Teoria dei Gruppi — 21 Dicembre 2004

1. Scomporre le seguenti permutazioni sia in prodotto di cicli disgiunti, sia in prodotto di trasposizioni.

$$\begin{aligned}\alpha &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\\ \beta &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Calcolare $\gamma = \alpha^{-1}\beta\alpha$.

3. Considerata l'applicazione h :

$$h : Z_4 \times Z_4 \to Z_4 \times Z_2, \qquad (a \bmod 4, b \bmod 4) \overset{h}{\longmapsto} ((a+b) \bmod 4, b \bmod 2).$$

   - Mostrare che h è ben definita.
   - Mostrare che h è un omomorfismo suriettivo.
   - Mostrare che $Z_4 \times Z_4/N \cong Z_4 \times Z_2$ dove $N = \{(\overline{0}, \overline{0}),\ (\overline{2}, \overline{2})\}$.

4. Dimostrare che un gruppo di ordine 15 è ciclico.

5. Sia G un gruppo e x un suo elemento. Si definiscono, rispettivamente, *traslazione sinistra* (L_x) e *traslazione destra* (R_x) le due applicazioni:

$$L_x(g) = xg,\ R_x(g) = gx,\ \text{per } g \in G.$$

   Sono iniettive? Sono suriettive? Sono omomorfismi?

6. Dimostrare che $R_{x^{-1}} \circ L_x$ è un isomorfismo di G e trovarne l'inverso.