Teoria dei Gruppi - 22 giugno 2006

1. Sia G un gruppo e N un sottogruppo normale di ordine 2, dimostrare che N è contenuto nel centro di G.

2. Sia G un gruppo abeliano e $T(G)$ l'insieme degli elementi di G che hanno ordine finito. Dimostrare che $T(G)$ è un sottogruppo e che l'unico elemento di $G/T(G)$ di ordine finito è l'elemento neutro.

3. Scrivere le seguenti permutazioni come prodotto di cicli disgiunti, come prodotto di trasposizioni, e trovarne il segno:
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Sia G un gruppo e siano N_1, N_2 due sottogruppi normali di G con $N_1 \cap N_2 = \{e\}$ e $N_1 N_2 = G$. Mostrare che
$$G \cong G/N_1 \times G/N_2.$$
(Sugg. considerare l'applicazione $G \longrightarrow G/N_1 \times G/N_2$ data da $g \mapsto (gN_1, gN_2)$ e usare il teorema di omomorfismo).