

10 Modelli di dispersione

Simulare il comportamento di un inquinante, rilasciato in atmosfera, significa determinare il campo di concentrazione da esso prodotto in qualunque punto dello spazio e in qualunque istante successivo all'emissione.

Esistono sostanzialmente due modi per simulare la dispersione di inquinanti in atmosfera. Il primo, e' il punto di vista Euleriano, nel quale si utilizzano coordinate fisse nello spazio. In questa maniera si determinano i valori di concentrazione in punti fissi, riferiti al sistema scelto, utilizzando l'equazione di conservazione della massa della sostanza rilasciata. Il secondo utilizza coordinate che si muovono con le particelle e viene detto Lagrangiano. Questo vuol dire che le particelle di inquinanti possono essere trattate, da un punto di vista dinamico, come particelle d'aria, quindi soggette alle stesse forze, dotate della stessa densità e caratterizzate nel loro moto dagli stessi fenomeni che caratterizzano il moto di particelle d'aria (trasporto, turbolenza ecc..). Esistono vari modelli di questo tipo i quali, nella maggioranza dei casi usano per descrivere il moto di particelle in un campo turbolento l'equazione di Langevin, già vista nel precedente capitolo. Il più diffuso di questi modelli è quello sviluppato da Thomson nel 1987.

I modelli Lagrangiani Stocastici a particelle

Nei modelli stocastici a particelle si usa l'equazione di *Langevin* per descrivere l'evoluzione temporale delle velocità delle particelle di inquinanti rilasciate in atmosfera, in condizioni turbolente. Perché questo possa essere fatto in maniera corretta è necessario, per quanto visto nel capitolo precedente, poter considerare le velocità come un processo stocastico *Markoviano*.

Ciò è vero, se si considerano velocità separate temporalmente da un Δt maggiore di τ_n , tempo di scala di *Kolmogorov* circa uguale al tempo di correlazione delle accelerazioni (10^{-2} s), e minore di T_L , tempo *Lagrangiano* di correlazione delle

velocità (da pochi secondi a qualche centinaia), allora il processo che lega queste velocità è, in ottima approssimazione, un processo *Markoviano*.

In una dimensione l'equazione di Langevin per le velocità turbolente può essere scritta come segue:

$$du(t) = a(x, u) \cdot dt + b(x, u) \cdot dW$$

e sarà accoppiata all'equazione per lo spostamento

$$dx(t) = u(t) \cdot dt$$

dove dW rappresenta un processo di rumore bianco ($W(t)$ è un processo di Wiener), con media zero e varianza dt , già introdotto in precedenza.

$b(x, u)$ può essere derivata dalla teoria di Kolmogorov sull'isotropia locale nell'intervallo inerziale. Essa si basa su relazioni di similarità determinate in un particolare intervallo (subrange) dello spettro della turbolenza. Come già accennato, l'energia meccanica si trasferisce dai vortici più grandi a quelli più piccoli, fino ad arrivare ai vortici a piccolissima scala della turbolenza atmosferica nel PBL che vengono dissipati in calore a causa della viscosità. All'interno di questa cascata energetica c'è una parte di spettro dove i vortici sono sufficientemente piccoli da non risentire degli effetti di anisotropia indotti dai vortici più grandi e sufficientemente grandi da non essere dissipati in calore. Questa parte di spettro è chiamata, appunto, intervallo inerziale.

Questo intervallo coincide con l'intervallo di scale temporali definito in precedenza per la condizione di Markovianità e in esso vale la relazione:

$$b(x, u) = \sqrt{C_0 \cdot \varepsilon}$$

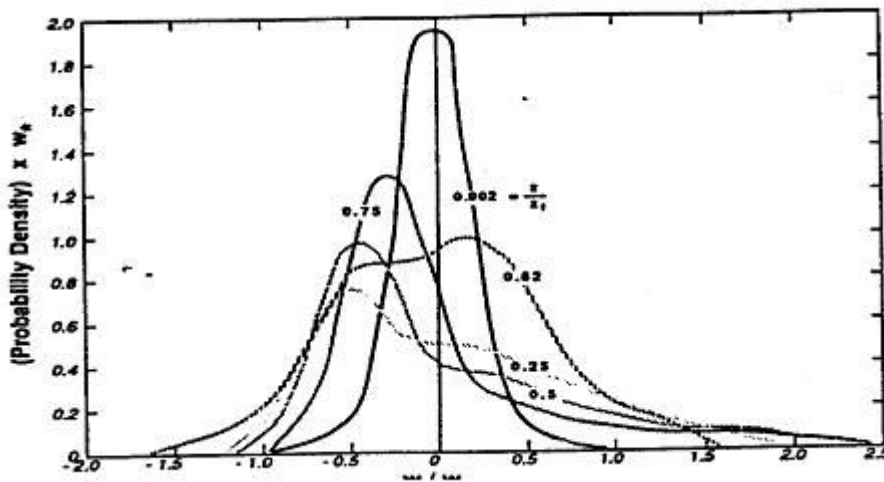
Definendo $b(x, u)$ in questo modo possiamo ricavare $a(x, u)$ tramite la condizione di *well mixed condition*.

Quest'ultima implica che la funzione densità di probabilità (PDF) delle particelle di inquinanti dopo un certo periodo di tempo, raggiunta una condizione stazionaria, sia uguale a quella delle particelle d'aria. Sotto questa condizione e sotto le condizioni di markovianità e continuità a cui obbediscono le velocità delle particelle d'aria si può,

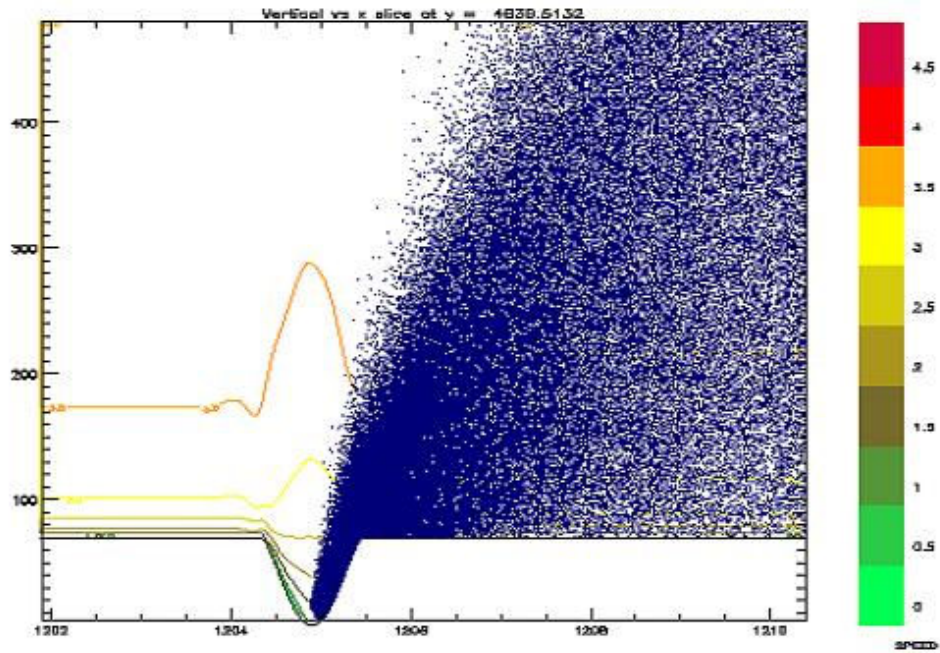
come visto nel capitolo precedente, ricavare $a(x,u)$ a partire dall'equazione di Fokker-Planck.

La well mixed condition impone che la funzione densità di probabilità delle velocità $P(x,u,t)$ delle particelle sia uguale (abbia uguali momenti) a quella dell'aria. Nel caso stazionario la $P(x,u,t)$ non dipende esplicitamente dal tempo.

Di fondamentale importanza in questo modello la definizione della PDF in quanto $a(x,u)$ dipende esplicitamente da questa scelta. In particolare nel caso generale in cui tale distribuzione sia non-Gaussiana (e quindi si fa riferimento principalmente alla PDF delle velocità verticali), bisogna costruire degli algoritmi in grado di generare distribuzioni con un numero di momenti non nulli superiore a 2.



Nei modelli a particelle vengono simulate le traiettorie di un gran numero di particelle (alcune migliaia) utilizzando l'equazione di Langevin e quindi se ne calcola il valor medio. Nella pratica la concentrazione dell'inquinante, emesso da una certa sorgente, in un dato punto del dominio è dato dal numero di particelle contenute in un volumetto intorno al punto considerato diviso per il volume stesso.

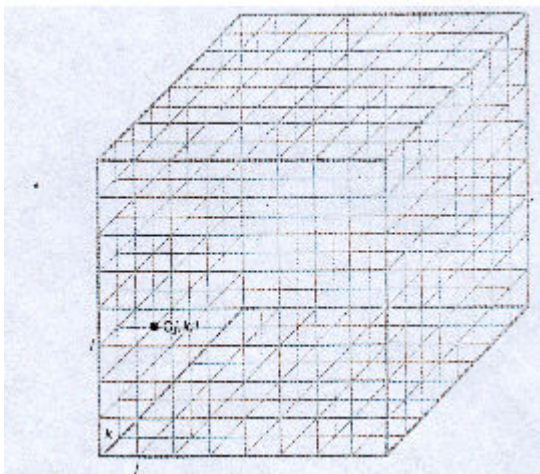


Modelli Euleriani

Risolvono direttamente l'equazione di avvezione-diffusione per la concentrazione c di inquinante, su una griglia tridimensionale (figura) che ne definisce il dominio di calcolo:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = v \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} + S$$

dove v e' la diffusività cinematica, in genere trascurabile rispetto alla dispersione turbolenta, S e' il termine di sorgente ed u_i la componente della velocità. In questa



espressione si sottintende che l'indice i assuma i valori 1,2,3 corrispondenti alle 2 coordinate spaziali e i termini così ottenuti siano sommati.

Ponendo

$$u_i = \overline{u_i} + u' \quad e \quad c = \langle c \rangle + c'$$

dove $\langle c \rangle$ e $\overline{u_i}$ sono i valori medi e u' , c' le fluttuazioni (i indica la generica componente, $i=1,2,3$). Trascurando il termine di diffusività molecolare, sostituendo e mediando si ottiene:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} = - \frac{\partial \langle c' u_i' \rangle}{\partial x_i} + S$$

$\overline{u_i}$ si ricava dalle misure o da modelli meteorologici, mentre il termine

$$\langle c' u_i' \rangle$$

e' da determinare tramite una 'chiusura', si deve cioè esprimere questa quantità in funzione delle variabili medie.

Modello K

Se come ipotesi di chiusura si assume la relazione flusso-gradiente (qui scritta per la componente verticale):

$$\langle c' w' \rangle = -K_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} \quad (*)$$

con K_z costante di proporzionalità (positiva) detta coefficiente di diffusione turbolenta. Questa espressione indica che il flusso di concentrazione $\langle c' w' \rangle$ ha direzione opposta al gradiente di concentrazione in modo da trasportare la concentrazione da zone dove è maggiore a zone dove è minore. Supponendo condizioni stazionarie e lontano dalla sorgente si ottiene la seguente equazione, nota come "Modello K":

$$u \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} + v \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} + w \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} = K_x \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial z^2}$$

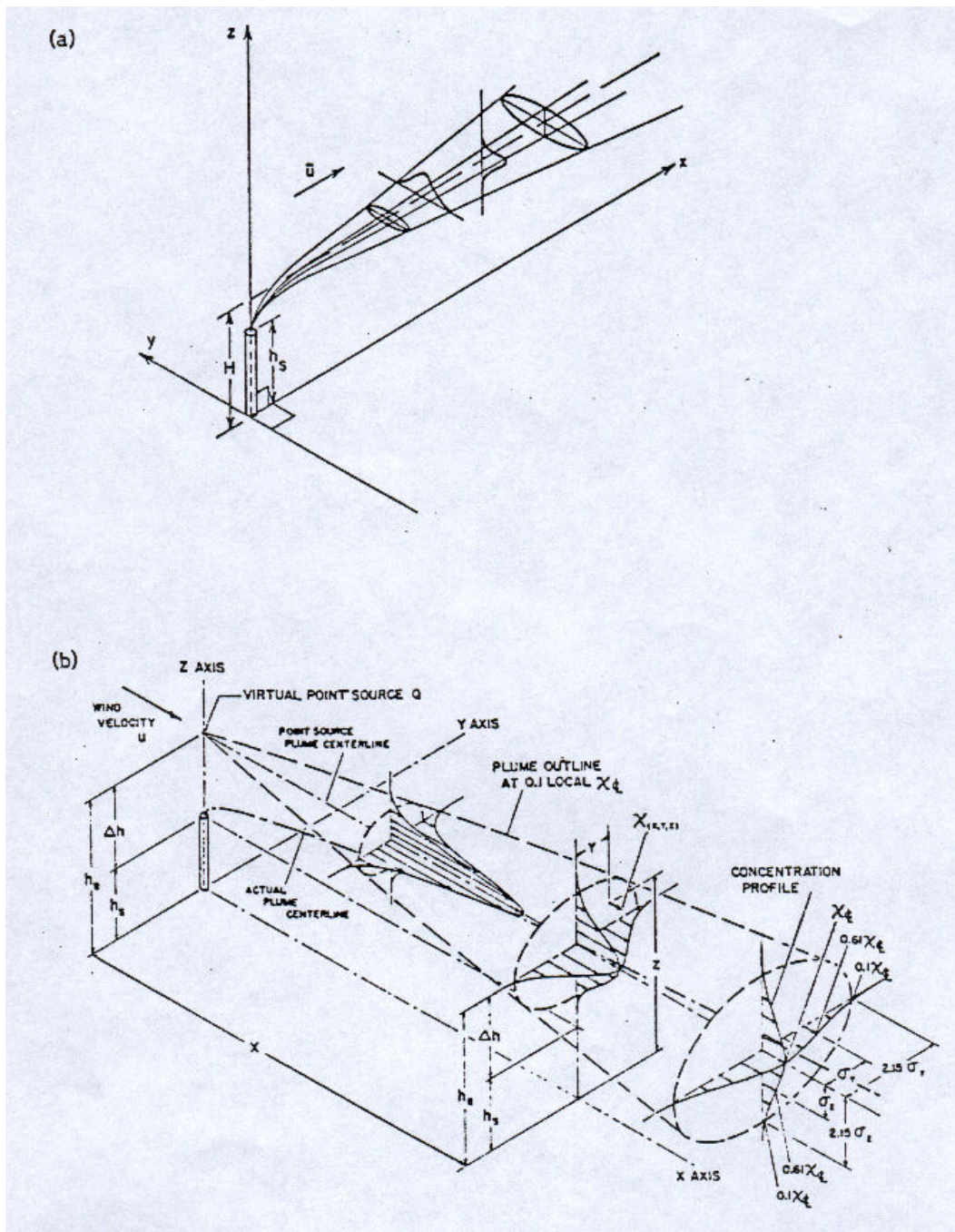
Si noti che la precedente ipotesi (eq. *) mette in relazione i termini di cross-correlazione delle fluttuazioni della concentrazione e della componente del vento con il gradiente, lungo la direzione relativa a tale componente della concentrazione media, chiudendo l'equazione di avvezione diffusione.

Si possono avere soluzioni **analitiche** con K e \bar{u} costanti (modello Gaussiano), o con K e \bar{u} funzioni di potenza di z e soluzioni **numeriche**.

Modello Gaussiano

La piu' semplice soluzione analitica dell'equazione di diffusione e' data dalla formula Gaussiana

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi\sigma_y\sigma_z u} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \left[e^{-\frac{(z-H_e)^2}{2\sigma_z^2}} + e^{-\frac{(z+H_e)^2}{2\sigma_z^2}} \right]$$



dove la concentrazione C nel punto di coordinate x,y,z e' funzione della quantità Q di inquinante emesso per unità di tempo, del vento medio u, dell'altezza effettiva; dell'emissione H_e.

Le deviazioni standard nella direzione trasversale al vento medio (y) e nella direzione verticale (z) sono funzioni della distanza sottovento dalla sorgente (x):

$$\sigma_y = \sigma_y(x); \sigma_z = \sigma_z(x)$$

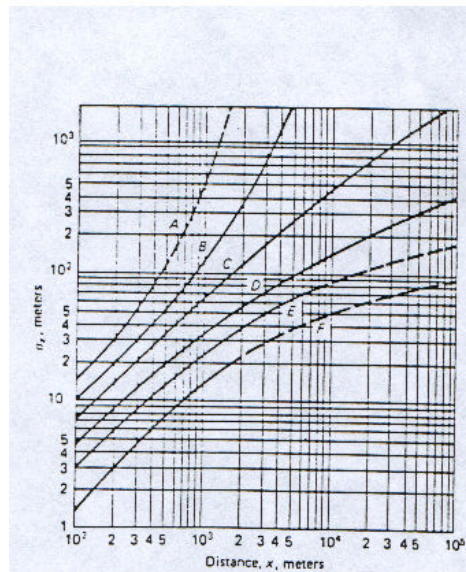
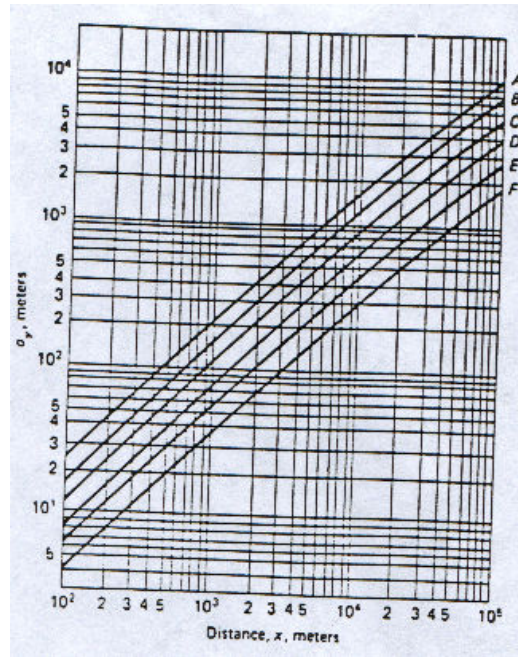
Per esempio si possono utilizzare le sigma di Pasquill-Gifford:

$$\sigma_y(x) = \frac{k_1 x}{\left(1 + \left(\frac{x}{k_2}\right)\right)^{k_3}}$$

$$\sigma_z(x) = \frac{k_4 x}{\left(1 + \left(\frac{x}{k_2}\right)\right)^{k_5}}$$

I coefficienti k di queste relazioni dipendono dalla classe di stabilità secondo la tabella.

Stability Class	k ₁	k ₂	k ₃	k ₄	k ₅
A	0.250	927	0.189	0.1020	-1.918
B	0.202	370	0.162	0.0962	-0.101
C	0.134	283	0.134	0.0722	0.102
D	0.0787	707	0.135	0.0475	0.465
E	0.0566	1,070	0.137	0.0335	0.624
F	0.0370	1,170	0.134	0.0220	0.700



Altre curve largamente utilizzate sono quelle ricavate da Briggs:

Urban Dispersion Parameters by Briggs (for Distances between 100 and 10000 m)		
Pasquill type	σ_y, m	σ_z, m
A-B	$0.32x (1 + 0.0004x)^{-0.5}$	$0.24x (1 + 0.001x)^{0.5}$
C	$0.22x (1 + 0.0004x)^{-0.5}$	$0.20x$
D	$0.16x (1 + 0.0004x)^{-0.5}$	$0.14x (1 + 0.0003x)^{-0.5}$
E-F	$0.11x (1 + 0.0004x)^{-0.5}$	$0.08x (1 + 0.0015x)^{-0.5}$

Rural Dispersion Parameters by Briggs (for Distances between 100 and 10000 m)		
Pasquill type	σ_y, m	σ_z, m
A	$0.22x (1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.20 x$
B	$0.16x (1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.12 x$
C	$0.11x (1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.08 x (1 + 0.0002x)^{-0.5}$
D	$0.08x (1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.06 x (1 + 0.0015x)^{-0.5}$
E	$0.06x (1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.03 x (1 + 0.0003x)^{-1}$
F	$0.04x (1 + 0.0001x)^{-0.5}$	$0.016 x (1 + 0.0003x)^{-1}$

Si noti che nella formula Gaussiana compare un doppio termine per la coordinata verticale che si differenzia per il segno, in un termine la quota sorgente viene sottratta mentre nell'altro viene sommata. In questo modo si tiene conto della riflessione al suolo del pennacchi e del conseguente aumento nelle concentrazioni al suolo (si veda la figura successiva).

