Teoria dei Gruppi - 17 luglio 2009

1. Considerato il gruppo

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

possiamo identificare il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi diversi da zero con un sottogruppo H di $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ mediante l'omomorfismo

$$\mathbb{C}^* \to H \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) : \lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

   - Dimostrare che H è normale.
   - Si consideri ora l'insieme di funzioni

   $$\mathcal{M} = \left\{ T : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0 \right\}$$

   e si mostri che è un gruppo con l'usuale legge di composizione delle funzioni.
   - Mostrare, usando il teorema di isomorfismo, che $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/H$ è isomorfo a $\mathcal{M}$.

2. Sia D_3 il gruppo diedrale di 6 elementi. Trovare[1] un sottogruppo di $O(2)$ isomorfo a D_3

   -

[1] Disegnare nel piano (x,y) un triangolo equilatero con un vertice in $(1,0)$ e simmetrico rispetto all'asse x.

Soluzioni.

Esercizio n.1

Se $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $G(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$ si ha:

$$(T \circ G)(z) = \frac{(ae+bg)\,z + (bh+af)}{(dg+ce)z + (dh+cf)} \in \mathcal{M} \tag{1}$$

perchè se $ad - bc \neq 0$ e $eh - gf \neq 0$ anche

$$(ae+bg)\,(dh+cf) - (dg+ce)(bh+af) = (ad-bc)\,(he-fg) \neq 0 \tag{2}$$

mentre l'inverso è $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.
Consideriamo ora la mappa $\Psi : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{M}$ data da

$$\Psi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Chiaramente è suriettiva. Si verifica facilmente che Ψ è anche un omomorfismo di gruppi, ovvero che date M e N in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$

$$\Psi(M \cdot N) = \Psi(M) \circ \Psi(N).$$

Si verifica anche che $\Psi(M)(z) = z$ per ogni z se e solo se $M \in H$, ovvero se e solo se $M = \lambda\,\mathrm{Id}$ per un $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Si ha quindi

$$\ker \Psi = H.$$

Dal teorema dell'omomorfismo in teoria dei gruppi segue che $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/H$ è isomorfo a $\mathcal{M}$. Il gruppo $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/H$ è molto importante in matematica, infatti ha anche un nome. Si chiama il **gruppo lineare proiettivo** e viene di solito denotato con $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$.

Esercizio n.2 :

Le simmetrie di rotazione del triangolo rispetto al centro sono date dalle matrici $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in SO(2)$ per $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ e 2π. Cioè dalle matrici:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La riflessione rispetto all'asse x è data dalla matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2)$. Se si pone:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sono verificate le relazioni che definiscono D_3 :

$$c^3 = b^2 = e, \;\; cb = bc^{-1}$$

Si trova quindi subito:

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = c, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = c^2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = bc, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = bc^2 \end{array} \right\} \subset O(2)$$