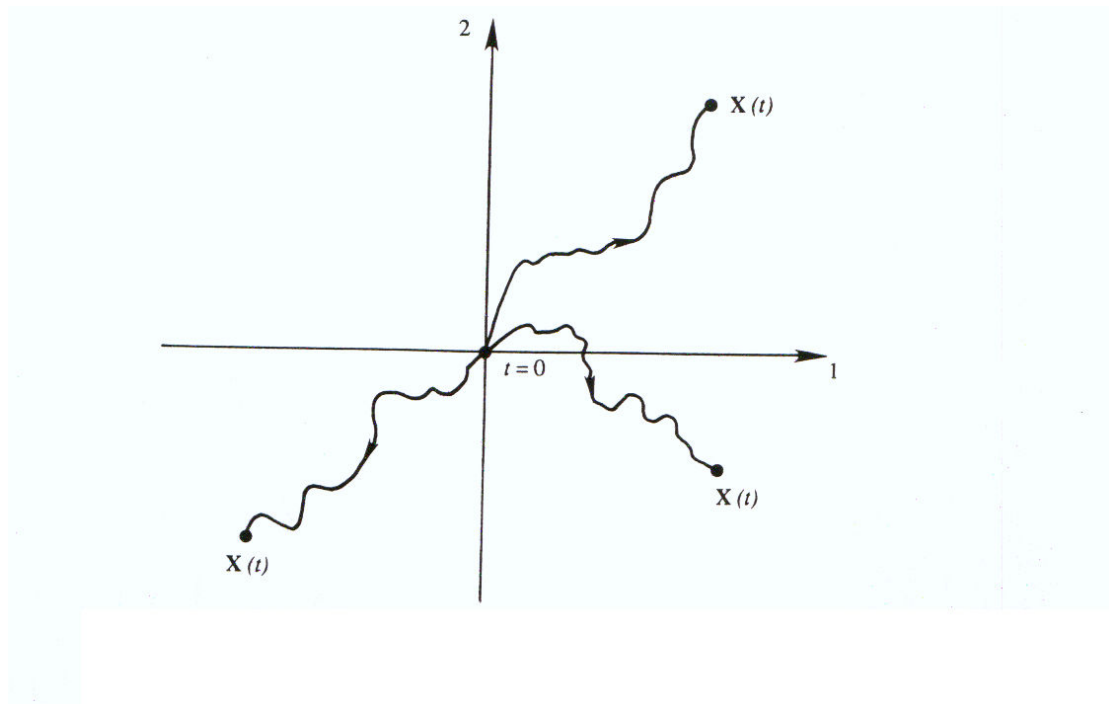


8 Teoria della dispersione

Teoria di Taylor della dispersione turbolenta

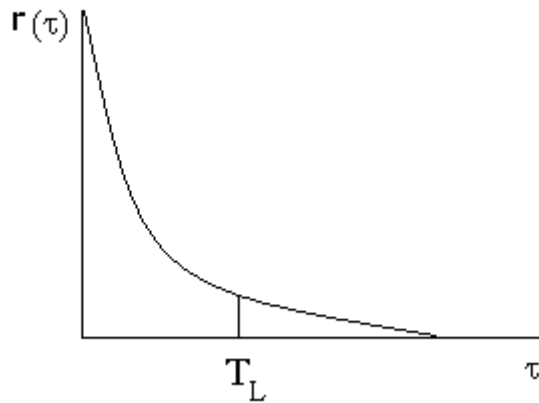
Si consideri una sorgente che emette particelle in un flusso turbolento stazionario ed omogeneo con velocità media nulla, utilizzando coordinate Lagrangiane e ponendo l'origine coincidente con la sorgente la posizione della particella al tempo t sarà data da $\mathbf{X}(\mathbf{0}, t)$.



Il valor quadratico medio della componente X_α varia nel tempo con la legge

$$\overline{X_\alpha^2(t)} = 2 \cdot \overline{u_\alpha^2} t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) r_\alpha(\tau) d\tau$$

dove $\overline{u_\alpha^2}$ è la varianza della componente della velocità e si è introdotta la funzione di autocorrelazione Lagrangiana (figura):



$$r_{\alpha}(\tau) = \frac{\overline{u_{\alpha}(t)u_{\alpha}(t+\tau)}}{u_{\alpha}^2}$$

che dipende solo dalla differenza di tempo $\tau=t-t'$.

Consideriamo l'andamento asintotico per t grandi e t piccoli rispettivamente. Nel primo caso il termine τ/t tende a zero e quindi, introducendo il tempo Lagrangiano integrale di scala (figura)

$$T_L = \int_0^{\infty} r_{\alpha}(\tau) d\tau$$

si ha:

$$\overline{X_{\alpha}^2(t)} \cong 2 \cdot \overline{u_{\alpha}^2} T_L t \quad t \gg T_L$$

e prendendo la radice quadrata di entrambi i membri:

$$X_{\alpha}^{rms} \cong u_{\alpha}^{rms} \sqrt{2T_L t} \quad t \gg T_L.$$

Per t piccoli la funzione di autocorrelazione tende ad 1 e integrando si ha:

$$\overline{X_{\alpha}^2(t)} \cong \overline{u_{\alpha}^2} t^2 \quad t \ll T_L$$

e

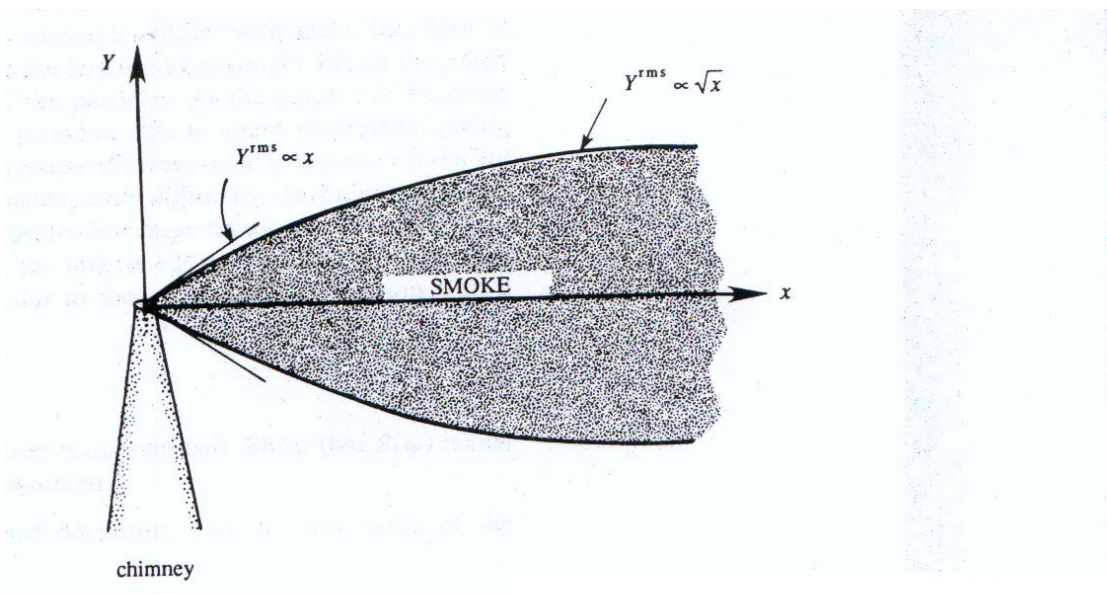
$$X_{\alpha}^{rms} \cong u_{\alpha}^{rms} t \quad t \ll T_L.$$

In conclusione per tempi piccoli lo spostamento quadratico medio delle particelle dalla sorgente e' lineare con il tempo, mentre per tempi lunghi esso va come $t^{1/2}$. Questo comportamento e' tipico dei processi stocastici detti Random walk. Per tempi lunghi le particelle hanno "dimenticato" il loro comportamento iniziale, mentre per tempi brevi, l'andamento proporzionale a t e' dovuto alla completa correlazione. Questi concetti saranno chiariti nel prossimo capitolo.

Osserviamo ancora che i comportamenti asintotici ricavati precedentemente rendono conto della forma del pennacchio di fumo emesso da una sorgente. Infatti, ponendo $X_{\alpha}=y$ e $x=Ut$, dove U e' il vento orizzontale abbiamo (figura):

$$y^{rms} \propto x \quad \text{per } t \text{ piccoli}$$

$$y^{rms} \propto \sqrt{x} \quad \text{per } t \text{ grandi}$$



9 GENERALITÀ SUI PROCESSI STOCASTICI

Nozioni fondamentali del calcolo delle probabilità

Spazio degli eventi e campo di probabilità

Spazio degli eventi: l'insieme F associato ad un dato esperimento, reale o concettuale, tale che ogni suo sottoinsieme sia in *corrispondenza biunivoca* con i risultati dell'esperimento stesso.

Possiamo distinguere tra eventi semplici e eventi composti

Eventi semplici (o elementari) non sono scomponibili in altri eventi.

Eventi composti: decomponibili in un certo numero di eventi semplici.

Lo spazio degli eventi F comprende tutti i possibili sottoinsiemi che si possono formare con i risultati dell'esperimento.

Il particolare sottoinsieme di F che comprende tutti e solo gli eventi semplici viene detto U , esso comprende quindi tutti i possibili risultati diretti dell'esperimento e solo essi. Ogni evento composto si può considerare come un sottoinsieme dell'insieme U e la famiglia F dei sottoinsiemi di U è lo spazio degli eventi dell'esperimento in questione.

Se paragoniamo l'evento semplice ad un punto geometrico ogni risultato elementare dell'esperimento è rappresentato da uno ed un solo punto. L'insieme di tutti i punti U è detto **campo di probabilità**. Tutti gli eventi connessi con il dato esperimento sono rappresentati da un insieme di punti in numero maggiore o uguale a 1.

Relazioni tra eventi

Ad ogni evento A corrisponde un evento \bar{A} , detto complemento di A in U , che contiene tutti i punti di U non compresi in A . Se $A \equiv U$ allora $\bar{A} = \emptyset$.

Definiamo $A+B$ l'evento del campo U somma (o unione) degli eventi A e B

Diciamo che A è contenuto in B quando A è un sottoinsieme di B

Definiamo congiunto l'evento AB del campo U , intersezione degli eventi A e B

Se A e B sono eventi del campo di probabilità, anche $A+B$, AB , \bar{A} e \bar{B} sono eventi del campo. Quindi il campo delle probabilità è un insieme chiuso rispetto alle operazioni di unione, intersezione e complemento.

Gli assiomi del calcolo delle probabilità

I assioma:

Dato un campo di probabilità costituito dai punti E_1, E_2, \dots , assumiamo che a ciascun punto E_i sia associata una grandezza misurabile non negativa $p_i = P[E_i]$, detta probabilità di E_i .

II assioma

La probabilità $P[A]$ associata ad un evento composto A , costituito dai punti E_1, E_2, \dots , è data dalla somma delle probabilità dei singoli punti che la costituiscono:

$$P[A] = P[E_1] + P[E_2] + \dots$$

III assioma

La probabilità dell'evento certo vale 1

Si ha come conseguenza:

$P[U]=1$	evento certo
$0 < P[A] < 1$	evento casuale
$P[\bar{U}]=0$	evento impossibile

Inoltre:

$$P[A] = 1 - P[\bar{A}]$$

Se l'evento A è contenuto nell'evento B

$$\begin{aligned} P[A] &\leq P[B] \\ P[AB] &= P[A] \\ P[B-A] &= P[B] - P[A] \end{aligned}$$

Dagli assiomi segue anche la definizione classica di probabilità.

Se c sono i casi possibili e quindi eventi semplici si ha:

$$P[U] = \sum_{i=1}^c P[E_i] = 1$$

Inoltre essendo equiprobabili $P[E_i] = 1/c$ per ogni i . Se a sono i casi favorevoli, allora:

$$P[A] = \sum_{i=1}^a P[E_i] = aP[E_i] = \frac{a}{c}$$

Teorema dell'addizione

Nel caso di eventi incompatibili A e B:

$$P[A+B] = P[A] + P[B]$$

Se gli eventi non sono incompatibili è necessario sottrarre la probabilità dell'intersezione degli eventi per non contare due volte i punti comuni ad A e B

$$P[A+B] = P[A] + P[B] - P[AB]$$

Nel caso generale di n eventi si ha:

$$P[A_1 + A_2 + \dots + A_n] \leq P[A_1] + P[A_2] + \dots + P[A_n]$$

nota come disuguaglianza di Boole.

Il segno di uguaglianza si ha nel caso particolare di eventi mutuamente esclusivi.

Probabilità subordinata

Nel caso in cui il verificarsi dell'evento A sia condizionato dal verificarsi dell'evento B si definisce la probabilità subordinata:

$$P[A|B]$$

Si può ricavare la seguente relazione:

$$P[A | B] = \frac{P[AB]}{P[B]}$$

Teorema della moltiplicazione

Dalla definizione di probabilità condizionata si ha la regola delle probabilità composte:

$$P[AB] = P[A | B]P[B] = P[B | A]P[A]$$

che nel caso di n eventi diventa:

$$P[A_1 A_2 A_3 \dots A_n] = P[A_1]P[A_2 | A_1]P[A_3 | A_1 A_2] \dots P[A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}]$$

Se due eventi sono *stocasticamente indipendenti*, significa che deve essere:

$$P[A|B]=P[A] \quad \text{e} \quad P[B|A]=P[B]$$

e quindi il teorema della moltiplicazione diventa:

$$P[AB] = P[A]P[B]$$

Si noti che se A è indipendente da B anche B deve essere indipendente da A (relazione di simmetria degli eventi indipendenti).

In generale, per n eventi si ha:

$$P\left[\prod_{i=1}^n A_i\right] = \prod_{i=1}^n P[A_i]$$

la probabilità del prodotto di eventi indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi.

I PROCESSI STOCASTICI

Prendiamo $X(t)$ come un processo stocastico reale, ovvero una variabile od un vettore di variabili casuali reali che evolvono con determinate leggi nel tempo. Da un punto di vista matematico esso è completamente definito se si conoscono tutte le funzioni densità di probabilità congiunta

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$$

definite in modo che

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

rappresenti la probabilità che il processo assuma un valore tra x_i e x_i+dx_i al tempo t_i per ogni $i=1, \dots, n$.

Utilizzando il concetto di *probabilità condizionata* possiamo scrivere la funzione di densità di probabilità come:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \dots p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) p(x_n, t_n)$$

Dove con $p(\dots|\dots)$ si è indicato la funzione di densità di probabilità condizionata subordinata all'avverarsi delle condizioni che si trovano a destra della sbarretta verticale.

Valgono inoltre le relazioni fondamentali derivanti dalla definizione di funzione densità di probabilità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dx = 1$$

In generale sommando su tutti gli eventi mutuamente esclusivi di un tipo in una probabilità congiunta si elimina quella variabile:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n) dx_n$$

Ricordiamo ora le definizioni di media:

$$\mu(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x, t) dx,$$

autocorrelazione :

$$R(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$$

e autocovarianza:

$$C(t_1, t_2) = E\{[x(t_1) - \mu(t_1)] \cdot [x(t_2) - \mu(t_2)]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t_1) - \mu(t_1)] \cdot [x(t_2) - \mu(t_2)] \cdot p(x_1, t_1; x_2, t_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$

di una variabile stocastica.

Introduciamo ora il coefficiente di autocorrelazione:

$$\rho_t = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}}$$

dove $\sigma^2(t)$ è la varianza ovvero il particolare valore della funzione di autocovarianza definito come:

$$\sigma^2(t) = C(t, t) = E[(x(t) - \mu(t))^2]$$

Dove con il simbolo $E[]$ si intende la *media di insieme* ovvero la media fatta su un insieme di realizzazioni diverse dello stesso processo stocastico.

STAZIONARIETÀ

Un processo stocastico si dice stazionario in *senso stretto* quando le sue caratteristiche statistiche non cambiano se si sposta l'origine dei tempi. Un processo si dice

stazionario in *senso ampio* se ha valor medio costante e l'autocorrelazione R dipende solo dalla differenza tra t_1 e t_2 , τ e non dal tempo assoluto.

La funzione di autocorrelazione $R(\tau)$ quantifica il ricordo che il processo, all'istante $t+\tau$, ha di quello che è successo all'istante t .

Si può dimostrare che la stazionarietà in senso stretto implica la stazionarietà in senso debole ma, ovviamente, non è vero il contrario.

ERGODICITA'

*Un processo stazionario si dice **ergodico** se tutte le proprietà statistiche possono essere determinate da un'unica realizzazione del processo.*

In altre parole le medie di insieme possono essere sostituite da medie temporali:

PROCESSI DI RUMORE BIANCO

Si definiscono processi di rumore bianco i processi stocastici caratterizzati dalle seguenti proprietà:

$$\mu(t) = E[x(t)] = 0$$

$$\sigma^2(t) = \text{costante}$$

$$C(\tau) = 0$$

$\forall \tau \neq 0$ essendo $\tau=t_2-t_1$ l'intervallo di tempo tra due istanti successivi.

La funzione di densità di probabilità è Gaussiana con media nulla e varianza costante. Il fatto che la covarianza sia nulla significa che non c'è correlazione per tempi differenti.

In sintesi in un processo di rumore bianco i valori di variabili casuali misurate ad un tempo t_1 sono completamente scorrelati da quelli misurati ad un tempo t_2 con $t_2 \neq t_1$, cioè non vi è ricordo del passato.

PROCESSO DI MARKOV

Consideriamo un generico processo stocastico ed esprimiamo la sua funzione di densità di probabilità in funzione della probabilità condizionata

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$$

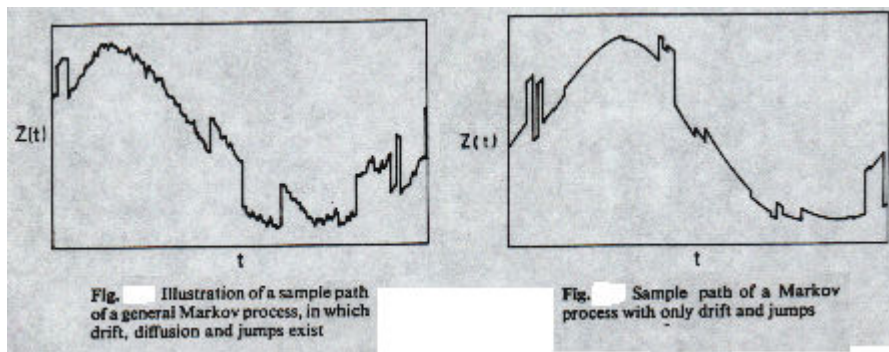
$$t_1 > t_2 > t_3 \dots$$

Se la generica probabilità condizionata può essere espressa solo in funzione di x_2, t_2 allora il processo si dice di Markov.

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$$

Sostanzialmente in questo tipo di processi la statistica del passato non influenza quella del futuro, fissata la condizione del presente (x_2, t_2).

Applicando la definizione di probabilità condizionata e la definizione di processo di Markov: si può derivare la forma differenziale dell'equazione di *Chapman-Kolmogorov* che dipende da tre termini: $A(x,t)$ è chiamato termine di drift (deriva), $B(x,t)$ termine di diffusione e $W(x|y,t)$ definisce i processi di salto. A, B e W sono funzioni caratteristiche del particolare problema che si vuole studiare.



In particolare si può dimostrare che l'equazione di *Chapman-Kolmogorov* definisce un processo continuo se e' nullo il termine di salto $W(x|y,t)$. (figura)

Un caso particolare dell'equazione di *Chapman-Kolmogorov*, che definisce un processo markoviano continuo, è l'equazione di *Fokker-Planck*, ottenuta dalla precedente ponendo a zero il termine discontinuo $W(x|y,t)$.

L'equazione di *Fokker-Planck* può essere utilizzata per la soluzione ad esempio del problema del moto browniano. Infatti, si può dimostrare che esiste una relazione tra quest'ultima e l'equazione di *Langevin*, equazione stocastica differenziale lagrangiana che descrive questo tipo di moto.

L'equazione di *Langevin* che fornisce la variazione della variabile stocastica dx nell'intervallo di tempo dt , può essere scritta come:

$$dx = a(x, t) \cdot dt + b(x, t) \cdot \eta(t) \cdot dt$$

dove $a(x,t)$ e $b(x,t)$ sono funzioni tipiche del particolare problema in esame e $\eta(t)$ è un termine casuale rapidamente variabile a valor medio nullo.

Esistono delle relazioni che legano le funzioni $a(x,t)$, $b(x,t)$ ai coefficienti di deriva $A(x,t)$ e diffusione $B(x,t)$ precedentemente introdotti nella definizione di un processo stocastico *Markoviano* continuo (Gardiner, 1990).

Queste relazioni sono:

$$a(x, t) = A(x, t)$$
$$b^2(x, t) = B(x, t)$$

Data la funzione densità di probabilità $p(x,t)$ possiamo usare l'equazione di *Fokker-Planck* per ricavare le quantità $a(x,t)$ e $b(x,t)$ che utilizzate nell'equazione di *Langevin* permettono di descrivere, ad esempio il moto *browniano* e il moto di una particella in un campo di velocità turbolento.

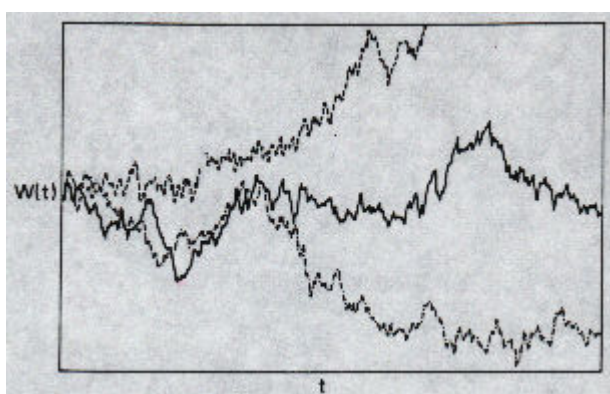
Processo di Wiener

Una particolare soluzione dell'equazione di Fokker-Planck, nel caso in cui si abbia $A(x,t)=0$ e $B(x,t)=1$ e il processo di Wiener, un processo stocastico con media nulla e varianza proporzionale a t per cui:

$$\mu(t) = E[x(t)] = 0$$

$$\sigma^2 = E[(x(t) - \mu(t))^2] = E[x^2(t)] = \alpha t$$

essendo α una costante.



La distribuzione di probabilità di questo processo è una Gaussiana con valor medio nullo e varianza $\sigma^2 = \alpha t$:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha t}\right)$$

Per tempi ordinati $t_1 > t_2 > t_3$ vale anche la seguente condizione:

$$E[(x(t_1) - x(t_2)) \cdot (x(t_2) - x(t_3))] = 0$$

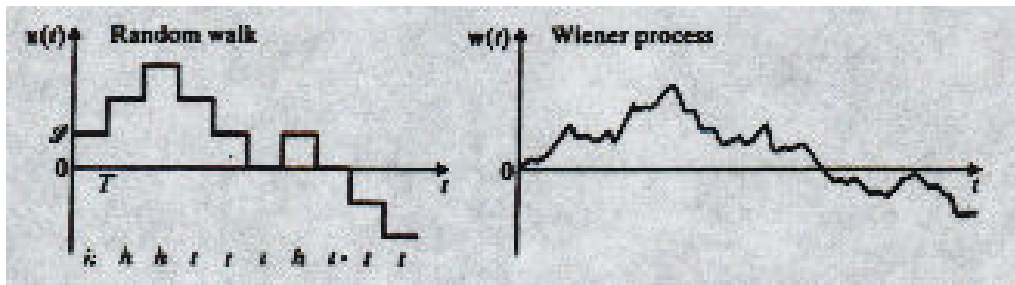
che significa che gli incrementi in un processo di Wiener sono scorrelati (indipendenti).

Se $\eta(t)$ è un processo di rumore bianco e $x(t)$ processo di Wiener si ha la relazione:

$$dx(t) = \eta(t)dt$$

quindi gli incrementi infinitesimi di questo tipo di processo costituiscono un processo di rumore bianco.

Il processo di Wiener può essere considerato come caso limite continuo di un processo discreto detto di **random walk**.



Nella figura di sinistra ogni 'step' ha la stessa durata T ma può essere positivo o negativo a seconda del risultato di una lancio di una moneta, per esempio testa corrisponde ad uno step positivo mentre croce ad uno negativo (Random walk). Il processo di Wiener a destra è il limite continuo (per T che tende a zero) del processo di Random walk.