SUPERVARIETÀ

Roberto Catenacci

Dipartimento di Matematica dell'Università di Trieste

Roberto Cianci

Dipartimento di Matematica dell' Università di Milano

SUPERVARIETÀ : struttura matematica generalizzante , da un punto di vista globale, il concetto di superspazio.

1. INTRODUZIONE.

La teoria della supergravità, nella sua versione piu' semplice, puo' essere riguardata come la teoria di un campo di Rarita-Schwinger, massa zero, spin 3/2, descritta da uno spinore di Majorana Φ in interazione minimale con il campo gravitazionale.

La densita' Lagrangiana

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}(\, e_i^j,\, \Gamma_i^{jk},\, \Phi_i) \;=\; \sqrt{(-g)}\,[\; R + \varepsilon^{ijkl} D_i \Phi_j\, C \gamma_k\, \Phi_l] \quad i,j = 0,1,2,3$$

che, da un lato, fornisce le equazioni di Einstein, di Cartan e di Rarita-Schwinger variando rispettivamente rispetto ad $(e_i^j,\, \Gamma_i^{jk},\, \Phi_j)$, è, d'altra parte, invariante rispetto alle trasformazioni di supersimmetria:

$$\delta\, \Phi_k \;=\; D_k \epsilon, \qquad \delta e_i^j \;=\; \epsilon C \gamma^j \Phi_i$$

dove $\epsilon = \epsilon(x)$ è un arbitrario campo spinoriale a spin 1/2. $\mathcal{L}$ fornisce le **stesse** equazioni di campo della densita' lagrangiana

$$L = \int \det(E_A^B)\, d^4x\, d^4\theta$$

definita nella maniera che segue.

Sia Γ_L l'algebra di Grassman (esterna) costruita su R^L; essa risulta graduata in maniera naturale in forme pari e forme dispari

$$\Gamma_L = \Gamma_{L,0} \oplus \Gamma_{L,1}$$

e tale graduazione da' luogo ad una struttura graduata commutativa: gli elementi di $\Gamma_{L,0}$ commutano tra di loro e con gli elementi di $\Gamma_{L,1}$; viceversa, gli elementi di $\Gamma_{L,1}$ anticommutano tra di loro. Sia $\Gamma_L^{m,n}$ il prodotto cartesiano di m copie di $\Gamma_{L,0}$ ed n copie di $\Gamma_{L,1}$ rispettivamente e sia (x^i, θ^α) un suo generico elemento. $\Gamma_L^{m,n}$ viene detto il *superspazio*. L'indice i corre sulle m coordinate *pari* o *bosoniche* mentre l'indice α sulle n coordinate *dispari* o *fermioniche*. Sinteticamente, usando coordinate $Z^A = (x^i, \theta^\alpha)$ su $\Gamma_L^{m,n}$, con E_A^B denotiamo le componenti di un sistema di riferimento $E^A = dx^B\, E_B^A$. Posti alcuni vincoli cinematici sul campo di torsione, la Lagrangiana L fornisce le *stesse* equazioni di campo di $\mathcal{L}$. Torneremo nel seguito a studiare la natura matematica dell'integrale alla **Berezin** $\int d^4x d^4\theta$; per ora è interessante notare il legame tra le teorie di campo sullo spazio-tempo e sul superspazio. In ogni caso, il suggerimento che la teoria della supergravita' possa avere un'interpretazione geometrica è evidente e motiva la ragione per cui il superspazio è stato introdotto.

Naturalmente, tutto lo sviluppo di idee e di modelli fisici cui si è accennato ha stimolato lo studio parallelo di strutture e metodi di natura matematica volto essenzialmente ad analizzare gli aspetti globali della teoria che il superspazio, per la sua natura locale, non poteva contenere.

Tali linee di ricerca si sono precisate e sviluppate in modo autonomo, fino alla costruzione di nuovi oggetti geometrici, collettivamente denotati come *supervarietà*. Storicamente, le supervarietà hanno avuto duplice origine. I primi lavori, dovuti a **Berezin** e **Leites** e **Kostant** nascono dallo studio della matematica dei campi fermionici: l'approccio è quello di considerare un'ordinaria varietà differenziabile M ed *arricchire* il fascio delle funzioni C^∞ su essa al un fascio delle algebre graduate $C^\infty(M) \otimes \Gamma_L$.

Il secondo, e più geometrico approccio dovuto a **Rogers** e , parallelamente a **DeWitt**, nasce direttamente dal superspazio.

Sotto un certo punto di vista, il superspazio sta alla supervarietà come lo spazio vettoriale R^L sta alle usuali varietà differenziabili. Spieghiamo meglio questo parallelo che è alla base della idea di supervarietà: per costruire una varietà differenziabile si puo' pensare di *incollare* insieme , tramite opportune funzioni di transizione, diversi aperti di R^L. Analogamente, incollando insieme diversi aperti di $\Gamma_L^{m,n}$, tramite opportune funzioni di transizione, si attua la procedura di costruzione di una supervarietà .

Nell'esposizione seguente ci concentreremo sugli aspetti di questa seconda teoria piu' simile, come metodi e concetti, alla geometria differenziale usata in fisica e che contiene tutti gli altri approcci come casi particolari.

2. PRELIMINARI ALGEBRICI

Sia L un intero positivo e sia Γ_L l'algebra di Grassman reale su R^L (algebra delle forme) con generatori

$$1, \beta_1, ..., \beta_L$$

dove i β_i sono una base di R^L e con le relazioni

$$1\beta_i \;=\; \beta_i 1 \;=\; \beta_i \quad , \quad \beta_i\,\beta_j \;=\; -\beta_j\,\beta_i \quad \text{per} \quad i, j = 1, ..., L.$$

Sia M_L l'insieme delle sequenze finite di interi positivi $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k)$ con $1 \leq \mu_1 < \mu_2 ... < \mu_k \leq L$ e sia ϕ la sequenza vuota; allora per ogni $\mu \in M_L$ si ha

$$\beta_\mu := \beta_{\mu_1}\beta_{\mu_2}...\beta_{\mu_k} \quad \text{e} \quad \beta_\phi = 0.$$

Il tipico elemento di Γ_L si scrive come

$$x \;=\; \sum_{\mu \in M_L} x_\mu \beta_\mu$$

con $x_\mu \in R$. Con la norma:

$$\| x \| = \sum_{\mu \in M_L} | x_\mu | ,$$

Γ_L diventa uno *Spazio di Banach* ed inoltre *un'algebra di Banach*; in altri termini valgono

$$\| 1 \| = 1 \quad \text{e} \quad \| ab \| \leq \| a \| \| b \|$$

per ogni a e b. Γ_L è Z_2 graduato commutativo, cioè

$$\Gamma_L = \Gamma_{L,0} \oplus \Gamma_{L,1} \qquad \text{dove}$$

$$\Gamma_{L,0} = \{x \text{ tali che } \mu \text{ è } \phi \text{ oppure è costitutita da un numero pari di } \mu_i\} \quad \text{e}$$

$$\Gamma_{L,1} = \{x \text{ tali che ogni } \mu \text{ è costitutita da un numero dispari di } \mu_i\}.$$

$\Gamma_{L,0}$ si dice parte pari e $\Gamma_{L,1}$ parte dispari di Γ_L.

Si ottiene immediatamente che :

$$\Gamma_{L,0}\,\Gamma_{L,0} \subset \Gamma_{L,0} \;\; , \;\; \Gamma_{L,1}\,\Gamma_{L,1} \subset \Gamma_{L,0}$$

$$\Gamma_{L,0}\,\Gamma_{L,1} \subset \Gamma_{L,1} \;\; \text{e} \;\; \Gamma_{L,1}\,\Gamma_{L,0} \subset \Gamma_{L,1};$$

inoltre

$$ab = (-1)^{(pq)} ba \quad \text{ se } a \in \Gamma_{L,p} \text{ e } b \in \Gamma_{L,q} \text{ con } p, q = 0, 1;$$

tali proprietà si riassumono dicendo che Γ_L è un'algebra di Banach Z_2-graduata commutativa.

Esempio

Consideriamo Γ_2 generata su R^2 da $1, e_1, e_2$ dove il prodotto è l'usuale prodotto esterno; se $a \in \Gamma_2$ scriviamo $a = A + Be_1 + Ce_2 + De_1 \wedge e_2$ dove $A, B, C, D \in R$ e $\Gamma_{2,0} = A + De_1 \wedge e_2$, $\Gamma_{2,1} = Be_1 + Ce_2$. Il numero L di generatori dell'algebra di Grassman Γ_L è apparentemente libero e privo di reale significato fisico, per cui è interessante (anche per evitare arbitrarie cancellazioni nelle moltiplicazioni di supercampi) cercare di estendere le considerazioni precedenti al caso $L = \infty$.

Tre distinti approcci sono stati proposti: il primo consiste nel considerare l'algebra delle forme su "R^∞"; il secondo, più astratto, nel definire assiomaticamente e studiare le proprieta' di un'algebra di Banach-Grassman Z_2-graduata commutativa; il terzo infine, molto recente, consiste nel definire una immersione naturale di Γ_L in $\Gamma_{L,1}$ e passare al limite in L nel senso delle categorie.

Descriveremo ora con qualche dettaglio il primo di questi approcci.

Sia R^∞ lo spazio delle successioni di numeri reali $x = (x_1, x_2, ...)$ tali che $\sum_{i=1}^\infty \mid x_i \mid < +\infty$; con l'usuale norma $\parallel x \parallel = \sum_{i=1}^\infty \mid x_i \mid$, R^∞ è uno spazio di Banach. Vogliamo ora definire una moltiplicazione che la renda algebra di Banach Z_2-graduata commutativa. Per far cio' è conveniente indiciare gli x_i con elementi di $M_\infty = \bigcup_{L=1}^\infty M_L$ osservando che ogni intero positivo r puo' essere scritto univocamente come

$$r = \frac{1}{2}(2^{\mu_1} + 2^{\mu_2} + ... + 2^{\mu_k})$$

per certi interi positivi

$$1 \leq \mu_1 < \mu_2 ... < \mu_k$$

Cio' stabilisce una corrispondenza biunivoca

$$r \leftrightarrow (\mu_1, ..., \mu_k) := \mu \in M_\infty$$

(ad esempio $1 \leftrightarrow 1$,$2 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow (1,2)$, $4 \leftrightarrow 3$, $5 \leftrightarrow (1,3)$ ecc...).

Sia ora β_μ la successione di R^∞ composta di tutti 0 e 1 nella posizione μ-esima secondo la nuova numerazione

$$(x_1, x_2, x_3, ...) \rightarrow (x_1, x_2, x_{(1,2)}, ...),$$

allora il generico $x \in R^\infty$ si scrive

$$x = \sum_{\mu \in M_\infty} x_\mu \beta_\mu \quad \text{con} \quad \sum_{\mu \in M_\infty} \mid x_\mu \mid < +\infty.$$

La moltiplicazione cercata è definita da:

$$\beta_\phi \, \beta\mu \; = \; \beta_\mu \, \beta_\phi \; = \; \beta_\mu \quad , \quad \beta_{(i)} \, \beta_{(j)} \;\; = \;\; -\beta_{(j)} \, \beta_{(i)}$$

$$\beta_{(\mu_1)}\,\beta_{(\mu_2)}...\beta_{(\mu_k)} \;:=\; \beta_\mu$$

per ogni i, j interi positivi e per ogni $\mu \in M_\infty$. Tale prodotto si puo' estendere per linearità a tutto R^∞:

$$\sum_{\mu \in M_\infty} a_\mu\, \beta_\mu \;\sum_{\nu \in M_\infty} b_\nu\, \beta_\nu \;=\; \sum_{\mu,\nu \in M_\infty} a_\mu\, b_\nu\, \beta_\mu\, \beta_\nu;$$

si puo' dimostrare che, con tale prodotto, R^∞ diventa un'algebra di Banach Z_2-graduata commutativa detta Γ_∞. Nel seguito, se non necessario, non indicheremo piu' il numero di generatori, denotando con Γ sia Γ_L che Γ_∞.

Sia ora $\Gamma^{m,n} \;=\; \Gamma_0^m \times \Gamma_1^n$ il prodotto cartesiano di m copie della parte pari ed n copie della parte dispari di Γ. Il tipico elemento di $\Gamma^{m,n}$ sara' scritto come (x, θ) dove $x = (x^1, ..., x^m) \in \Gamma_0^m$ ed $\theta = (\theta^1, ..., \theta^n) \in \Gamma_1^n$ con $x^i \in \Gamma_0$ ed $\theta^\alpha \in \Gamma_1$.

Una norma su $\Gamma^{m,n}$ è data da $\parallel (x, \theta) \parallel = \parallel x^1 \parallel + ... + \parallel \theta^n \parallel$; con la topologia indotta dalla norma, $\Gamma^{m,n}$ è spazio di Hausdorff e, se L è finito, la topologia è quella usuale di $R^{2^{L-1}(m+n)}$. $\Gamma^{m,n}$ sara', come gia'detto, il *modello locale* di una supervarietà.

Osservando che R è contenuto in Γ, una utile mappa è la mappa *corpo* $\varepsilon : \Gamma \to R$ ottenuta proiettando $b \;=\; \sum_\mu b_\mu\, \beta_\mu$ sulla sua *parte reale* $\varepsilon(b) \;=\; b_\phi$. Questa proiezione si puo' estendere a $\varepsilon : \Gamma^{m,n} \to R^m$ in modo ovvio:

$$\varepsilon(x^1, ..., x^m, \theta^1, ..., \theta^n) \;=\; (\varepsilon(x^1), ..., \varepsilon(x^m)).$$

3. FUNZIONI SUPERDIFFERENZIABILI

Sia U un aperto di $\Gamma^{m,n}$ e $f : U \to \Gamma$.

1) f è detta di classe G^0 in U se e continua in U

2) f è detta di classe G^1 in U se esistono $m + n$ funzioni $G_k f \;:\; U \;\to\; \Gamma$ per $k = 1, ..., m + n$ ed una funzione $\eta : U \to \Gamma$ tali che , se (x, θ) ed $(x + h, \theta + \varphi)$ appartengono ad U allora vale:

$$f(x+h, \theta+\varphi) = f(x, \theta) + \sum_1^m h_i\, G_i f(x, \theta) + \sum_1^n \varphi_j\, G_{j+m} f(x, \theta) + \parallel (h, \varphi) \parallel \; \eta(h, \varphi)$$

ed $\| \eta(h,\varphi) \| \rightarrow 0$ se $\| (h,\varphi) \| \rightarrow 0$.

3) La definizione di funzione di classe G^p è fatta ricorsivamente: f è G^p se è G^1 e se è possibile prendere le $G_k f$ di classe G^{p-1}.

4) f è G^∞ (cioè *superliscia*) se è G^p per ogni p positivo.

La prima osservazione importante è che , se L è finito ed $m+1 \leq k \leq n$ le "*derivate parziali*" $G_k f$ non sono univocamente definite da f: alle $G_k f(x,\theta)$ puo' essere sommato, per esempio, un qualsiasi elemento di grado massimo; un esempio di funzione G^∞ $f : \Gamma_L^{2,2} \rightarrow \Gamma_L$ con $L > 1$ è :

$$f(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) \;=\; x_1 x_2^2 \theta_1 \theta_2; \qquad \text{si ha:}$$

$$G_1 f \;=\; x_2^2 \theta_1 \theta_2 \;,\; G_2 f \;=\; 2 x_1 x_2 \theta_1 \theta_2$$

$$G_3 f \;=\; x_1 x_2^2 \theta_2 \;,\; G_4 f \;= -\, x_1 x_2^2 \theta_1 .$$

La seconda osservazione è che ogni funzione G^∞ è automaticamente C^∞ pensata come funzione tra spazi di Banach.

La terza osservazione è che, se si tenta di sviluppare la teoria delle funzioni G^∞, l'ambiguita nelle derivate parziali rispetto alle variabili anticommutanti (nel caso L finito) porta a far cadere la regola di Leibnitz; a sua volta, cio' portera' ad una insoddisfacente teoria dei campi vettoriali sulle supervarieta'.

Possibili soluzioni a questi problemi sono:

1) limitarsi al caso $L = \infty$, oppure

2) alterare la definizione di funzioni G^∞ definendo invece altre classi di funzioni, dette H^∞ e GH^∞, a loro volta definite solo su particolari aperti. Questo ultimo tentativo molto tecnico e non ancora compreso in tutti i suoi dettagli, si ricollega con l'approccio alla teoria dei fasci già accennato.

Tornando a riferirsi alle funzioni G^∞ già viste, vediamo ora una definizione alternativa nel caso $L = \infty$.

Una funzione $f : U \rightarrow \Gamma$ è G^∞ se è C^∞ differenziabile secondo Fréchet e se ha differenziale Γ_0-lineare:

$$(Df)(qY) \;=\; q\, Df(Y)$$

per ogni elemento q di Γ_0 ed ogni Y di $\Gamma^{m,n}$.

Nel caso $L < \infty$ le funzioni G^∞ possono essere caratterizzate in modo semplice mediante il processo di *estensione Grassmaniana* , o *estensione* z, di una funzione C^∞ da un aperto di R^m in Γ_L.

Sia V on aperto in $\Gamma_L^{m,n}$ e $U = \varepsilon(V)$; supponiamo $L > n$. f è G^∞ in V se esistono delle funzioni f_μ C^∞ da U a Γ_L tali che:

$$f(x,\theta) \;=\; \sum_{\mu\in M_n} z\,(f_\mu)(x)\,\theta^\mu \qquad \text{dove} \qquad \theta^\mu = \theta^{\mu_1}...\theta^{\mu_k},$$

$$z\,f_\mu(x_1,...,x_m) \;=\; \sum_{i_1,...,i_m=0}^{L} A\,(\partial_1^{i_1}...\partial_m^{i_m})\,f_\mu(\varepsilon(x_1)),...,\varepsilon(x_m))\,s(x^1)^{i_1},...,s(x^m)^{i_m},$$

$s(x^i) \;=\; x^i - \varepsilon(x^i)$ ed $A \;=\; \frac{1}{i_1!\,i_2!\,,...,\,i_m!}$. Questa formula è detta anche lo sviluppo della f nei *supercampi* fermionici.

Vediamo l' esempio dell'estensione Grassmaniana in $\Gamma_L^{1,0}$ della funzione $f(x) \;=\; \frac{1}{x}$, che è C^∞ in $R\,-\,\{0\}$.

$$z\,f(Z) \;=\; \sum_{n=0}^{L}\frac{1}{n!}\left(\partial^{(n)}\frac{1}{x}\right)(Z-\varepsilon(Z))^n \;=\; \frac{1}{\varepsilon(Z)}\sum_{n=0}^{L}(-1)^n\left(\frac{Z-\varepsilon(Z)}{\varepsilon(Z)}\right)^n.$$

4. SUPERVARIETÀ

Sia M uno spazio topologico; una carta locale per M è una coppia (U,ψ) con U aperto di M e ψ un omeomorfismo di U su $\Gamma^{m,n}$.

Un atlante è una collezione di carte che ricoprono M e tali che, se $U_\alpha \bigcup U_\beta \neq \emptyset$, $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ è una mappa da $\psi_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta)$ G^∞ per ogni α e β. Una *supervarietà* è uno spazio topologico M dotato di un atlante massimale di questo tipo. Tutti i concetti usuali (funzioni G^∞ tra supervarietà, superdiffeomorfismi, sottovarietà ecc.) si possono trasportare in questo contesto con lievi modifiche.

Esempi di Supervarietà

Esempio 1. $S^1 \times S^1$

$S^1 \times S^1$ è una supervarietà su $\Gamma_1^{1,1}$: denotando gli elementi di Γ_1 nella maniera $x + y\theta$ con $\theta^2 = 0$ abbiamo coordinate $(x, y\theta) \in \Gamma_L^{1,1}$;

consideriamo l'intersezione di due strisce di $\Gamma_L^{1,1}$:

$$I = \alpha(x-1) \leq y \leq \alpha(x+1) \quad , \quad II = -\alpha(x+1) \leq y \leq -\alpha(x-1)$$

per $\alpha \in R^+$; identifichiamo ora i contorni di I con $(a, b\theta) \to (a-1, (b+\alpha)\theta)$ e quelli di II con $(a, b\theta) \to (a-1, (b+\alpha)\theta)$. Questa operazione è G^∞ e il *toro* risultante ha una struttura G^∞.

Esempio per $\alpha = 1$

Esempio 2. Spazio proiettivo (m, n) dimensionale su Γ.

Gli elementi non invertibili dell'algebra Γ sono tutti e soli quelli a corpo nullo. Si consideri

$$(\Gamma^{m+1,n})^\star \;=\; \Gamma^{m+1,n} - \{(x, \theta) \in \Gamma^{m+1,n} | \varepsilon(x) = 0\}.$$

L'anello Γ_0 privato degli elementi non invertibili è un gruppo $\Gamma_0^\star$ che opera liberamente su $(\Gamma^{m+1,n})^\star$ e definisce quindi una relazione di equivalenza

$$(a, b) \sim (a', b') \;\text{ se e solo se esiste }\; c \in \Gamma_0^\star \quad \text{tale che} \quad a' = ca \,,\; b' = cb$$

Possiamo definire lo spazio proiettivo:

$$P^{m,n}(\Gamma) \;=\; (\Gamma^{m+1,n})^{\star}/\sim$$

In analogia con i proiettivi reali e complessi si verifica che $P^{m,n}(\Gamma)$ ha una struttura di supervarietà ereditata da $\Gamma^{m+1,n}$.

Un ricoprimento di $P^{m,n}(\Gamma)$ è dato da :

$$U_k \;=\; \{[a,b] \in P^{m,n}(\Gamma) \mid \varepsilon(a_k) \neq 0\}$$

Esiste inoltre una biiezione tra gli U_k e gli iperpiani H_k di $\Gamma^{m+1,n}$

$$[(a_1,...,a_k,..,a_m,b_1,...,b_n)] \to (\frac{a_0}{a_k},...,\frac{a_{k-1}}{a_k},\frac{a_{k+1}}{a_k},...,\frac{a_m}{a_k},\frac{b_1}{a_k},...,\frac{b_n}{a_k})$$

dove

$$\frac{1}{a_k} = \varepsilon\left(\frac{1}{a_k}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{a_k-\varepsilon(a_k)}{\varepsilon(a_k)}\right)^n$$

D'altra parte, ogni H_k è in corrispondenza biunivoca con $\Gamma^{m,n}$ tramite la formula:

$$(a_0,...,1,...,a_m,b_1,...,b_n) \to (a_0,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_m,b_1,...,b_n).$$

Le applicazioni composte $\phi_k\colon U_k \to \Gamma^{m,n}$ sono biunivoche e consentono di trasportare la topologia di $\Gamma^{m,n}$ su U_k. Mostriamo ora le funzioni di transizione

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x_1,...,x_m,\theta_1,...,\theta_n) \;=\; (\frac{x_1}{x_j},...,\frac{1}{x_j},...,\frac{x_m}{x_j},\frac{\theta_1}{x_j},...,\frac{\theta_n}{x_j});$$

essendo la funzione $f(a)=\frac{1}{a}$ G^∞ per $\varepsilon(a)\neq 0$ anche le $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ lo sono.

Esempio 3. Estensione Grassmaniana di una varietà differenziabile M_0.

Data un'ordinaria varietá differenziabile M_0, m dimensionale e C^∞ esiste un modo canonico di costruire una supervarietà M $(m,0)$ dimensionale G^∞ tale che M_0 sia il *corpo* di M (vedi sez. 5).

Sia (U_α,ψ_α) un atlante per M_0; per ogni α consideriamo il sottoinsieme V_α di $U_\alpha \times \Gamma^{m,0}$ definito da

$$V_\alpha \;=\; \{(x,y) \;\text{ tali che }\; x\in U_\alpha,\, y\in\Gamma^{m,0} \;\text{ ed }\; \varepsilon(y)=\psi_\alpha(x)\}$$

Definiamo ora un omeomorfismo $\chi_\alpha : V_\alpha \to \Gamma^{m,0}$ come $\chi_\alpha(x,y) = y$. Costruita l'unione disgiunta dei V_α, definiamo una relazione di equivalenza: $(x,y) \sim (x',y')$ se e solo se $(x,y) \in V_\alpha$, $(x',y') \in V_\beta$, $x = y$ ed $y' = z\,(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})(y)$.

L'insieme quoziente forma la supervarietà M; è immediato vedere che le funzioni di transizione così generate sono superlisce.

Vediamo ora quali dei concetti normalmente usati nelle usuali varietá differenziabili si lasciano trasportare anche nel contesto delle supervarietà ; prima di tutto, vediamo la nozione di vettore applicato in punto p di M.

Una maniera spesso usata per costruire lo spazio $T_p(M)$ dei vettori applicati in p è quella di riguardare i vettori come classi di equivalenza di curve che hanno un contatto del primo ordine in p; piu' precisamente siano $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ due curve passanti per p al valore 0 del parametro reale t. Usando coordinate $X^A = (x^i, \theta^\alpha)$ in un intorno di p, si dice che γ_1 e γ_2 sono equivalenti in p se vale:

$$\frac{d}{dt}X^A(\gamma_1(t))|_{t=0} \;=\; \frac{d}{dt}X^A(\gamma_2(t))|_{t=0}$$

In questo caso, esse danno luogo al vettore applicato Y in p dato dalla:

$$Y^A \;=\; (Y^i, Y^\alpha) \;=\; \frac{d}{dt}X^A(\gamma(t))|_{t=0} \;=\; [\frac{d}{dt}x^i(t),\, \frac{d}{dt}\theta^\alpha(t)]|_{t=0}$$

$\gamma(t)$ puó essere indifferentemente $\gamma_1(t)$ o $\gamma_2(t)$.

In totale analogia con il caso standard, con $T(M)$ si denota il *fibrato* dei vettori tangenti su M. Un'interessante osservazione: denotando come al solito i vettori nella forma

$$Y \;=\; Y^A \frac{\partial}{\partial x^A},$$

si nota che un vettore tangente può avere componenti pari solo lungo le direzioni pari $\frac{\partial}{\partial x^i}$ e, viceversa, può avere componenti dispari solo lungo le direzioni dispari: ne segue che $\frac{\partial}{\partial x^i}$ è un vettore tangente perchè la componente 1, come numero reale, sta in Γ_0; viceversa, per lo stesso motivo, $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ non è un vettore tangente. Per questo motivo **non** ogni vettore tangente si potrà scrivere come $\frac{\partial}{\partial x^A}$ tramite un'opportuna scelta di coordinate: al contrario, facendo uso del teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali alle derivate ordinarie sugli spazi di Banach, ogni campo vettoriale tangente puó essere localmente integrato, per dar luogo ad un flusso locale regolare e superliscio.

Anche se non in maniera sempre ovvia, i concetti fondamentali delle supervarietà si ricostruiscono dagli analoghi concetti nella teoria delle varietá di Banach. E' cosi' il caso del fibrato *cotangente* $T^\star(M)$ le cui sezioni G^∞ dette *forme differenziali* sono operatori Γ_0-lineari del tipo $\omega = dx^B \omega_B$ che agiscono sui campi vettoriali come :

$$\omega(Y) = Y(\omega) = Y^A \frac{\partial}{\partial x^A}(dx^B \omega_B) = Y^A \omega_A$$

In maniera analoga, si possono estendere senza eccessiva difficolta' i simboli di *prodotto interno* $\lrcorner$, *prodotto wedge* $\wedge$, e *prodotto tensoriale* $\otimes$ con il loro usuale significato.

Qualche cenno, anche in vista della sua importanza applicativa, merita la teoria dell'integrazione in presenza di coordinate fermioniche; il discorso verrà trattato solo da un punto di vista locale (cioè su un aperto di $\Gamma^{m,n}$), in quanto tutte le caratteristiche del problema si presentano anche in questo caso particolare.

Il punto di partenza è l'integrale di **Berezin**. Sia U un aperto di R^m (misurabile secondo Riemann o Lebesgue) ed f una funzione G^∞ a valori in Γ tale che:

a) il suo dominio sia $U \times \Gamma_1^n \subset \Gamma^{m,n}$,

b) f ammetta il seguente sviluppo in funzioni C^∞:

$$f(x,\theta) = \sum_{\mu \in M_n} f_\mu(x)\theta^\mu = f_\phi(x) + f_{(1)}(x)\theta^1 + ... + f_{(1,\dots,n)}\theta^1 ... \theta^n$$

dove le f_μ sono funzioni da U a R.

L'integrale di Berezin è definito come:

$$\int f(x,\theta) d^m x d^n \theta = \int_U f_{(1,\dots,n)}(x)\, d^m x$$

dove $\int_U$ è l'ordinario integrale. Questa procedura contiene le usuali e note *regole di Berezin*:

$$\text{se} \quad f \equiv 1 \quad \text{allora} \quad \int d^m x d^n \theta = 0 \quad (\text{ ovvero } \quad \int d^n \theta = 0 \ ),$$

$$\text{se} \quad f \equiv \theta^1 \theta^2 ... \theta^n \quad \text{si ha} \quad \int \theta^1 \theta^2 ... \theta^n d^m x d^n \theta = \quad \text{misura di } U,$$

(ovvero $\int \theta^1 \theta^2 ... \theta^n d^n \theta = 1$). Nonostante il grande interesse applicativo, questa definizione, è molto insoddisfacente dal punto di vista concettuale. In primo luogo si applica solo a funzioni molto particolari e, in secondo luogo, non ammette nessuna interpretazione di tipo " teoria della misura " o " primitiva di una funzione ". Inoltre, l'integrale non è invariante rispetto alla più generale trasformazione di coordinate , ma solo ad un sottoinsieme così ristretto da escludere le trasformazioni di supersimmetria.

L'estensione della teoria dell'integrazione a funzioni G^∞ definite su aperti di $\Gamma^{m,n}$ presenta notevoli problemi e non ha ancora raggiunto uno stato pienamente soddisfacente. La procedura correntemente utilizzata, anche se non giustificata, consiste nel trattare il simbolo $\int ... d^m x \ d^n \theta$, dove ora x sta in Γ_0^n e θ in Γ_1^n, effettuando **prima** l'integrazione nelle variabili anticommutanti θ secondo le regole di Berezin e , **poi** l'integrale nelle variabili commutanti x con le regole formali delle funzioni di variabile reale.

Esempio in $\Gamma^{1,1}$

$$\text{se} \quad f(x, \theta) = x^2 + x\theta \quad \text{per} \quad a < \varepsilon(x) < b \quad \text{allora}$$

$$\int (x^2 + x\theta) d^m x d^n \theta = \int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

5. CORPO DI UNA SUPERVARIETÁ

Subito dopo l'introduzione delle supervarietà, molti tentativi sono stati fatti per studiare le relazioni con le ordinarie varietà. La comprensione di questi temi è infatti un punto cruciale in vista delle applicazioni alle teorie della supergravità.

Il problema nasce dalla seguente idea: si è visto che l'algebra Γ contiene R e quindi $\Gamma^{m,n}$ contiene R^m. La domanda che ci si pone è: esiste un'ordinaria varietà differenziabile C^∞ m-dimensionale M_0, che diremo *varietà corpo* di M, contenuta in M?

L'importanza di tale varietà consiste nel fatto che , se esiste, è la candidata naturale a giocare il ruolo dello spaziotempo o, almeno, di una varietà che fornirà lo spaziotempo dopo riduzione dimensionale. Vedremo che solo una certa classe di supervarietà ammettono corpo. Si può dimostrare che ogni G^∞ varietà è foliata: cioè si può definire un sottofibrato involutivo Σ del fibrato tangente considerando i vettori tangenti le cui componenti non hanno corpo. § Il corpo di una supervarietà esiste sempre come insieme ed è definito come lo spazio dei fogli di Σ. Come è noto, non sempre ad uno spazio di fogli si può dare la struttura di varietà C^∞; quando ciò è possibile la foliazione si dice regolare e la supervarietà ammette corpo M_0.

Un esempio di varietà G^∞ che non ammette corpo è il toro $S^1 \times S^1$ per α irrazionale: in questo caso, il corpo è ridotto ad un punto; il secondo esempio $P^{m,n}(\Gamma)$ fornisce invece un caso di supervarietà con corpo; il corpo è $P^m(R)$, lo spazio proiettivo reale. In quest'ultimo esempio, la struttura globale di $P^{m,n}(\Gamma)$ si presenta come un fibrato vettoriale sul suo corpo; è ancora aperta la questione se ogni supervarietà semplicemente connessa che ammetta corpo abbia necessariamente la struttura di un fibrato vettoriale sul suo corpo;(il toro $S^1 \times S^1$ con $\alpha = 1$ fornisce un esempio di supervarietà compatta con corpo e che non è , ovviamente, un fibrato vettoriale).

---

§ Ricordiamo che una foliazione su una varietà è un *affettamento* della varietà in sottovarietà di data dimensione, detti fogli, e tali che, ogni punto della varietà giace in un unico foglio. Le fibre di un fibrato sono un esempio di questo fenomeno; le foliazioni però possono essere molto più complicate con fogli non omeomorfi tra loro. Nel nostro caso i fogli sono costituiti da sottovarietà i cui vettori tangenti sono senza corpo.

6. SUPERGRUPPI

A partire dal concetto di supervarietà vengono costruite alcune strutture matematiche estremamente utili per la costruzione delle teorie di campo.

Notevoli sono i concetti di *Supergruppo* G , del suo spazio tangente nella identità $T_e(G)$ ed il legame fra quest'ultimo e il supergruppo stesso.

Un *supergruppo* G è essenzialmente una supervarietà che è anche gruppo topologico; viene richiesto che l'operazione di composizione sia una funzione binaria *superliscia* quando espressa tramite le coordinate locali.

Come per i gruppi di **Lie** , si puo' dimostrare che l'operazione di composizione è necessariamente anche *analitica*.

Una differenza tra la teoria dei gruppi di Lie e quella dei supergruppi è però notevole: mentre ad un gruppo topologico può essere data una sola struttura analitica che lo renda gruppo di Lie, uno *stesso* gruppo topologico $\mathcal{G}$ può, tramite due atlanti incompatibili, dar luogo a due *diversi* supergruppi G e $\mathbf{G}$; ovviamente, G e $\mathbf{G}$ sono identici, se riguardati solo come varietà di Banach.

Due atlanti (U_α, ϕ_α) e $(V_\mu \psi_\mu)$ sono detti incompatibili se, per un certo $p \in U_\alpha \bigcap V_\mu$, l'applicazione $\psi_\mu^{-1} \circ \phi_\alpha$ **non** è superliscia.

Esempio di Supergruppo: $GL(m, n)$ il gruppo generale lineare graduato degli automorfismi di $\Gamma^{m,n}$.

Sia $gl(m, n)$ l'insieme delle matrici $(m + n) \times (m + n)$ tali che, poste nella forma:

$$A_B^C = \begin{pmatrix} A_i^j & A_i^\alpha \\ A_\mu^j & A_\mu^\alpha \end{pmatrix}$$

risulti

$$A_i^j \, , \, A_\mu^\alpha \;\in \Gamma^0 \quad , \quad A_i^\alpha \, , \, A_\mu^j \quad \in \Gamma^1 .$$

Il sottoinsieme di $gl(m, n)$ per cui

$$\det \varepsilon(A) = \begin{pmatrix} \varepsilon(A_i^j) & 0 \\ 0 & \varepsilon(A_\mu^\alpha) \end{pmatrix} \neq 0,$$

dotato del prodotto “ righe per colonne”:

$$(AB)_C^D \; := \; A_C^E \; B_E^D$$

forma il supergruppo $GL(m,n)$. L'identità e la matrice inversa sono rispettivamente :

$$\delta_A^B \;=\; \begin{pmatrix} \delta_i^j & 0 \\ 0 & \delta_\mu^\alpha \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \;=\; A_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-A_0^{-1} A\right)^n$$

dove $A_0 \;=\; \varepsilon(A)$.

Esattamente come per i gruppi di Lie, grande importanza hanno i campi vettoriali tangenti X ad un supergruppo G che sono invarianti rispetto alla moltiplicazione sinistra; detta L_a l'operazione di moltiplicazione sinistra $L_a b = ab$, essi soddisfano il requisito

$$L_{a\star} X = X$$

L'operazione di commutatore su questi campi, induce su essi, quando ristretti all'identità e di G una struttura di Modulo di Lie graduato. In altri termini, dato $\{\chi_A\}$ per $A = 1, ..., m+n = dimG$ un insieme di generatori di $T_e(G)$, vale:

$$[\chi_A, \chi_B]_\pm = C_{AB}^C\, \chi_C.$$

Il commutatore ora scritto è graduato nel senso che vale

$$[\chi_A, \chi_B]_\pm \;=\; \chi_A \chi_B - \chi_B \chi_A (-1)^{AB}$$

dove $(-1)^{AB}$ è definito come -1 se tanto A che B si riferiscono a coordinate in Γ_1 ed $+1$ negli altri casi.

I termini C_{AB}^C sono delle costanti, dette *costanti di struttura*, che godono della seguente proprietà detta di antisimmetrizzazione graduata negli indici AB:

$$C_{AB}^C = -(-1)^{AB} C_{BA}^C.$$

Eseguendo un'ulteriore commutazione tra i campi χ_A si ottiene la *identità di Jacobi graduata*:

$$\left[\chi_A, [\chi_B, \chi_C]_\pm\right]_\pm = \left[[\chi_A, \chi_B]_\pm, \chi_C\right]_\pm + (-1)^{AB} \left[\chi_B, [\chi_A, \chi_C]_\pm\right]_\pm$$

Siano $\omega^B = dx^C\, \omega_C^B$ le 1-forme base di $T_e^\star(G)$ duali dei χ_A:

$$\chi_A\, (\omega^B) = \delta_A^B.$$

In virtù delle proprietà di anticommutazione graduata sui χ_A le relazioni di dualità fanno sì che sulle 1-forme ω^B valga la seguente equazione di struttura, detta di *Maurer-Cartan* generalizzata:

$$d\,\omega^B = -\frac{1}{2}\omega^C \wedge \omega^D\, C_{DC}^B.$$

Una ulteriore differenziazione di questa equazione , tramite l'operatore d di differenzazione esterna, (ricordiamo che $d\,d \equiv 0$) fornisce la *identità di Jacobi graduata*.

Una famiglia estremamente interessante di supergruppi è quella per cui lo spazio tangente $T_e(G)$ si può scrivere come $T_e(G) = g \otimes \Gamma$ per qualche algebra di Lie graduata g. In questo caso, le costanti di struttura C_{AB}^C sono **reali**. Questo chiarisce il legame tra supergruppi e algebre di Lie graduate. Nel caso in cui g sia l'algebra di Lie graduata $gl(m,n)$ le costanti di struttura sono reali ed il supergruppo originato è $GL(m,n)$; Per studiare il legame inverso, tra algebre di Lie graduate e supergruppi è necessario ricordare che è stata dimostrata una generalizzazione del terzo teorema di Lie anche per i supergruppi; piu' precisamente, dato un modulo di Lie graduato W (cioè un insieme di costanti C_{AB}^C che soddisfano i requisiti appena detti), esiste uno ed uno solo supergruppo G connesso e semplicemente connesso per cui $T_e(G) = W$.

Alla luce di questo risultato, possiamo rafforzare il legame tra algebre di Lie graduate e supergruppi invertendo il ragionamento precedente; data una algebra di Lie graduata g, definendo il modulo di Lie $W = \Gamma \otimes g$ si puo' costruire il relativo supergruppo.

Ogni supergruppo le cui costanti di struttura sono reali è un sottogruppo di $GL(m,n)$.