Corso di Laurea in Matematica - A.A. 00/01

Esame di Meccanica Razionale - 6 luglio 2001

1) *Disegnare le orbite nello spazio delle fasi per un sistema unidimensionale con potenziale:*

$$U(x) = \frac{1}{6}x^6 - 8x^2$$

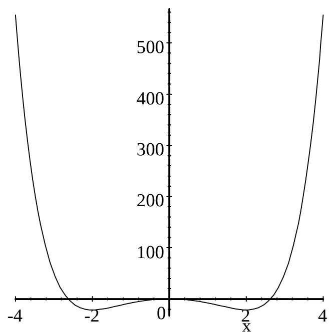
Supponendo che la massa del sistema sia 1 *(in opportune unità di misura), impostare un procedimento per calcolare il periodo T dell'orbita corrispondente a $E = 1$. Non eseguire esplicitamente il calcolo dell'integrale risultante.*

2) *Si consideri $\mathbb{R}^2$ come spazio delle fasi di un sistema meccanico monodimensionale e siano q e p coordinate simplettiche. Nella regione $p > 0$, $q > 0$ si consideri la seguente trasformazione di coordinate dipendente dal tempo:*

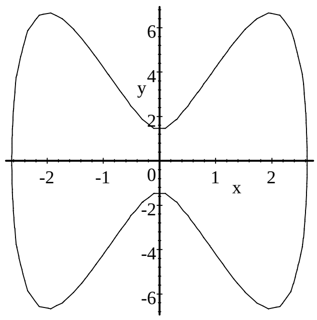
$$Q = \frac{1}{2qp}\log q - \frac{t^2}{4pq}, P = q^2p^2$$

a) Si mostri che è una trasformazione canonica.
b) Si trovi una funzione generatrice della forma $F = F(q, P, t)$.
c) Cosa diventa l'hamiltoniana $H = qpt$ nelle nuove coordinate ?
d) Si spieghi la relazione tra il punto c) e l'equazione di Hamilton-Jacobi per H.

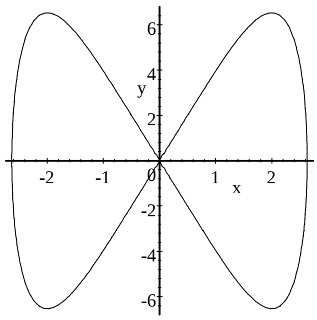
Soluzione esercizio n.1: Poiché $U'(x) = x(x^4 - 16)$ il potenziale ha tre punti critici: $x = 0$ (massimo), $x = -2$ e $x = 2$ (minimi). Si ha inoltre $U(0) = 0$, $U(2) = -\frac{64}{3}$e $U(-2) = -\frac{64}{3}$ Il grafico del potenziale è



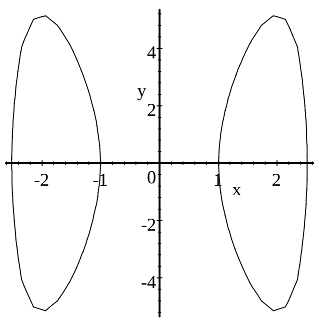
Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = +\infty$ tutte le orbite sono limitate. Per ogni $E > 0$ esiste un'unica orbita; la traiettoria è differenziabile ovunque e assume la seguente forma:



Per $E = 0$ abbiamo due orbite omocline a 0, più la soluzione costante $x(t) \equiv 0$



Per ogni $-\frac{64}{3} < E < 0$ abbiamo una coppia di orbite periodiche, la cui traiettoria è differenziabile ovunque:



Per $E = -\frac{64}{3}$ ci sono solo le due orbite costanti $x(t) \equiv \pm 2$, mentre per $E < -\frac{64}{3}$ non ci sono orbite.

Un metodo per calcolare il periodo è quello che usa la formula:

$$T = \sqrt{2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - \frac{1}{6}x^6 + 8x^2 dx}$$

L'equazione dell'orbita è: $E = p^2/2 + \frac{x^6}{6} - 8x^2$ per cui i valori estremi x_1 e x_2 della x per $E = 1$ sono dati dalle **due soluzioni reali** di $1 = \frac{x^6}{6} - 8x^2$ che stanno tra -3 e 3.

Soluzione esercizio n.2:

a) si può calcolare $dP \wedge dQ$ e si trova che è $= dp \wedge dq$

b) si deve calcolare prima $p = p(q, P, t) = \frac{\sqrt{P}}{q}$ e $Q = Q(q, P, t) = \frac{1}{2\sqrt{P}} \log q - \frac{1}{4\sqrt{P}} t^2$. A questo punto si può impostare il sistema differenziale per la $F(q, P, t)$ che, per il punto a), è certamente integrabile:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\sqrt{P}}{q}$$
$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{1}{2\sqrt{P}} - \frac{1}{4\sqrt{P}} t^2$$

Un breve calcolo fornisce:

$$F(q, P, t) = \sqrt{P} \log q - \frac{1}{2}\sqrt{P} t^2$$

c) Si usa la formula $K(P, Q, t) = H + \frac{\partial F}{\partial t}$ e si ottiene: $K = 0$.

d) Siccome $P = P(q, p, t)$ e $Q(q, p, t)$ sono costanti del moto, è ovvio che la F scritta in termini di P e q risolve H-J per H.