

*LA DISPERSIONE DI INQUINANTI IN
ATMOSFERA*

CAPITOLO 5

ENRICO FERRERO

12 marzo 2009

1 Teoria della dispersione

1.1 Teoria di Taylor della dispersione turbolenta

Si consideri una sorgente che emette particelle in un flusso turbolento *stazionario* ed *omogeneo* con velocità media nulla, utilizzando coordinate Lagrangiane e ponendo l'origine coincidente con la sorgente, la posizione della particella al tempo t sarà data da $X(0, t)$.

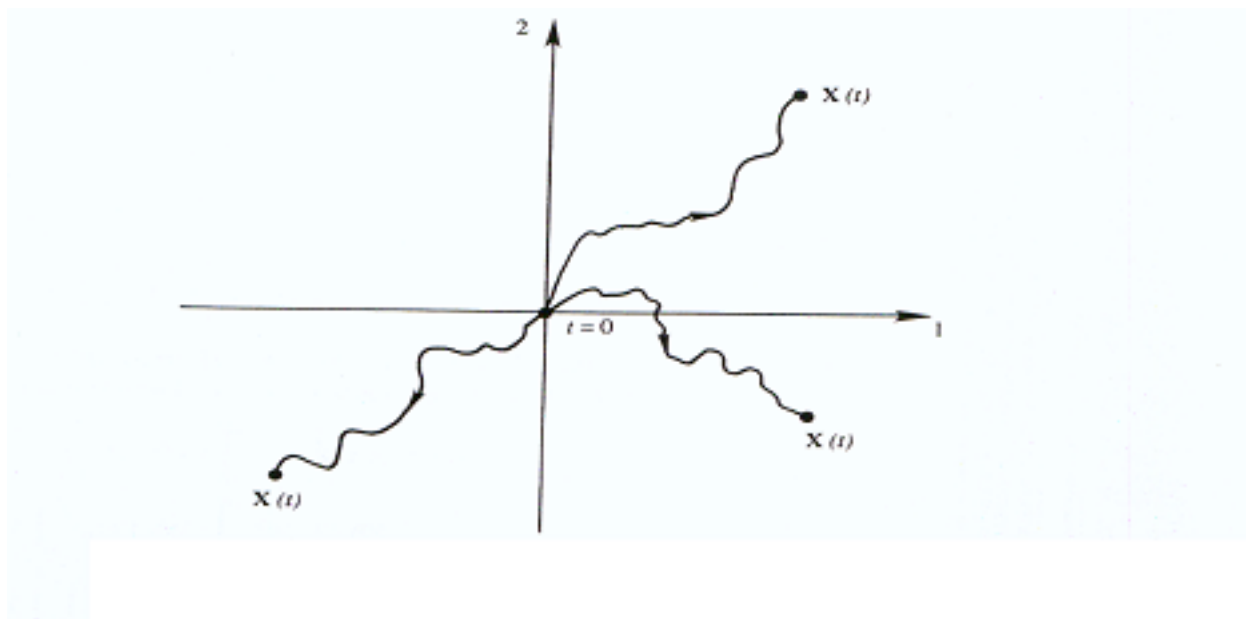


Figura 1: Dispersione di particelle in un flusso turbolento stazionario ed omogeneo

Il tasso medio di crescita della singola coordinata X_α nel tempo è dato da:

$$\frac{d\overline{X_\alpha^2(t)}}{dt} = 2\overline{X_\alpha} \frac{d\overline{X_\alpha}}{dt} \quad (1)$$

dove la barra indica la media di insieme.

Introducendo la velocità u_α abbiamo:

$$\frac{d\overline{X_\alpha^2(t)}}{dt} = 2\overline{X_\alpha} u_\alpha = 2 \left[\int_0^t u_\alpha(t') \cdot dt' \right] u_\alpha(t) = 2 \int_0^t \overline{u_\alpha(t') u_\alpha(t)} dt' \quad (2)$$

Essendo per ipotesi il fenomeno stazionario $\overline{u_\alpha^2}$ non dipende dal tempo e la funzione di autocorrelazione Lagrangiana (figura 2):

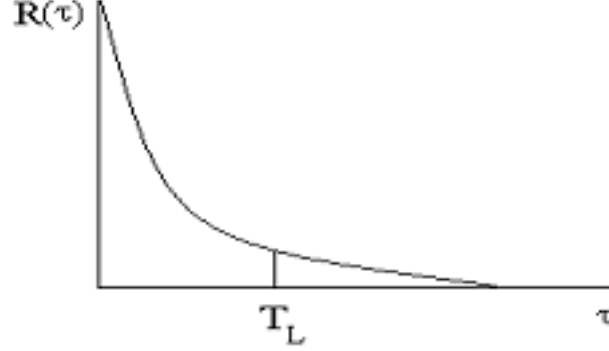


Figura 2: Funzione di autocorrelazione temporale Lagrangiana

$$r_\alpha(\tau) = \frac{\overline{u_\alpha(t)u_\alpha(t+\tau)}}{u_\alpha^2} \quad (3)$$

dipende solo dalla differenza di tempo $\tau = t' - t$. Introducendo la funzione di autocorrelazione si ottiene:

$$\frac{d\overline{X_\alpha^2(t)}}{dt} = 2\overline{u_\alpha^2} \int_0^t r_\alpha(\tau) d\tau, \quad (4)$$

Integrando questa espressione si ottiene

$$\overline{X_\alpha^2(t)} = 2\overline{u_\alpha^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} r_\alpha(\tau) d\tau, \quad (5)$$

che fornisce la variazione col tempo della posizione della particella. Se si integra per parti l'espressione precedente:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \int_0^{t'} r_\alpha(\tau) d\tau &= \left[t' \int_0^{t'} r_\alpha(\tau) d\tau \right]_{t'=0}^{t'=t} - \int_0^t t' r_\alpha(t') dt' = \\ &= t \int_0^t r_\alpha(\tau) d\tau - \int_0^t t' r_\alpha(t') dt' = \\ &= t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) r_\alpha(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

si ottiene:

$$\overline{X_\alpha^2(t)} = 2\overline{u_\alpha^2} t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) r_\alpha(\tau) d\tau \quad (7)$$

Consideriamo l'andamento asintotico per t grandi e t piccoli rispettivamente. Nel primo caso il termine τ/t tende a zero e quindi, introducendo il **tempo Lagrangiano integrale di scala** (figura)

$$T_L = \int_0^\infty r_\alpha(\tau) d\tau \quad (8)$$

si ha:

$$\overline{X_\alpha^2(t)} \cong 2\overline{u_\alpha^2} T_L t; \quad t \gg T_L \quad (9)$$

e prendendo la radice quadrata di entrambi i membri:

$$X_\alpha(t)^{rms} \cong u_\alpha^{rms} \sqrt{2T_L t}; \quad t \gg T_L \quad (10)$$

dove rms indica la radice quadrata della media del quadrato (*root mean square*). Per t piccoli la funzione di autocorrelazione tende ad 1 e integrando si ha:

$$\overline{X_\alpha^2(t)} \cong \overline{u_\alpha^2} t^2; \quad t \ll T_L \quad (11)$$

e

$$X_\alpha(t)^{rms} \cong u_\alpha^{rms} t; \quad t \ll T_L \quad (12)$$

In conclusione per tempi piccoli lo spostamento quadratico medio delle par-

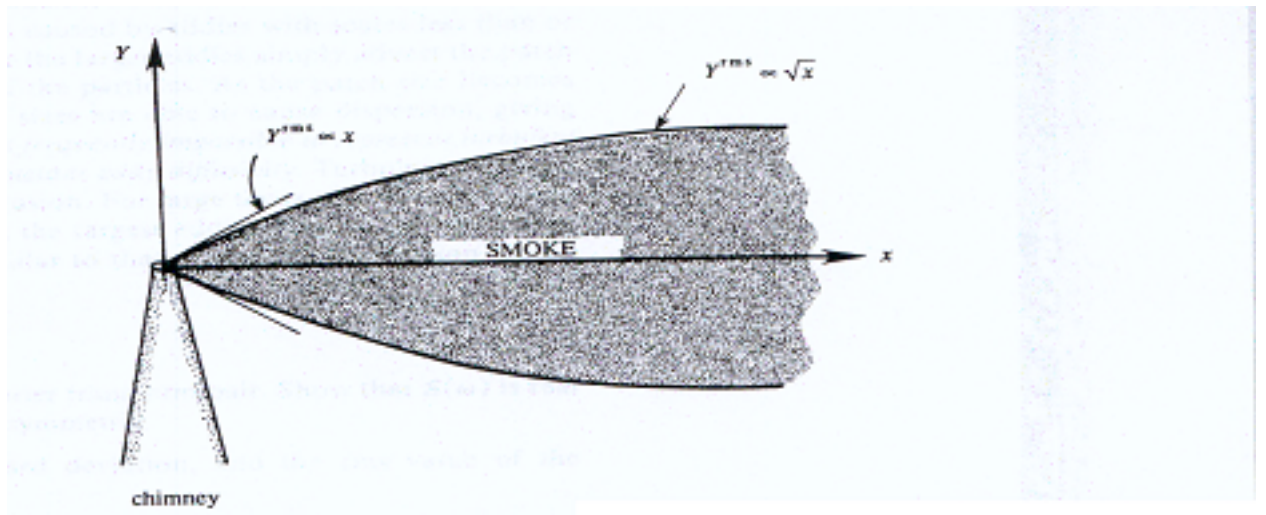


Figura 3: Andamento di un pennacchio

ticelle dalla sorgente è **lineare con il tempo**, mentre per tempi lunghi esso

va come \sqrt{t} . Questo comportamento è tipico dei processi stocastici detti **Random walk**. Per tempi lunghi le particelle hanno dimenticato il loro comportamento iniziale, mentre per tempi brevi, l'andamento proporzionale a t è dovuto alla completa correlazione. Questi concetti saranno chiariti nel prossimo capitolo. Osserviamo ancora che i comportamenti asintotici ricavati precedentemente rendono conto della forma del pennacchio di fumo emesso da una sorgente. Infatti, ponendo $y = X_\alpha$ e $x = Ut$, dove U è il vento orizzontale medio, abbiamo (figura 3):

$$y^{rms} \propto x \quad \text{per } t \text{ piccoli}$$

$$y^{rms} \propto \sqrt{x} \quad \text{per } t \text{ grandi}$$

2 GENERALITÀ SUI PROCESSI STOCAS- TICI

2.1 Nozioni fondamentali del calcolo delle probabilità

2.1.1 Spazio degli eventi e campo di probabilità

Spazio degli eventi: l'insieme \mathbf{F} associato ad un dato esperimento, reale o concettuale, tale che ogni suo sotto insieme sia in corrispondenza biunivoca con i risultati dell'esperimento stesso.

Possiamo distinguere tra eventi semplici e eventi composti:

- Eventi semplici (o elementari) non sono scomponibili in altri eventi.
- Eventi composti: decomponibili in un certo numero di eventi semplici.

Lo spazio degli eventi \mathbf{F} comprende tutti i possibili sottoinsiemi che si possono formare con i risultati dell'esperimento.

Il particolare sottoinsieme di \mathbf{F} che comprende tutti e solo gli eventi semplici viene detto \mathbf{U} , esso comprende quindi tutti i possibili risultati diretti dell'esperimento e solo essi. Ogni evento composto si può considerare come un sottoinsieme dell'insieme \mathbf{U} e la famiglia \mathbf{F} dei sottoinsiemi di \mathbf{U} è lo spazio degli eventi dell'esperimento in questione.

Se paragoniamo l'evento semplice ad un punto geometrico ogni risultato elementare dell'esperimento è rappresentato da uno ed un solo punto. L'insieme di tutti i punti \mathbf{U} è detto campo di probabilità. Tutti gli eventi connessi con il dato esperimento sono rappresentati da un insieme di punti in numero maggiore o uguale a 1.

2.1.2 Relazioni tra eventi

Ad ogni evento \mathbf{A} corrisponde un evento $\overline{\mathbf{A}}$, detto complemento di \mathbf{A} in \mathbf{U} , che contiene tutti i punti di \mathbf{U} non compresi in \mathbf{A} . Se $\mathbf{A} \equiv \mathbf{U}$ allora $\overline{\mathbf{A}} = 0$.

- Definiamo $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ l'evento del campo \mathbf{U} somma (o unione) degli eventi \mathbf{A} e \mathbf{B}
- Diciamo che \mathbf{A} è contenuto in \mathbf{B} quando \mathbf{A} è un sottoinsieme di \mathbf{B}
- Definiamo congiunto l'evento \mathbf{AB} del campo \mathbf{U} , intersezione degli eventi \mathbf{A} e \mathbf{B}

Se \mathbf{A} e \mathbf{B} sono eventi del campo di probabilità, anche $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, \mathbf{AB} , $\overline{\mathbf{A}}$ e $\overline{\mathbf{A}}$ sono eventi del campo. Quindi il campo delle probabilità è un *insieme chiuso* rispetto alle operazioni di unione, intersezione e complemento.

2.1.3 Gli assiomi del calcolo delle probabilità

- *I assioma:*

Dato un campo di probabilità costituito dai punti $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$, assumiamo che a ciascun punto \mathbf{E}_i sia associata una grandezza misurabile non negativa $p_i = P[\mathbf{E}_i]$, detta probabilità di \mathbf{E}_i .

- *II assioma:*

La probabilità $P[\mathbf{A}]$ associata ad un evento composto \mathbf{A} , costituito dai punti $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$, è data dalla somma delle probabilità dei singoli punti che la costituiscono:

$$P[\mathbf{A}] = P[\mathbf{E}_1] + P[\mathbf{E}_2] + \dots$$

- *III assioma:*

La probabilità dell'*evento certo* vale 1

Si ha come conseguenza:

- $P[\mathbf{U}] = 1$ evento certo
- $0 < P[\mathbf{A}] < 1$ evento casuale
- $P[\overline{\mathbf{U}}] = 0$ evento impossibile

Inoltre:

$$P[\mathbf{A}] = 1 - P[\overline{\mathbf{A}}]$$

Se l'evento \mathbf{A} è contenuto nell'evento \mathbf{B}

$$P[\mathbf{A}] \leq P[\mathbf{B}] \quad (13)$$

$$P[\mathbf{AB}] = P[\mathbf{A}] \quad (14)$$

$$P[\mathbf{B} - \mathbf{A}] = P[\mathbf{B}] - P[\mathbf{A}] \quad (15)$$

Dagli assiomi segue anche la *definizione classica di probabilità*. Se c sono i casi possibili e quindi eventi semplici si ha:

$$P[\mathbf{U}] = \sum_{i=1}^c P[\mathbf{E}_i] = 1$$

Inoltre essendo *equiprobabili* $P[\mathbf{E}_i] = 1/c$ per ogni i . Se a sono i casi favorevoli, allora:

$$P[A] = \sum_{i=1}^a P[\mathbf{E}_i] = aP[\mathbf{E}_i] = \frac{a}{c}$$

Teorema dell'addizione

Nel caso di *eventi incompatibili* \mathbf{A} e \mathbf{B} :

$$P[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = P[\mathbf{A}] + P[\mathbf{B}]$$

Se gli *eventi non sono incompatibili* è necessario sottrarre la probabilità dell'intersezione degli eventi per non contare due volte i punti comuni ad \mathbf{A} e \mathbf{B}

$$P[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = P[\mathbf{A}] + P[\mathbf{B}] - P[\mathbf{AB}]$$

Nel caso generale di n eventi si ha:

$$P[\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_n] \leq P[\mathbf{A}_1] + P[\mathbf{A}_2] + \dots + P[\mathbf{A}_n]$$

nota come **disuguaglianza di Boole**. Il segno di uguaglianza si ha nel caso particolare di eventi mutuamente esclusivi.

2.1.4 Probabilità subordinata

Nel caso in cui il verificarsi dell'evento \mathbf{A} sia condizionato dal verificarsi dell'evento \mathbf{B} si definisce la probabilità subordinata:

$$P[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$$

Si può ricavare la seguente relazione:

$$P[\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \frac{P[\mathbf{AB}]}{P[\mathbf{B}]}$$

Teorema della moltiplicazione

Dalla definizione di probabilità condizionata si ha la regola delle probabilità composte:

$$P[\mathbf{AB}] = P[\mathbf{A}|\mathbf{B}]P[\mathbf{B}] = P[\mathbf{B}|\mathbf{A}]P[\mathbf{A}]$$

che nel caso di n eventi diventa:

$$P[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \dots \mathbf{A}_n] = P[\mathbf{A}_1]P[\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_1]P[\mathbf{A}_3|\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2] \dots P[\mathbf{A}_n|\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{n-1}] \quad (16)$$

Se due eventi sono *stocasticamente indipendenti*, significa che deve essere:

$$P[\mathbf{A}|\mathbf{B}] = P[\mathbf{A}] \text{ e } P[\mathbf{B}|\mathbf{A}] = P[\mathbf{B}]$$

e quindi il teorema della moltiplicazione diventa:

$$P[\mathbf{AB}] = P[\mathbf{A}]P[\mathbf{B}]$$

Si noti che se \mathbf{A} è indipendente da \mathbf{B} anche \mathbf{B} deve essere indipendente da \mathbf{A} (*relazione di simmetria degli eventi indipendenti*).

In generale, per n eventi si ha:

$$P\left[\prod_{i=1}^n \mathbf{A}_i\right] = \prod_{i=1}^n P[\mathbf{A}_i]$$

la probabilità del prodotto di eventi indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi.

2.2 I PROCESSI STOCASTICI

Prendiamo $\mathbf{X}(t)$ come un processo stocastico reale, ovvero una variabile od un vettore di variabili casuali reali che evolvono con determinate leggi nel tempo. Da un punto di vista matematico esso è completamente definito se si conoscono tutte le funzioni densità di probabilità congiunta

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots; x_n, t_n)$$

definite in modo che

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n$$

rappresenti la probabilità che il processo assuma un valore tra x_i e $x_i + dx_i$ al tempo t_i per ogni $i = 1, \dots, n$.

Utilizzando il concetto di probabilità condizionata possiamo scrivere la funzione di densità di probabilità come:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots; x_n, t_n) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3; \dots; x_n, t_n) \dots p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) p(x_n, t_n)$$

Dove con $p(\dots | \dots)$ si è indicato la funzione di densità di probabilità condizionata subordinata all'avverarsi delle condizioni che si trovano a destra della sbarretta verticale. Valgono inoltre le relazioni fondamentali derivanti dalla definizione di funzione densità di probabilità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) dx = 1$$

In generale sommando su tutti gli eventi mutuamente esclusivi di un tipo in una probabilità congiunta si elimina quella variabile:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots; x_n, t_n) dx_n$$

Per completezza ricordiamo ora le definizioni di:

media

$$\eta(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, t) dx \quad (17)$$

autocovarianza

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) &= E[\{x(t_1) - \eta(t_1)\} \cdot \{x(t_2) - \eta(t_2)\}] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t_1) - \eta(t_1)] \cdot [x(t_2) - \eta(t_2)] p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (18)$$

varianza

$$\sigma^2(t) = C(t, t) = E\{[x(t) - \eta(t)]^2\} \quad (19)$$

autocorrelazione

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[x(t_1) \cdot x(t_2)] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1) \cdot x(t_2) p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (20)$$

e il **coefficiente di autocorrelazione**:

$$\rho_t = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1)C(t_2, t_2)}}$$

Con $E[\]$ si intende l'operatore di media di insieme, ovvero la media fatta su un insieme di realizzazioni diverse dello stesso processo stocastico.

2.3 Stazionarietà

Un processo stocastico si dice *stazionario in senso stretto* quando le sue caratteristiche statistiche non cambiano se si sposta l'origine dei tempi, vale cioè la seguente relazione per qualunque ϵ :

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = p(x_1, t_1 + \epsilon; x_2, t_2 + \epsilon; \dots; x_n, t_n + \epsilon) \quad (21)$$

se questa relazione vale solo per ogni $n \leq k$ si dice che è stazionario al k -esimo ordine.

Da questa definizione segue che deve essere

$$p(x, t) = p(x, t + \epsilon) \quad \forall \epsilon \quad (22)$$

e quindi

$$p(x, t) = p(x) \quad (23)$$

Analogamente $p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, t_1 + \epsilon; x_2, t_2 + \epsilon)$ per qualunque ϵ implica

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1; x_2, \tau) \quad \text{con } \tau = t_2 - t_1 \quad \forall t \quad (24)$$

Un processo si dice *stazionario in senso ampio* se:

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= \eta = \text{costante} \\ R(t_1, t_2) &= R(\tau) = E[x(t + \tau)x(t)] \quad \text{con } \tau = t_2 - t_1 \quad \forall t \end{aligned} \quad (25)$$

cioè $R(t_1, t_2)$ dipende solo dalla differenza tra t_1 e t_2 e non dal tempo assoluto.

La funzione di autocorrelazione $R(\tau)$ quantifica il ricordo che il processo, all'istante $t + \tau$, ha di quello che è successo all'istante t .

Si può dimostrare che la stazionarietà in senso stretto implica la stazionarietà in senso debole ma, ovviamente, non è vero il contrario.

Da un punto di vista fisico la stazionarietà assicura che in un processo fisico che è descritto da una certa $p(x, t)$ tutte le equazioni che lo governano siano indipendenti dal tempo.

Riferendosi alla turbolenza, la stazionarietà assicura che tutte le caratteristiche medie (temperatura media, velocità media, varianza etc.) e tutte le condizioni esterne (forzanti esterne, condizioni al contorno) non varino col tempo. Queste condizioni sono facilmente realizzabili in laboratorio, ma difficilmente si trovano in natura. Tuttavia, variabili misurate su intervalli di tempo relativamente bassi possono essere considerate come stazionarie.

2.4 Omogeneità

L'omogeneità può essere considerata come una stazionarietà nello spazio. Un campo si dice omogeneo se le sue variabili (per esempio $u(z)$) non dipendono dalla coordinata spaziale (z) o, più precisamente, se:

$$\begin{aligned} E[u(z)] &= \text{costante} \\ R[u(z_1), u(z_2)] &= R(\delta) = E[u(z_1 + \delta)u(z_1)] \quad \text{con } \delta = z_2 - z_1 \quad \forall z \end{aligned} \quad (26)$$

Per i campi vettoriali della fluidodinamica l'ipotesi di omogeneità in un flusso turbolento è una pura idealizzazione matematica, che non si realizza mai nella realtà. Infatti per poter parlare di omogeneità il flusso dovrebbe occupare uno spazio illimitato. Inoltre, dovremmo richiedere che i valori medi lungo il flusso fossero costanti in tutto lo spazio e che il regime statistico delle fluttuazioni non mutasse da un punto all'altro dello spazio. Ovviamente tutti questi requisiti possono essere soddisfatti solamente in regioni di spazio limitate all'interno del fluido. Le dimensioni di queste regioni devono essere piccole se paragonate alle scale delle disomogeneità macroscopiche e devono essere sufficientemente distanti dai limiti del dominio spaziale. Dunque possiamo parlare di omogeneità solo in alcune piccole zone all'interno del fluido. Nonostante ciò quando si trattano questi flussi è conveniente considerarli come parti di un flusso completamente omogeneo, poichè le proprietà della turbolenza omogenea semplificano notevolmente l'analisi teorica.

2.5 Ergodicità

Un processo stazionario si dice **ergodico** se tutte le proprietà statistiche possono essere determinate da un'unica realizzazione del processo. In altre parole *le medie di insieme possono essere sostituite da medie temporali*:

$$E[x(t)] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = \eta \quad \text{per } T \rightarrow \infty \quad (27)$$

2.6 Processi di rumore bianco

Si definiscono processi di rumore bianco i processi stocastici caratterizzati dalle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= 0 \\ \sigma^2(t) &= \text{costante} \\ C(\tau) &= 0 \quad \forall \tau = t - t' \neq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

La funzione di densità di probabilità è Gaussiana con media nulla e varianza costante. Il fatto che la covarianza sia nulla significa che non c'è correlazione per tempi differenti. In sintesi in un processo di rumore bianco i valori di variabili casuali misurate ad un tempo t sono completamente scorrelati da quelli misurati ad un tempo t' con $t' \neq t$, cioè non vi è ricordo del passato.

2.7 Processo di Markov

Consideriamo un generico processo stocastico ed esprimiamo la sua funzione di densità di probabilità in funzione della probabilità condizionata:

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \quad t_1 > t_2 > \dots > t_n \quad (29)$$

Se la generica probabilità condizionata può essere espressa solo in funzione di (x_2, t_2) allora il processo si dice di Markov:

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2) \quad (30)$$

Sostanzialmente in questo tipo di processi la statistica del passato non influenza quella del futuro, fissata la condizione del presente (x_2, t_2) . Applicando la definizione di probabilità condizionata si ha:

$$p(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2) dx_2 \quad (31)$$

che fornisce la probabilità al tempo $t_1 > t_2$, nota la probabilità condizionata $p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$. Per la probabilità condizionata si ha analogamente:

$$\begin{aligned} p(x_1, t_1 | x_3, t_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1; x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2 = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3) p(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2 \end{aligned} \quad (32)$$

applicando infine la definizione di processo di Markov:

$$\begin{aligned} p(x_1, t_1 | x_3, t_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1; x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3) p(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2 \end{aligned} \quad (33)$$

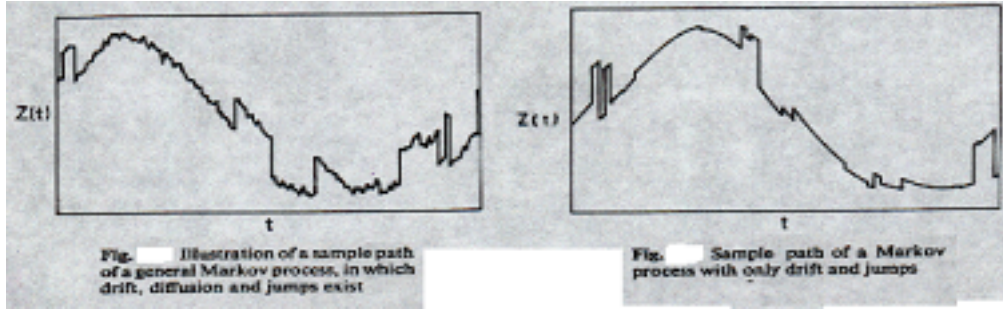


Figura 4: Processi di Markov

chiamata **equazione di Chapman-Kolmogorov** che lega le probabilità condizionate l'una all'altra.

Si può derivare la *forma differenziale dell'equazione di Chapman-Kolmogorov*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t | y, t')}{\partial t} &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)p(x, t | y, t')] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t)p(x, t | y, t')] + \\ &+ \int [W(x | z, t)p(z, t | y, t') - W(z | x, t)p(x, t | y, t')] dz \end{aligned} \quad (34)$$

dove $A(x, t)$ è chiamato termine di drift (deriva), $B(x, t)$ termine di diffusione e $W(x|y, t)$ definisce i processi di salto. A , B e W sono funzioni caratteristiche del particolare problema che si vuole studiare.

Un processo di Markov si dice continuo se per qualunque $\epsilon > 0$ si ha:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z|>0} p(x, t + \Delta t | z, t) dx = 0 \quad (35)$$

uniformemente in z , t e Δt .

In particolare si può dimostrare che l'equazione di Chapman-Kolmogorov definisce un processo continuo se è nullo il termine W .

Un caso particolare dell'equazione di Chapman-Kolmogorov, che definisce un processo markoviano continuo, è l'**equazione di Fokker-Planck**, ottenuta dalla precedente ponendo a zero il termine discontinuo W :

$$\frac{\partial p(x, t | y, t')}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)p(x, t | y, t')] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t)p(x, t | y, t')] \quad (36)$$

Usando la relazione:

$$p(x, t) = \int p(x, t; y, t') dy = \int p(x, y | y, t') p(y, t') dy \quad (37)$$

si può mostrare che l'equazione di Fokker-Planck è valida anche per la generica $p(x, t)$ con la condizione iniziale

$$p(x, t) |_{t=t'} = p(x, t') \quad (38)$$

e quindi possiamo riscrivere questa equazione come

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)p(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t)p(x, t)] \quad (39)$$

L'equazione di Fokker-Planck può essere utilizzata per la soluzione ad esempio del problema del moto Browniano. Infatti, si può dimostrare che esiste una relazione tra quest'ultima e l'equazione di Langevin, equazione stocastica differenziale lagrangiana che descrive questo tipo di moto.

L'equazione di Langevin può essere scritta come:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\epsilon(t)dt \quad (40)$$

dove $a(x, t)$ e $b(x, t)$ sono funzioni tipiche del particolare problema in esame e $\epsilon(t)$ è un termine casuale rapidamente variabile tale che:

$$\begin{aligned} \langle \epsilon(t) \rangle &= 0 \\ \langle \epsilon(t)\epsilon(t') \rangle &= \delta(t - t') \end{aligned} \quad (41)$$

E' possibile dimostrare che un fenomeno di questo tipo è rappresentabile come un processo Markoviano e continuo, quindi descrivibile dal punto di vista statistico da una funzione di densità di probabilità $p(x, t | x_1, t_1)$.

Esistono delle relazioni che legano le funzioni $a(x, t)$, $b(x, t)$ e $A(x, t)$, $B(x, t)$ ottenibili a partire dalla *formula di Ito* riguardante la definizione del differenziale di una funzione $f[x(t)]$ dove, ovviamente, $x(t)$ rappresenta un processo stocastico Markoviano continuo (Gardiner, 1990).

Queste relazioni sono:

$$\begin{aligned} a(x, t) &= A(x, t) \\ b^2(x, t) &= B(x, t) \end{aligned} \quad (42)$$

Quindi possiamo scrivere l'equazione di Fokker-Planck come:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x, t)p(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b^2(x, t)p(x, t)] \quad (43)$$

Data la funzione densità di probabilità $p(x, t)$ possiamo usare l'equazione di Fokker-Planck per ricavare le quantità $a(x, t)$ e $b(x, t)$ che utilizzate nell'equazione di Langevin permettono di descrivere, ad esempio il moto Browniano e il moto di una particella in un campo di velocità turbolento.

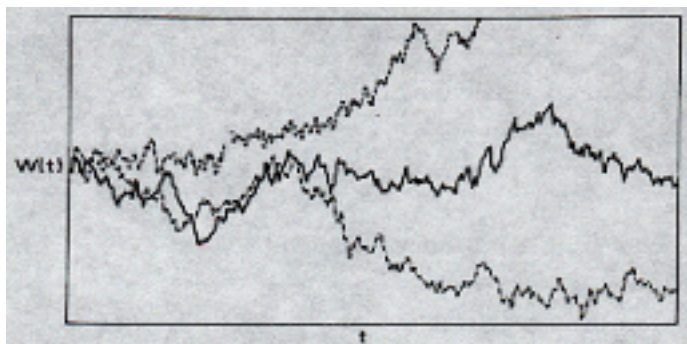


Figura 5: Processo di Wiener

2.8 Processo di Wiener

Una particolare soluzione dell'equazione di Fokker-Planck, nel caso in cui si abbia $A(x, t) = 0$ e $B(x, t) = 1$ è il **processo di Wiener**, un processo stocastico con media nulla e varianza proporzionale a t per cui:

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= \eta(t) = 0 \\ E[\{x(t) - \eta(t)\}^2] &= E[x^2(t)] = \alpha t \end{aligned} \quad (44)$$

La distribuzione di probabilità di questo processo è Gaussiana:

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}} \quad (45)$$

Per tempi ordinati $t_1 > t_2 > t_3$ vale anche la seguente condizione:

$$E[\{x(t_1) - x(t_2)\} \{x(t_2) - x(t_3)\}] = 0 \quad (46)$$

che significa che gli incrementi in un processo di Wiener sono scorrelati (indipendenti).

Un processo di Wiener può essere scritto come:

$$x(t) = \int_0^t \xi(\tau) d\tau \quad (47)$$

dove $\xi(\tau)$ è un processo di rumore bianco.

Da ciò segue che:

$$dx(t) = \xi(t) dt \quad (48)$$

quindi gli incrementi infinitesimi di questo tipo di processo costituiscono un processo di rumore bianco. Il processo di Wiener può essere considerato come caso limite continuo di un processo discreto detto di **random walk**.

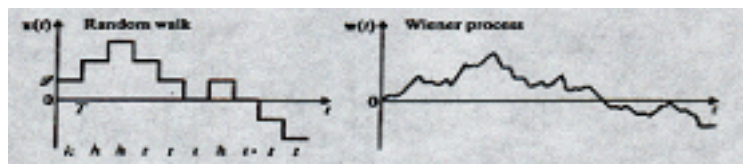


Figura 6: Random Walk e Processo di Wiener