

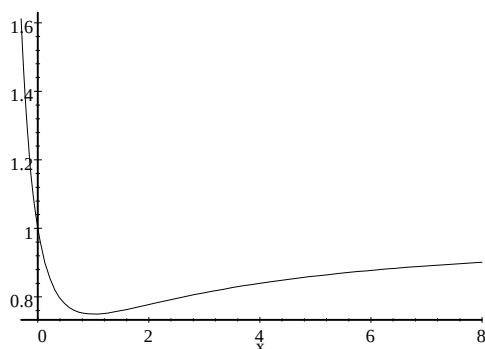
Corso di Laurea in Matematica - A.A. 99/00

Esame di Meccanica Razionale - 6 luglio 2000

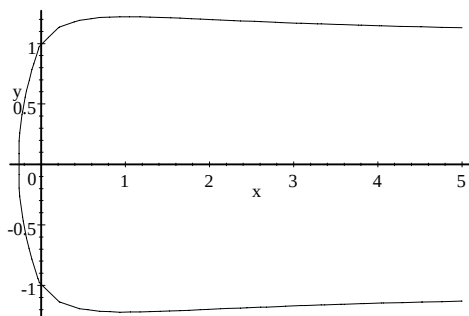
1) Disegnare le orbite nello spazio delle fasi per un sistema unidimensionale con potenziale: $U(x) = \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$ nel semipiano $x > -1$.

Supponendo che la massa del sistema sia 1 (in opportune unità di misura), impostare un procedimento per calcolare il periodo T dell'orbita corrispondente a $E = 5/6$.

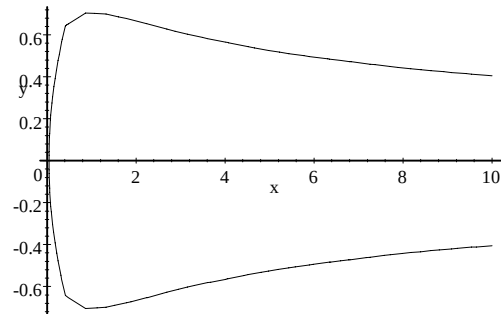
Soluzione: Poiché $U'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$, l'unico punto critico del potenziale è il minimo $x = 1$; $U(1) = \frac{3}{4}$. $U(x)$ ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e un asintoto verticale per $x \rightarrow -1^+$ è facile vedere che il grafico del potenziale è



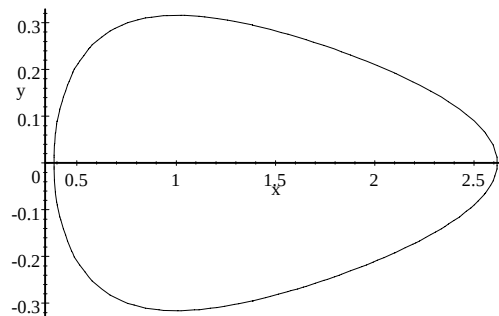
Per $E > 1$ abbiamo orbite aperte, la cui traiettoria è differenziabile ovunque e $\dot{x}(t) \rightarrow \pm\sqrt{E-1}$ quando $t \rightarrow \pm\infty$.



Per $E = 1$ abbiamo ancora un'orbita aperta, la cui traiettoria è differenziabile ovunque, ma $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. L'orbita passa per $(0, 0)$.



Per $\frac{3}{4} < E < 1$ abbiamo ancora orbite periodiche, la cui traiettoria è differenziabile ovunque



Per $E = \frac{3}{4}$ c'è la sola orbita costante $x(t) \equiv 1$, mentre per $E < \frac{3}{4}$ non ci sono orbite.

Un metodo per calcolare il periodo è quello che usa la formula: $T = \frac{dA(E)}{dE}$, dove $A(E)$ è l'area racchiusa dall'orbita. L'equazione dell'orbita è: $E = p^2/2 + \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$, per cui i valori estremi della x per $E = 5/6$ sono dati da: $5/6 = \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$, le cui soluzioni sono $\{x = 2 + \sqrt{3}\}, \{x = 2 - \sqrt{3}\}$. Essendo l'orbita simmetrica si ha:

$$A(E) = 2\sqrt{2} \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \sqrt{E - \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}} dx$$

da cui, dopo aver verificato che il teorema di derivazione sotto il segno di integrale è applicabile,

$$T = \left. \frac{dA(E)}{dE} \right|_{E=5/6} = \sqrt{2} \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{(x+1)}{\sqrt{-\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}}} dx = 6\sqrt{3}\pi$$

Il calcolo dell'ultimo integrale è, con un pò di buona volontà, fattibile, ma non è richiesto!

2) Si consideri un sistema meccanico bidimensionale con spazio delle fasi R^4 , coordinate cartesiane x, y, p_x e p_y con Hamiltoniana $H = p_x^2 + \frac{1}{x^2}(p_y^2 + y)$.

a) trovare il moto nella regione $p_x > 0$, $p_y > 0$, con condizioni iniziali $p_x = 1$, $p_y = 0$, $x = 2$, $y = -1$ risolvendo per separazione di variabili l'equazione di Hamilton-Jacobi.

b) mostrare che $F = p_y^2 + y$ è una costante del moto.

$$\left(\text{Ricordare che : } \int \frac{1}{x} \sqrt[2]{ax^2 + c} dx = \sqrt{(ax^2 + c)} - \sqrt{c} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{(ax^2 + c)}} \text{ e } \frac{d \operatorname{arctanh} x}{dx} = -\frac{1}{x^2 - 1} \right)$$

Soluzione: ponendo $W(x, y) = W_x(x) + W_y(y)$ l'equazione di H.J. diventa:

$$x^2 \left(\frac{dW_x(x)}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW_y(y)}{dy} \right)^2 + y = x^2 E$$

cioè:

$$\left(\frac{dW_y(y)}{dy} \right)^2 + y = A = x^2 E - x^2 \left(\frac{dW_x(x)}{dx} \right)^2$$

Per cui:

$$W_y(y) = \int \sqrt[2]{A - y} dy = -\frac{2}{3} \left(\sqrt{(A - y)} \right)^3$$

$$W_x(x) = \int \frac{1}{x} \sqrt[2]{x^2 E - A} dx = \sqrt{(x^2 E - A)} - \sqrt{(-A)} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{(-A)}}{\sqrt{(x^2 E - A)}}$$

Si ottiene quindi:

$$W(x, y, A, E) = \sqrt{(x^2 E - A)} - \sqrt{(-A)} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{(-A)}}{\sqrt{(x^2 E - A)}} - \frac{2}{3} \left(\sqrt{(A - y)} \right)^3$$

da cui:

$$\alpha = \frac{\partial W(x, y, A, E)}{\partial A} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{(-A)}}{\sqrt{(x^2 E - A)}} - 2\sqrt{(A - y)}\sqrt{(-A)}}{\sqrt{(-A)}}$$

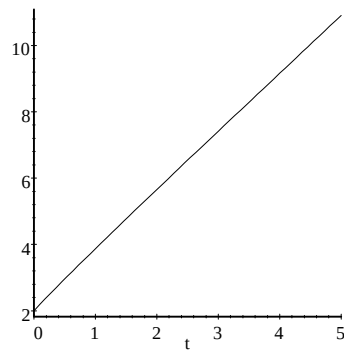
$$\beta = \frac{\partial W(x, y, A, E)}{\partial E} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(x^2 E - A)}}{E}$$

Le equazioni del moto diventano $\dot{A} = \dot{E} = \dot{\alpha} = 0$ e $\dot{\beta} = 1$ che integrate danno $\beta = \beta(0) + t$.
Si ottiene:

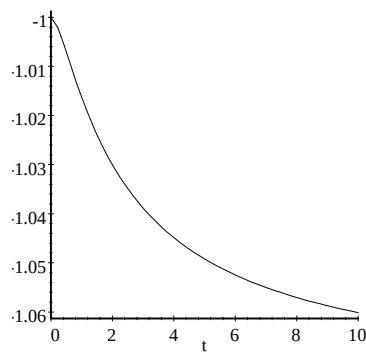
$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{(x^2 E - A)}}{E} = \beta(0) + t$$

Le condizioni iniziali danno: $E = 3/4$, $A = -1$, $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \frac{1}{2}$ per cui si ha: $4/3 = \beta(0)$
e quindi:

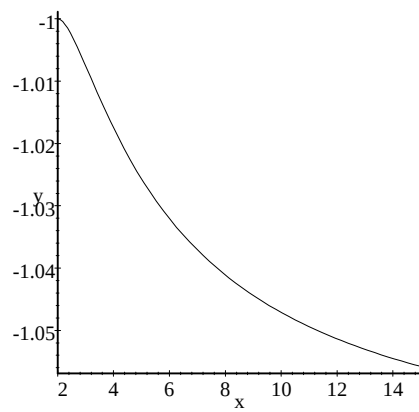
$$x = \sqrt{(4 + 8t + 3t^2)}$$



$$y = -1 - \frac{1}{4} \left(\operatorname{arctanh} \frac{1}{2} - \operatorname{arctanh} \frac{2}{4 + 3t} \right)^2$$



$$y = -1 - \frac{1}{4} \operatorname{arctanh}^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \frac{2}{\sqrt{(3x^2 + 4)}} - \frac{1}{4} \operatorname{arctanh}^2 \frac{2}{\sqrt{(3x^2 + 4)}}$$



Si noti che immediatamente e senza conti (se non quelli già fatti) si trova che $F = p_y^2 + y = A$ è una costante del moto.