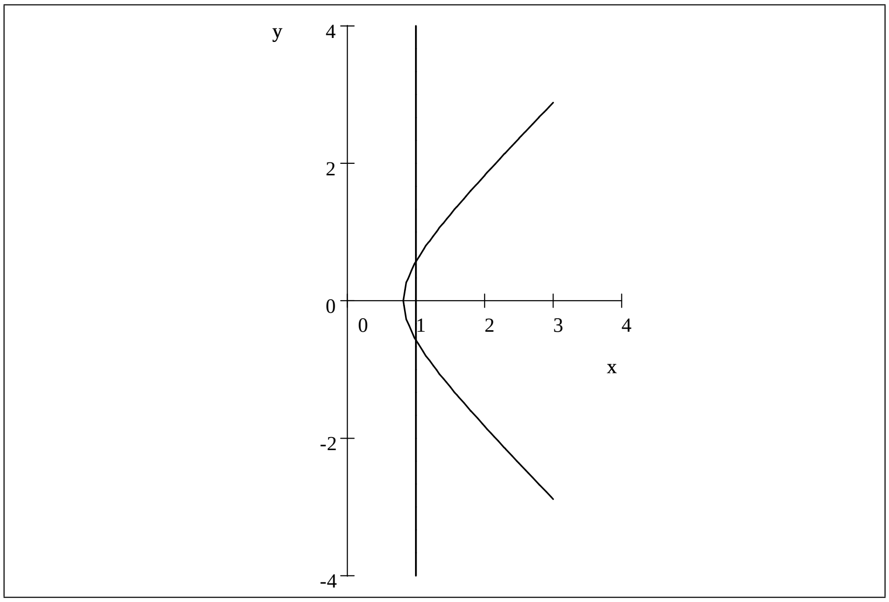
$$\underline{n} = \frac{-2x\,\underline{i} + 2y\,\underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}$$

e quindi il flusso cercato è dato da

$$\Phi = \int_S \underline{v} \cdot \underline{n}\, dS = \int_T (4xy+1)dT\ .$$

Se passiamo in coordinate polari ci accorgiamo che:

$$\begin{aligned} x &= 1 \longrightarrow \rho = \frac{1}{\cos\theta}\ , \qquad x^2 - y^2 = \frac{2}{3} \longrightarrow \rho = \sqrt{\frac{2}{3\cos 2\theta}}\ . \\ 1 - y^2 &= \frac{2}{3} \to -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3} \to y = tg\vartheta \to -\pi/6 \le \theta \le \pi/6 \end{aligned}$$



Di conseguenza, usando la (1), otteniamo

$$\Phi = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_{\sqrt{2/3\cos 2\theta}}^{1/\cos\theta} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\frac{1}{2\cos^2\theta} - \frac{1}{3\cos 2\theta} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\tan\theta - \frac{1}{3} \log \left| \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} \right| \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \ .$$

Calcolo 2B (mat) / Analisi 3 (fis) – 18 dicembre 2003

Corso 2002-2003

I) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x + \log(1 + x) + \log(1 + y^2) - y \ .$$

1) Dimostrare che la relazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = \phi(x)$ in un intorno di $(0, 0)$.
2) Determinare il polinomio di Taylor di secondo grado centrato nell'origine della funzione ϕ.

II) Integrare l'equazione differenziale $y' = -y + x\sqrt{y}$ e determinare l'integrale particolare che soddisfa la condizione $y(1) = 4$.

III) Sia $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ e sia

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 & \text{se } x \le y \\ \sqrt{x - y} & \text{se } x > y \ . \end{cases}$$

Calcolare $\displaystyle\int_R f(x, y) dxdy$.

SOLUZIONE (CALCOLO 2B – 18/12/03)
Corso 2002-2003

I) 1) Si ha $f \in C^\infty((-1,\infty) \times \mathbf{R})$ e risulta $f(0,0) = 0$. Inoltre, $f_y(x,y) = \frac{2y}{1+y^2} - 1$ e quindi $f_y(0,0) = -1 \neq 0$. Sono soddisfatte le ipotesi del Teorema del Dini: pertanto, la relazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = \phi(x)$ in un intorno di $(0,0)$.
2) $f \in C^\infty \Rightarrow \phi \in C^\infty$. Derivando totalmente rispetto a x l'espressione $f(x,\phi(x)) \equiv 0$ otteniamo

$$1 + \frac{1}{1+x} + \frac{2\phi\phi'}{1+\phi^2} - \phi' \equiv 0 \; , \qquad (1)$$

da cui $\phi'(0) = 2$. Derivando totalmente la (1) otteniamo

$$-\frac{1}{(1+x)^2} + 2\frac{[(\phi')^2 + \phi\phi''](1+\phi^2) - 2\phi^2(\phi')^2}{(1+\phi^2)^2} - \phi'' \equiv 0 \; ,$$

da cui $\phi''(0) = 7$. Il polinomio richiesto è dunque $P(x) = 2x + \frac{7}{2}x^2$.

II) L'equazione è di tipo Bernoulli. Poniamo $z(x) = \sqrt{y(x)}$ in modo che $y'(x) = 2z(x)z'(x)$ e l'equazione diventa $z' = -\frac{z}{2} + \frac{x}{2}$ (dopo avere semplificato per z). Questa è un'equazione lineare e il suo integrale generale è: $z(x) = ce^{-x/2} + x - 2$, $c \in \mathbf{R}$. Ritornando alla y otteniamo quindi $y(x) = (ce^{-x/2} + x - 2)^2$ e, imponendo la condizione $y(1) = 4$, si trova $c = 3\sqrt{e}$ (ricordiamo che $z \geq 0$). La soluzione cercata è dunque $y(x) = (3e^{(1-x)/2} + x - 2)^2$.

III) L'integrale va diviso in due parti. Siano

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -1 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2\} \qquad R_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -1 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq x\} \; .$$

Allora $R = R_1 \cup R_2$ e

$$\int_R f(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 \int_x^2 xy^2\, dy\, dx + \int_{-1}^1 \int_{-2}^x \sqrt{x-y}\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^1 (8x - x^4)\, dx \; + \frac{2}{3}\int_{-1}^1 (x+2)^{3/2}\, dx = \frac{2}{5}(6\sqrt{3} - 1) \; .$$