Corso di Laurea in Matematica - A.A. 99/00

Esame di Meccanica Razionale - settembre 2000

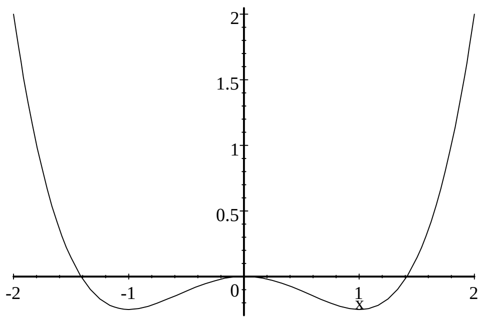
1) *Disegnare le orbite nello spazio delle fasi per un sistema unidimensionale con potenziale:*

$$U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}.$$

Supponendo che la massa del sistema sia 1 *(in opportune unità di misura), impostare un procedimento per calcolare il periodo T dell'orbita corrispondente a $E = 2$.* Non eseguire esplicitamente il calcolo dell'integrale risultante ma giustificare le formule.

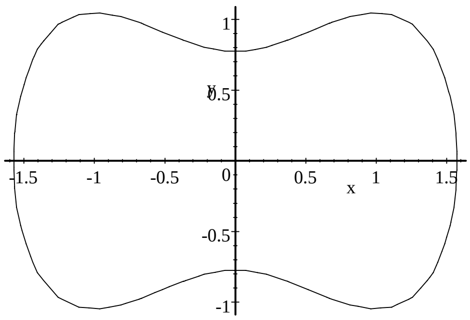
2) *Una particella di massa m è vincolata con un vincolo liscio nel piano (x, y) alla curva* $y = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{(-x^2+x)} + \arcsin(2x-1)\right)$.
Trovare un gruppo a un parametro di simmetrie e il corrispondente momento conservato.
Risolvere le equazioni di moto con condizioni iniziali $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$.
(ricordare che $\frac{d \arcsin x}{dx}$: $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$)

Soluzione es. n.1: Poiché $U'(x) = x^3 - x$, il potenziale ha tre punti critici: $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. Si ha inoltre $U(-1) = U(1) = -\frac{1}{4}$ e $U(0) = 0$. Il grafico del potenziale è:

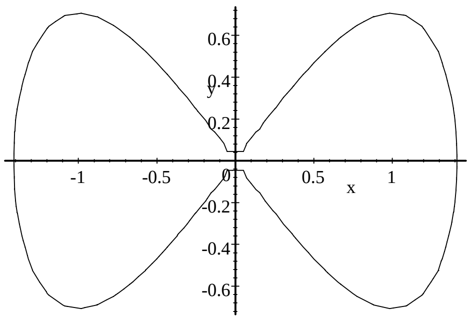


Il potenziale è una funzione pari, quindi gli insiemi di livello della funzione $f(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$ sono simmetrici rispetto a entrambi gli assi.

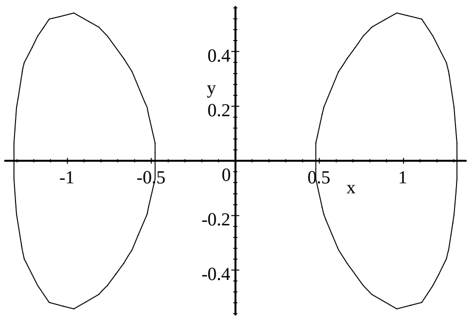
Poiché $\lim_{x \to \pm\infty} U(x) = +\infty$ tutte le orbite sono limitate. Per ogni $E > 0$ l'orbita è chiusa, la traiettoria è differenziabile ovunque e assume la seguente forma:



Per $E = 0$ abbiamo due orbite omocline a 0, più la soluzione costante $x(t) \equiv 0$.



Per ogni $-\frac{1}{4} < E < 0$ abbiamo una coppia di orbite periodiche, la cui traiettoria è differenziabile ovunque



Per $E = -\frac{1}{4}$ ci sono solo le due orbite costanti $x(t) \equiv \pm 1$, mentre per $E < -\frac{1}{4}$ non ci sono orbite.

Un metodo per calcolare il periodo è quello che usa la formula: $T = \frac{dA(E)}{dE}$, dove $A(E)$ è l'area racchiusa dall'orbita. L'equazione dell'orbita è: $E = p^2/2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$, per cui i valori estremi della x per $E = 2$ sono dati da: $2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$, le cui soluzioni sono $x = \pm 2$. Essendo l'orbita simmetrica e la funzione pari si ha:

$$A(E) = 4\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{E - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}}dx$$

da cui, derivando senza tanti problemi sotto il segno di integrale, si ottiene:

$$T = \left.\frac{dA(E)}{dE}\right|_{E=2} = \lim_{E\to 2} 4\sqrt{2}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(4E - x^4 - 2x^2)}}\,dx$$

Questo limite esiste ed è finito.

Soluzione es. n.2:

La Lagrangiana vincolata, con la parametrizzazione $x = q$ è: $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}mq^{-1}\dot{q}^2$ e imponendo l'invarianza si ottiene l'equazione:

$$q^{-1/2}dq = q(\alpha)^{-1/2}dq(\alpha)$$

Integrando, e tenendo conto della condizione iniziale $q(0) = q$, si ha che la soluzione è:

$$q(\alpha) = q - \alpha\sqrt{q} + \frac{\alpha^2}{4}$$

$q'(0) = \sqrt{q}$ per cui un momento conservato è $\Pi = m\frac{1}{\sqrt{q}}\dot{q} = m\frac{1}{\sqrt{a}}b$

(Calcoliamo l'energia $E = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}mq^{-1}\dot{q}^2$ per cui, ovviamente (perchè?), il momento conservato è proporzionale alla radice dell'energia).

Moto: $\frac{1}{\sqrt{q}}dq = \frac{1}{\sqrt{a}}bdt$ da cui, tenendo conto delle condizioni iniziali :

$$q = \frac{1}{4}\frac{(2a + bt)^2}{a}$$