Teoria dei Gruppi — 15 Settembre 2004

1. Sia G un gruppo finito di ordine 4, dimostrare che c'è almeno un elemento $g \neq e$ tale che $g^2 = e$.

2. Dimostrare che il risultato dell'esercizio precedente vale per ogni gruppo finito di ordine **pari**.

3. Sia H un sottogruppo di un gruppo G e N un sottogruppo **normale**. Dimostrare che $H \cap N$ è un sottogruppo **normale** di H.

4. Sia Z_n^* il gruppo **moltiplicativo** degli elementi invertibili di Z_n :

   - Dimostrare che Z_{18}^* è ciclico trovandone un generatore.
   - Trovare due sottogruppi H e K di Z_{18}^* di ordine due e tre rispettivamente.
   - Trovare un isomorfismo tra Z_{18}^* e Z_6.

5. Sia G un gruppo **abeliano** finito di ordine n; si definisca una applicazione $f : G \to G$ mediante la formula:
   $$f(g) = g^m$$
   Dimostrare che se m è primo con n, la f è un isomorfismo.

Soluzioni teoria dei Gruppi - 15 Settembre 2004

1. Se gli elementi del gruppo sono e, a, b, c, consideriamo a^{-1}. Questo può essere a, b oppure c. Se è $a^{-1} = a$ abbiamo finito, se è $a^{-1} = b$, allora $b^{-1} = a$ e quindi deve essere necessariamente $c^{-1} = c$. Analogamente, se $a^{-1} = c$ si deduce che $b^{-1} = b$. In ogni caso ci deve essere un elemento diverso da e che coincide col suo inverso.

2. Questo stesso ragionamento si applica al caso generale di ordine n pari: tolto e restano $n - 1$ elementi che si accoppiano tramite relazioni del tipo $a^{-1} = b$. Essendo $n - 1$ dispari resta fuori almeno un elemento che, quindi, coincide col suo inverso.

3. E' una banale verifica del fatto che $hxh^{-1} \in H \cap N$ se $h \in H$ e $x \in H \cap N$.

4. $Z_{18}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$. Gli elementi 5 e 11 hanno ordine 6 e sono quindi generatori. Gli elementi 7 e 13 hanno ordine 3 ($7^3 \bmod 18 = 13^3 \bmod 18 = 1$) e 17 ha ordine 2 ($17^2 \bmod 18 = 1$). I sottogruppi richiesti sono quindi quelli generati da questi ultimi elementi:

$$\begin{aligned} H &= \{1, 17\} \\ K &= \{1, 7, 13\} \end{aligned}$$

Un isomorfismo

$$Z_{18}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\} \to Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

si ottiene accoppiando ovviamente gli elementi dello stesso ordine, ad esempio,

$$\begin{cases} 1 & \to & 0 \\ 5 & \to & 1 \\ 7 & \to & 2 \\ 11 & \to & 5 \\ 13 & \to & 4 \\ 17 & \to & 3 \end{cases}$$

Attenzione, per verificare che gli elementi accoppiati hanno il medesimo ordine, ricordarsi che Z_{18}^* è moltiplicativo, mentre Z_6 è additivo!

5. La abelianità garantisce che l'applicazione sia un omomorfismo. Il suo nucleo è dato dagli elementi g per cui $g^m = e$, e quindi si riduce a e perchè gli elementi di G possono avere solo ordini che dividono n. L'omomorfismo è quindi iniettivo. E' anche suriettivo, perchè gli elementi della forma g^m sono esattamente tanti quanti i g (per essere di meno dovrebbe accadere che $a^m = b^m$, ma allora sarebbe $(ab^{-1})^m = e$ e quindi, per quanto detto prima, $a = b$).