Teoria dei Gruppi — 30 Aprile 2003

Con più di 18 punti si può fare l'orale o accettare il voto dello scritto (30 e lode per chi risolve esattamente tutti gli esercizi); con meno di 17 punti si deve rifare lo scritto; con 17 o 18 punti si è ammessi all'orale.

1. **Si considerino le seguenti permutazioni:**

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 8 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Dire se sono pari o dispari. (4 punti)

   - *a)* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ *è pari perchè prodotto di due cicli dispari.*
   - *b)* $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ *è pari perchè prodotto di due cicli dispari.*

2. **Si dimostri che $G = H \times K$ con H e K di ordini p e q (primi distinti) è ciclico. (6 punti)**

   - *H e K sono ciclici perchè hanno ordine primo. Se h e k sono i rispettivi generatori si ha che $(h,k)^l = 1_{H\times K}$ quando $h^l = 1_H$ e $k^l = 1_K$. Quindi l deve essere multiplo di p e di q. Essendo primi fra loro, l risulta divisibile per $p \times q$ e quindi l'ordine di (h,k) è $p \times q$. Allora il gruppo generato da (h,k) ha $p \times q$ elementi, e quindi coincide con G.*

3. **Si dimostri che un gruppo di ordine 153 è abeliano. (5 punti)**

   - $153 = 3^2 17$. *Si vede subito che G ha un solo $3-$Sylow (H, normale perchè unico e abeliano perchè di ordine il quadrato di un primo) e un solo $17-$Sylow (K, normale perchè unico e abeliano perchè ciclico in quanto di ordine primo). Ne segue che $G = H \times K$ con $H \cap K = 1$ e ambedue abeliani e quindi è abeliano per fatti noti.*

4. **Dare due gruppi di ordine 153 non isomorfi. (6 punti)**

   - *$G = Z_{153} = Z_9 \times Z_{17}$ è ciclico (vedi anche un'ovvia generalizzazione dell'esercizio n.2 ed il teorema cinese del resto).*
   - *$G = Z_3 \times Z_{51}$ non è ciclico perchè l'ordine di ogni suo elemento divide* 51.

5. **Dimostrare che l'espressione $(11n^{72} + 3n^{18})$ per ogni n intero è divisibile per 14. (4 punti)**

   - *Bisogna dimostrare che*
$$11n^{72} + 3n^{18} = 0 \bmod 14$$

1) n *è multiplo di* $14:$ *non c'è niente da dimostrare, il resto è ovviamente* $0.$
2) n *non è divisibile per* 14 *: Il teorema di Eulero dice che* $x^{\varphi(14)} \bmod 14 = 1$ *dove* $\varphi(14) = 6$ *e quindi, ragionando* $\bmod 14,$

$$11n^{72} + 3n^{18} = 11\left(n^{6}\right)^{12} + 3\left(n^{6}\right)^{3} = 14 = 0$$

6. **Calcolare il centro del gruppo** S^3 (quaternioni di norma 1) **e quello di** $SU(2)$. **(6 punti)**

   - *E' chiaro che* $\{\pm 1\} \subset Z(S^3)$. *Viceversa, se* $q = a + bi + cj + dk$ *commuta con ogni quaternione, in particolare si ha:* $qi = iq$ *e quindi:*

     $$ai - b - ck + dj = ai - b + ck - dj$$

     cioè $c = d = 0$. *Inoltre* $qj = jq$ *e quindi:*

     $$aj + bk = aj - bk$$

     Ne segue $b = 0$ *e, essendo* $q\bar{q} = 1$, $a = \pm 1$. *Allora* $Z(S^3) = \{\pm 1\}$. *Per* $SU(2)$ *si ricordi che gruppi isomorfi hanno centri isomorfi, per cui basta applicare al centro di* S^3 *l'isomorfismo* ρ. *Si ottiene* $Z(SU(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$