

Corso di Laurea in Matematica - A.A. 00/01

Esame di Meccanica Razionale - 27 giugno 01

1) Disegnare le orbite nello spazio delle fasi per un sistema unidimensionale con potenziale:
 $U(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}.$

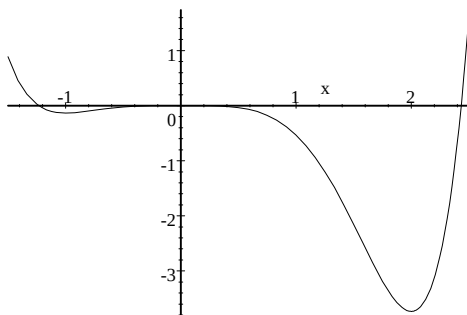
Supponendo che la massa del sistema sia 1 (in opportune unità di misura), impostare un procedimento per calcolare il periodo T dell'orbita corrispondente a $E = 1$. Non eseguire esplicitamente il calcolo dell'integrale risultante.

2) Si consideri $\mathbb{R}^2$ come spazio delle fasi di un sistema meccanico monodimensionale e siano q e p coordinate simplettiche. Nella regione $p > 0$, $q > 0$ si consideri la seguente trasformazione di coordinate dipendente dal tempo:

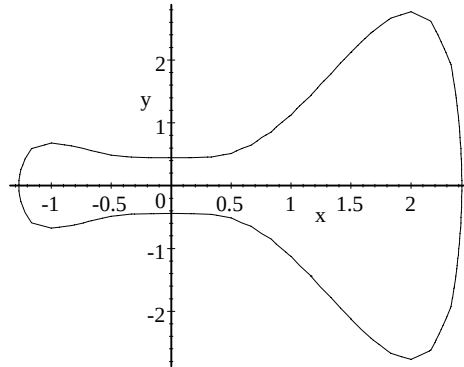
$$Q = -\frac{1}{2q^3p} - t, P = q^4p^2$$

- a) Si mostri che è una trasformazione canonica.
- b) Si trovi una funzione generatrice della forma $F = F(q, P, t)$.
- c) Cosa diventa l'hamiltoniana $H = q^4p^2$ nelle nuove coordinate ?
- d) Si spieghi la relazione tra il punto c) e l'equazione di Hamilton-Jacobi per H .

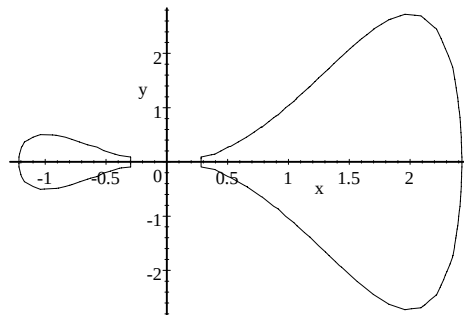
Soluzione esercizio n.1: Poiché $U'(x) = x^5 - x^4 - 2x^3$, il potenziale ha tre punti critici: $x = 0$ (massimo), $x = -1$ e $x = 2$ (minimi). Si ha inoltre $U(0) = 0$, $U(-1) = -2/15$ e $U(2) = -56/15$. Il grafico del potenziale è



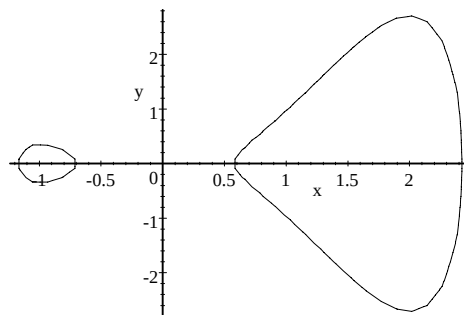
Poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = +\infty$ tutte le orbite sono limitate. Per ogni $E > 0$ esiste un'unica orbita; la traiettoria è differenziabile ovunque e assume la seguente forma:



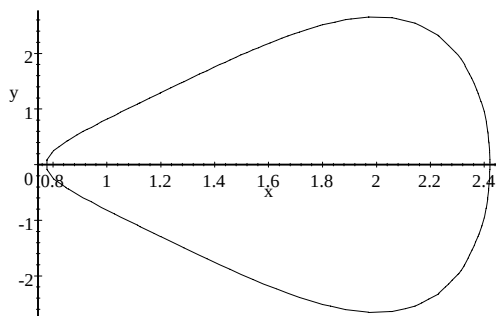
Per $E = 0$ abbiamo due orbite omocline a 0, più la soluzione costante $x(t) \equiv 0$. Poiché $U''(0) = 0$, le traiettorie sono tangenti all'asse delle x in 0.



Per ogni $-\frac{56}{15} < E < 0$ abbiamo una coppia di orbite periodiche, la cui traiettoria è differenziabile ovunque



Per ogni $-\frac{56}{15} < E \leq -\frac{2}{15}$ abbiamo un'orbita periodica, la cui traiettoria è differenziabile ovunque. Per $E = -\frac{2}{15}$ c'è anche la traiettoria costante $x(t) = -1$.



Per $E = -\frac{56}{15}$ c'è solo l'orbita costante $x(t) \equiv 2$, mentre per $E < -\frac{56}{15}$ non ci sono orbite.

Un metodo per calcolare il periodo è quello che usa la formula:

$$T = \sqrt{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(E - \left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

L'equazione dell'orbita è: $E = p^2/2 + \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}$, per cui i valori estremi x_1 e x_2 della x per $E = 1$ sono dati dalle **due soluzioni reali** di $1 = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}$ che stanno tra -2 e 2.5 .

Soluzione esercizio n.2:

a) si può calcolare $dP \wedge dQ$ e si trova che è $= dp \wedge dq$

b) si deve calcolare prima $p = p(q, P, t) = \frac{\sqrt{P}}{q^2}$ e $Q = Q(q, P, t) = -\frac{1}{2q\sqrt{P}} - t$. A questo punto si può impostare il sistema differenziale per la $F(q, P, t)$ che, per il punto a), è certamente integrabile:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\sqrt{P}}{q^2} \\ Q &= \frac{\partial F}{\partial P} = -\frac{1}{2q\sqrt{P}} - t \end{aligned}$$

Un breve calcolo fornisce:

$$F(q, P, t) = -\frac{\sqrt{P}}{q} - Pt$$

c) Si usa la formula $K(P, Q, t) = H + \frac{\partial F}{\partial t}$ e si ottiene: $K = P - P = 0$.

d) Siccome $P = P(q, p, t)$ è l'energia E che è costante, è ovvio che la F scritta in termini di $E \equiv P$ e q risolve H-J per H.