

# Meteorologia dinamica

PROF. ENRICO FERRERO

25 novembre 2009

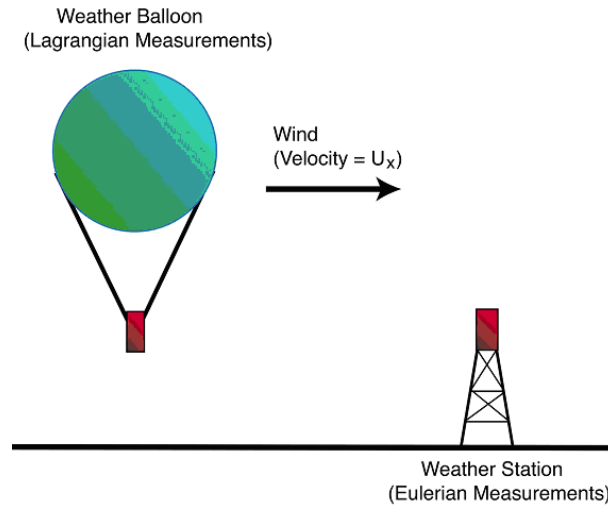


Figura 1: Misure Lagrangiane e misure Euleriane

## 1 I MOTI ATMOSFERICI

I moti atmosferici sono descritti da un insieme di 3 equazioni differenziali:

- Conservazione della massa (equazione di continuità)
- Conservazione della quantità di moto (equazioni di Navier-Stokes)
- Conservazione dell'energia (primo principio della termodinamica)

Inoltre, per chiudere il sistema è necessaria una quarta equazione, l'equazione di stato dei gas ideali.

Nello studio dei fenomeni atmosferici, e più in generale in fluidodinamica, si distinguono due modi per descrivere le variabili fisiche: Euleriano e Lagrangiano.

Nella descrizione Euleriana le variabili vengono osservate da un punto fisso di coordinate  $x, y, z$  e sono funzione di queste coordinate, oltre che naturalmente del tempo, per esempio:  $u(x, y, z, t)$ : coordinate Euleriane. Nella descrizione Lagrangiana si segue il moto delle particelle di fluido. Le variabili dipendono quindi dalla posizione iniziale (al tempo  $t = 0$ ) e dal tempo  $u(x_0, y_0, z_0, t)$ : coordinate Lagrangiane.

La variazione temporale totale (o sostanziale)  $\frac{d\theta}{dt}$ , di una variabile atmosferica  $\theta$  è data dalla somma della sua variazione locale nel tempo  $\frac{\partial\theta}{\partial t}$  più il termine avvevativo dovuto al moto del fluido  $u\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y} + w\frac{\partial\theta}{\partial z}$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y} + w\frac{\partial\theta}{\partial z} \quad (1)$$

In questa relazione la parte a sinistra dell'uguale rappresenta la derivata in coordinate Lagrangiane, in cui la variabile dipende solo dal tempo (e dalla posizione iniziale). La parte a destra dell'uguale corrisponde alla derivata in coordinate Euleriane in cui la variabile dipende sia da t sia dalle coordinate spaziali x, y, z. La relazione permette il passaggio dalle coordinate Lagrangiane a quelle Euleriane.

## 2 L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Questa equazione esprime il bilancio di massa in un volume V.

Se la variazione di massa è dovuta solo al flusso attraverso la superficie S che contorna il volume V allora ( $\rho$  densità):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_S \rho \bar{v} \cdot \bar{n} dS \quad (2)$$

essendo  $\bar{n}$  il versore normale alla superficie e  $\bar{v}$  il vettore velocità. Assumendo che il volume V non vari nel tempo e applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) \right] dV = 0 \quad (3)$$

che dovendo essere soddisfatta per qualunque volume V implica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (4)$$

che costituisce la forma **Euleriana** dell'equazione di continuità. Per fluidi incompressibili si ha

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (5)$$

Si noti che un'analogia equazione è valida per la concentrazione C di molte sostanze che sono trasportate nell'atmosfera, come p.e. vapore d'acqua e inquinanti:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \bar{v}) = R \quad (6)$$

dove R rappresenta le sorgenti (produzione) e i pozzi (distruzione) della sostanza.

Utilizzando l'identità

$$\nabla \cdot (\rho \bar{v}) = \bar{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \bar{v} \quad (7)$$

l'equazione di continuità può essere riscritta come segue:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (8)$$

che rappresenta la sua forma Lagrangiana, dove il simbolo (*operatore*)  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla$  rappresenta la derivata totale somma della variazione locale nel tempo e del termine avvevativo.

### 3 L'EQUAZIONE DI STATO

Per un gas lontano dal punto critico vale, con buona approssimazione l'equazione di stato

$$pV = nR_u T \quad (9)$$

dove  $p$  è la pressione,  $V$  il volume,  $T$  la temperatura assoluta,  $R_u$  è la costante universale dei gas ( $8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ),  $n$  il numero di moli ( $n = \frac{m}{\mu_0}$  : massa divisa per la massa di una mole).

Dividendo per la massa  $m = n\mu_0$ , l'equazione può essere riscritta in altra forma ponendo  $R = \frac{R_u}{\mu_0} = 287 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ , per aria secca e condizioni standard:

$$p = \rho RT \quad (10)$$

dove  $\rho = \frac{m}{V}$  è la densità. Se l'atmosfera è umida bisogna considerare il vapore d'acqua. Il contenuto di vapore d'acqua può essere caratterizzato dall'umidità specifica:

$$q = \frac{m_v}{m} = \frac{\rho'_v}{\rho} \quad (11)$$

cioè il rapporto tra la massa del vapor d'acqua  $m_v$  e la massa dell'aria umida  $m = m_v + m_d$  dove  $m_d$  è la massa dell'aria secca. Inoltre  $\rho'_v = \frac{1}{v_v} = \frac{m_v}{V}$  e  $\rho'_d = \frac{1}{v_d} = \frac{m_d}{V}$ , dove  $v_v$  e  $v_d$  sono i volumi specifici, per cui  $\rho = \rho'_v + \rho'_d$ . Si ricordi che il vapore è più leggero dell'aria umida che a sua volta è molto più leggera dell'aria secca  $\rho_v < \rho < \rho_d$ . Dove  $\rho_v$  e  $\rho_d$  sono le effettive densità del vapor d'acqua e dell'aria secca.

La pressione atmosferica è la somma delle pressioni parziali dell'aria secca  $p_d$  e del vapore d'acqua e (**legge di Dalton**). Supponendo che entrambi siano gas ideali si ottiene:

$$p = p_d + e = \rho'_d RT + \rho'_v R_v T = \rho RT \left( \frac{\rho'_d}{\rho} + 1.61 \frac{\rho'_v}{\rho} \right) = \rho RT (1 + 0.61q) \quad (12)$$

essendo  $\frac{R_v}{R} = \frac{28.96}{18} = 1.61$  il rapporto tra i pesi molecolari:

- Per l'aria secca  $M_a = 28,96g/mole$
- Per il vapore d'acqua  $M_v = 18g/mole$

oppure

$$p = \rho RT_v \quad (13)$$

dove,

$$T_v = T(1 + 0.61q) \quad (14)$$

è la temperatura virtuale, ovvero la temperatura che deve avere una particella d'aria secca per avere la stessa densità di una particella di aria con umidità specifica  $q$  a parità di pressione. Inoltre  $R_v = 1.61R$ .

Nel caso in cui sia presente sia vapore sia liquido si ha,

$$\rho = \rho'_v + \rho'_L + \rho'_d \quad (15)$$

e

$$T_v = T(1 + 0.61q - q_L) \quad (16)$$

essendo  $q_L = \rho'_L/\rho$  per il liquido.

## 4 IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Le variazioni di energia interna sono legate agli scambi di calore e di lavoro dalla legge (primo principio)

$$dU = \delta Q - pdV \quad (17)$$

Per un processo adiabatico  $\delta Q = 0$  vale l'equazione di Poisson

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (18)$$

dove  $c_p = 1007m^2s^{-2}K^{-1}$  è il calore specifico a pressione costante (diviso per  $\mu_0$ ).

La temperatura potenziale  $\theta$  è definita dall'equazione di Poisson come la temperatura raggiunta da una particella portata, con un processo adiabatico, dalla pressione a livello  $p$  fino al livello 1000 mbar

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (19)$$

Prendendo il logaritmo di questa espressione e differenziando otteniamo

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dT}{T} - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} \quad (20)$$

, il primo principio (per unità di massa) può essere riscritto come segue

$$dU = \delta Q - d(pV) + V dp = \delta Q - R dT + V dp \quad (21)$$

utilizzando la relazione di Mayer  $c_p - c_v = R$  e la relazione  $dU = c_v dT$ , si ottiene:

$$c_p dT = \delta Q + \alpha dp \quad (22)$$

dove  $\alpha = V/(n\mu_0) = 1/\rho$  è il volume specifico. Si tenga conto che in questa espressione  $c_p$  ed  $R$  sono divisi per  $\mu_0$  e quindi anche gli altri termini vanno considerati per unità di massa.

Per tener conto dell'umidità si sostituisce  $T$  con  $T_v$  e di conseguenza si definisce  $\theta_v$ .

Derivando rispetto al tempo il primo principio e considerando la temperatura virtuale anziché quella assoluta per tener conto dell'umidità, si ha

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{dp}{dt} + S_\theta \quad (23)$$

dove si è posto  $S_\theta = \frac{1}{c_p} \frac{\delta Q}{dt}$  che rappresenta sorgenti e pozzi di calore. Infine con l'aiuto dell'equazione derivata per  $\theta$  si ha:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} S_\theta \quad (24)$$

che rappresenta la variazione (in coordinate Lagrangiane, cioè seguendo il moto della massa d'aria) della temperatura potenziale in funzione del tempo. Si noti che essa dipende solo dalla presenza di sorgenti e pozzi di calore. In particolare se questi sono nulli la temperatura potenziale si conserva **seguendo il moto**.

## 5 EQUAZIONI DEL MOTO (di Navier-Stokes)

La variazione della quantità di moto in un volume  $V$  è data dalle forze sulla superficie di tale volume, più le forze agenti sull'intero volume.

$$\int_V \rho \frac{du_i}{dt} dV = \int_S \mathbf{T}_i dS + \int_V \rho G_i dV \quad (25)$$

per la  $i$ -esima componente, con  $i = 1, 2, 3$ , della velocità  $u_i$ , dove

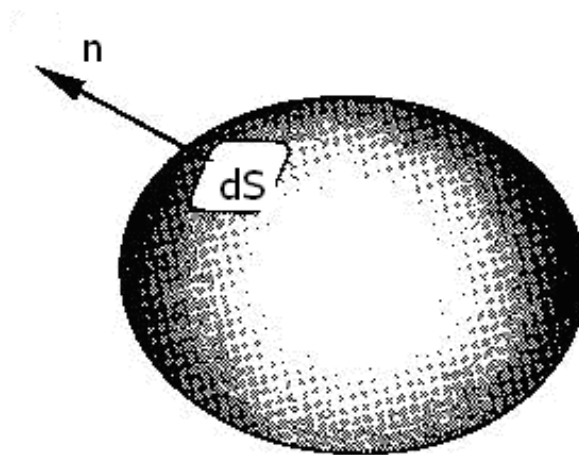


Figura 2: Superficie che racchiude un generico volume;  $dS$  rappresenta la superficie infinitesima ed  $\mathbf{n}$  la normale ad essa

- $\mathbf{T}_i$  rappresenta le forze di superficie ed è la  $i$ -esima componente del tensore degli sforzi (stress) che definiremo dopo.
- $G_i$  rappresenta le forze di volume.

Applicando il teorema della divergenza:

$$\int_S \mathbf{T}_i dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T}_i dV \quad (26)$$

si ottiene:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{T}_i + \rho G_i \quad (27)$$

Le forze di volume corrispondono essenzialmente alle forze di gravità. Le forze di superficie sono rappresentate dal *tensore degli stress (sforzi)* che può essere rappresentato come segue:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

Le righe di questa matrice corrispondono ai vettori  $T_i$  con  $i = 1, 2, 3$ . Con riferimento alla figura 3 si ha:

- componenti normali
- componenti parallele

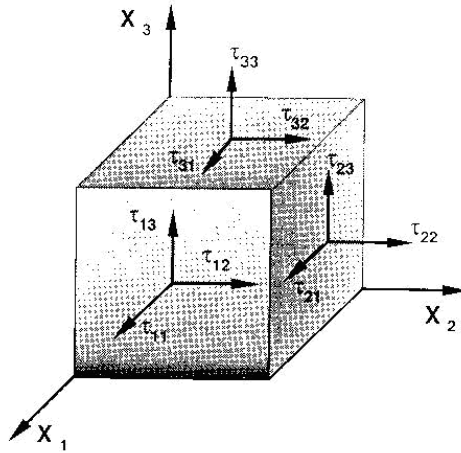


Figura 3: Componenti del tensore degli sforzi

E' un tensore simmetrico:  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

Se il fluido è senza attriti, non viscoso, si ha:  $\tau_{ij} = 0$  per  $i \neq j$  inoltre

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p \quad (28)$$

e quindi

$$\frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}}{3} = -p \quad (29)$$

La pressione e' invariata per rotazioni (isotropia). Nel caso di fluido viscoso si ha, per l'ipotesi di Newton:

$$\tau_{ij} = a\delta_{ij} + bS_{ij} \quad (30)$$

dove

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (31)$$

e' il tensore simmetrico detto *rate of strain* (tasso di deformazione), e  $a$  e  $b$  costanti. Essendo  $b = 2\mu$ , con  $\mu$  coefficiente di viscosità dinamica, e poiché, come si è visto prima  $\tau_{\alpha\alpha} = -3p$  (dove si sottintende la somma su indice ripetuto), si ottiene:

$$a = -p - \frac{2}{3}\mu S_{\alpha\alpha} \quad (32)$$

Si noti che

$$S_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (33)$$

si ottiene quindi:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (34)$$



### Forze di Gradiente di Pressione (PGF)

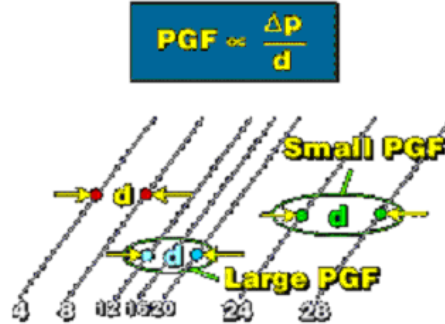


Figura 4: Schema raffigurante il gradiente di pressione

dove

$$\sigma_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right] \quad (35)$$

(se il fluido e' incomprimibile, dall'equazione di continuit , si ha:  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$ )

Sostituendo l'espressione di  $\tau_{ij}$  nell'equazione del moto 27 si ottiene:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} + \rho G_i \quad (36)$$

se il fluido e' incomprimibile si ha:

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} + G_i \quad (37)$$

dove  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$    la viscosit  cinematica.

Il primo termine a destra dell'uguale rappresenta le forze di **gradiente di pressione**:

Il secondo termine rappresenta le forze di **attrito viscoso**:

**G** rappresenta la **forza di gravit **.

Se il fluido si trova in un sistema di riferimento rotante (non inerziale) come la terra bisogna trasformare l'equazione precedente utilizzando le seguenti relazioni:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt}_{inerziale} = \frac{d}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times$$



Figura 5: Schema raffigurante le forze di attrito

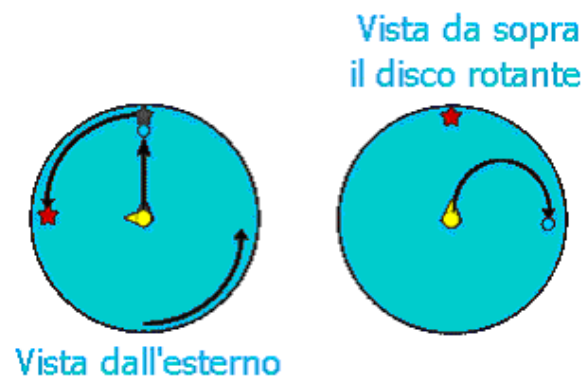


Figura 6: Corpo in moto su un disco rotante

## Forza di Coriolis

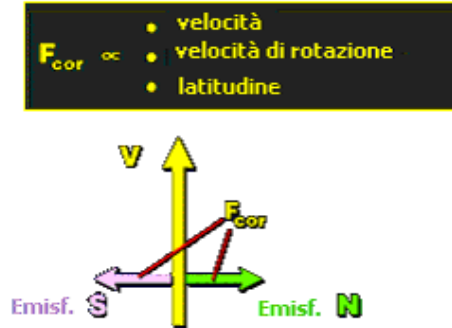


Figura 7: Schema raffigurante le forze di Coriolis

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità nel sistema inerziale,  $\mathbf{V}$  la velocità nel sistema rotante,  $\boldsymbol{\Omega}$  la velocità di rotazione terrestre ed  $\mathbf{R}$  il vettore posizione rispetto al centro della terra che individua la posizione della particella d'aria.

Si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}_{\text{inerziale}} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (39)$$

dove il secondo termine della parte destra è l'accelerazione di Coriolis e il terzo è la forza centrifuga. Quest'ultimo, di norma, viene inglobato nel termine di gravità:

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (40)$$

dando origine alla gravità effettiva  $\mathbf{g}$ .

Scrivendo per componenti il termine di Coriolis:

$$2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_i = 2\epsilon_{i\alpha\beta}\omega_\alpha u_\beta \quad (41)$$

essendo  $\omega_\alpha$  e  $u_\beta$  sono le componenti dei vettori rotazione e velocità ed  $\epsilon_{ijk}$  il tensore di Levi-Civita che vale:

- +1 se  $(ijk) = (123) \text{ o } (231) \text{ o } (312)$
- -1 se  $(ijk) = (321) \text{ o } (132) \text{ o } (213)$
- 0 se  $i = j$  o  $i = k$  o  $j = k$

si ottiene:

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} + g\delta_{i3} - 2\epsilon_{i\alpha\beta}\omega_\alpha u_\beta \quad (42)$$

Considerando il sistema di riferimento della terra (figure 8):

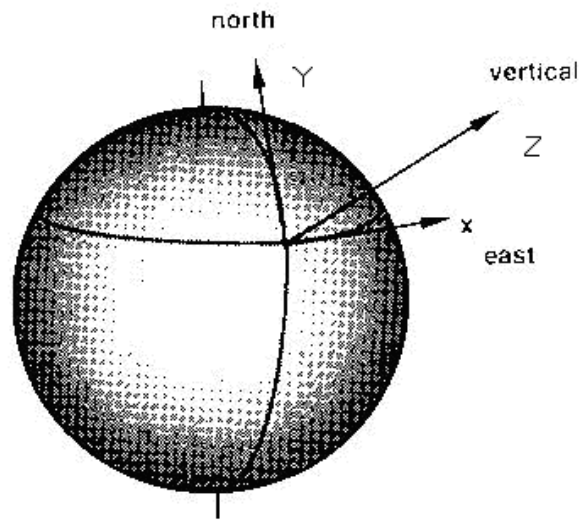


Figura 8: Sistema di riferimento della terra

- asse  $x_1$  diretto lungo i paralleli verso EST
- asse  $x_2$  diretto lungo i meridiani verso NORD
- asse  $x_3$  perpendicolare al piano tangente.

e indicando con  $\phi$  la latitudine, si ha per le componenti del vettore rotazione:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 0 \\
 \omega_2 &= \Omega \cos \phi \\
 \omega_3 &= \Omega \sin \phi
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

da cui si ottengono le componenti del termine di Coriolis:

$$\begin{aligned}
 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_1 &= -2\Omega \sin \phi u_2 + 2\Omega \cos \phi u_3 \\
 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_2 &= 2\Omega \sin \phi u_1 \\
 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_3 &= -2\Omega \cos \phi u_1
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

## 6 SEMPLIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI BASE

Ogni variabile termodinamica viene scomposta in due parti: uno stato di riferimento (sinottico) ed una perturbazione:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p'' \\ \rho &= \rho_0 + \rho'' \\ T &= T_0 + T'' \\ \theta &= \theta_0 + \theta'' \end{aligned} \quad (45)$$

dove, accanto alle usuali variabili termodinamiche, pressione ( $p$ ), densità ( $\rho$ ) e temperatura assoluta ( $T$ ), è stata introdotta la temperatura potenziale ( $\theta$ ). Le variabili di riferimento soddisfano le seguenti equazioni del vento geostrofico (si veda il prossimo capitolo):

$$U_{g1} = -\frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \quad (46)$$

$$U_{g2} = \frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} \quad (47)$$

equazione idrostatica:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_3} = -g \quad (48)$$

equazione di stato:

$$p_0 = \rho_0 R T_0 \quad (49)$$

dove con  $f$  si è indicato il parametro di Coriolis  $f = 2\Omega \sin(\phi)$  (con  $\phi$  latitudine).

Utilizzando la (49) l'equazione di stato per le variabili complete ( $p$ ,  $\rho$  e  $T$ ) diventa:

$$p'' = \rho_0 R T'' + \rho'' R T_0 + \rho'' R T'' \simeq \rho_0 R T'' + \rho'' R T_0 \quad (50)$$

e dividendo membro a membro per la (49):

$$\frac{p''}{p_0} = \frac{T''}{T_0} + \frac{\rho''}{\rho_0} \quad (51)$$

ed essendo per l'atmosfera  $\frac{\rho''}{\rho_0} \simeq 0$  si ottiene:

$$\frac{T''}{T_0} \simeq -\frac{\rho''}{\rho_0} \quad (52)$$

D'altra parte, dalla definizione di temperatura potenziale, considerando la perturbazione come un differenziale e differenziando logaritmicamente (si veda l'analogia con la relazione (20)) è anche:

$$\frac{\theta''}{\theta_0} = \frac{T''}{T_0} - \frac{R p''}{c_p p_0} \simeq \frac{T''}{T_0} \quad (53)$$

e quindi

$$\frac{\theta''}{\theta_0} \simeq -\frac{\rho''}{\rho_0} \quad (54)$$

Il termine di pressione e quello di gravità nell'equazione di Navier-Stokes possono essere riscritti, scomponendo le variabili, come segue:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g\delta_{i3} = \frac{1}{(\rho_0 + \rho'')} \left( \frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\partial p''}{\partial x_i} + (\rho_0 + \rho'')g\delta_{i3} \right) \quad (55)$$

utilizzando le (46), (46) e (49) e trascurando le perturbazioni di densità  $\rho''$  in tutti i termini tranne che in quello di gravità (**approssimazione di Boussinesq**), la parte a destra dell'uguale dell'espressione precedente può essere riscritta come:

$$fU_{g\alpha}\epsilon_{i\alpha 3} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p''}{\partial x_i} + \frac{\rho''}{\rho_0} g\delta_{i3} \quad (56)$$

e introducendo la relazione (54),

$$fU_{g\alpha}\epsilon_{i\alpha 3} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p''}{\partial x_i} - \frac{\theta''}{\theta_0} g\delta_{i3} \quad (57)$$

Con queste relazioni le equazioni del moto diventano:

$$\frac{du_i}{dt} = f(u_\alpha - U_{g\alpha})\epsilon_{i\alpha 3} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p''}{\partial x_i} + \frac{\theta''}{\theta_0} g\delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2} \quad (58)$$

Si noti che l'**approssimazione di Boussinesq** è valida per flussi atmosferici con scala verticale delle lunghezze inferiore a 1km. Da essa deriva l'incompressibilità del fluido e la soppressione delle onde acustiche. Nello scrivere i termini di Coriolis si è trascurato il termine  $2\Omega \cos \phi u_3$  per  $i=1$  e il termine  $2\Omega \cos \phi u_1$  per  $i=3$ , perché piccoli rispetto agli altri termini delle rispettive equazioni.

E' generalmente accettato che i flussi atmosferici e oceanici siano descritti da queste equazioni. Non si conoscono soluzioni analitiche (se non in casi semplificati), ma possono essere risolte numericamente. La complessità e'

introdotta dai termini non lineari che derivano dalla relazione tra derivata totale (Lagrangiana) e derivata parziale (Euleriana):

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \quad (59)$$

che determinano il *comportamento caotico*, **la dipendenza dalle condizioni iniziali e la non predicibilità**.

Un grosso problema nella soluzione di queste equazioni e' dato dal grande numero di scale spaziali e temporali che e' necessario considerare. Questo problema può essere risolto con l'**ipotesi di Reynolds**: le variabili possono essere scomposte in un termine medio (lettere maiuscole) più una fluttuazione (lettere con apici), il primo termine corrispondente alla grande scala ed il secondo alla piccola scala:

$$\begin{aligned} u_i &= U_i + u'_i \\ p'' &= P + p' \\ \theta'' &= \Theta + \theta' \end{aligned} \quad (60)$$

le medie possono essere *spaziali*, *temporali* o *d'insieme*. Sostituendo e mediando le equazioni si ottiene:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} = f(U_\alpha - U_{g\alpha}) \epsilon_{i\alpha 3} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\Theta}{\theta_0} g \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\overline{\partial u'_i u'_\alpha}}{\partial x_\alpha} \quad (61)$$

essendo  $\overline{u'} = \overline{p'} = \overline{\theta'} = 0$ , dove la barra indica l'operazione di media. Si osservi che è stata utilizzata la relazione:

$$u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial u_i u_\alpha}{\partial x_\alpha} - u_i \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (62)$$

dove l'ultimo termine è nullo per condizione di incompressibilità ( $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$ ). Questa relazione è valida anche per valor medio e fluttuazione separatamente.

Analoghi procedimenti di media si possono applicare alle altre equazioni differenziali che descrivono i moti atmosferici.

I termini  $\overline{u'_i u'_j}$  costituiscono un tensore simmetrico detto **tensore degli stress di Reynolds** e rappresentano la turbolenza. Il problema è come esprimere questi termini in funzione delle quantità medie in modo da *chiudere* il sistema di equazioni e, per questo motivo, va sotto il nome di *chiusura della turbolenza*.

Una semplice soluzione si ottiene immaginando che il moto turbolento a piccola scala agisca sul moto a grande scala nello stesso modo in cui il moto molecolare influenza il flusso macroscopico, introducendo il concetto di

*viscosità turbolenta* o *eddy viscosity* il tensore degli stress si può esprimere in funzione dei gradiente delle quantità medie, come segue:

$$\overline{u'_i u'_j} = -\nu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (63)$$

dove si è introdotta la *viscosità turbolenta*  $\nu_T$  che parametrizza la turbolenza. Distinguendo tra viscosità turbolenza verticale  $\nu_{TV}$  e orizzontale  $\nu_{TH}$  per tener conto dell'anisotropia del flusso atmosferico si hanno i seguenti valori:

In atmosfera:

$$\nu_{TV} \simeq 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}; \quad \nu_{TH} \simeq 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (64)$$

nell'oceano:

$$\nu_{TV} \simeq 0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}; \quad \nu_{TH} \simeq 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (65)$$

dove si sono considerati valori diversi per la direzione verticale (v) e orizzontale (h) per tener conto dell'anisotropia dei flussi atmosferici e oceanici. Per confronto riportiamo i valori molecolari:

$$\nu = 1.510^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ per l'aria}; \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ per l'acqua.} \quad (66)$$

Lo stesso procedimento può essere applicato all'equazione per la temperatura potenziale, che riscriviamo introducendo il termine di conduttività termica  $\nu_\theta$  :

$$\frac{\partial \theta''}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta''}{\partial x_\alpha} = \nu_\theta \frac{\partial^2 \theta''}{\partial x_\alpha^2} + S_\theta \quad (67)$$

introducendo l'ipotesi di Reynolds  $\theta'' = \Theta + \theta'$  e mediando l'equazione si ottiene:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \overline{u'_\alpha \theta'}}{\partial x_\alpha} + S_\theta \quad (68)$$

dove i termini  $\overline{u'_\alpha \theta'}$  sono i flussi turbolenti di calore che possono essere espressi come:

$$\overline{u'_\alpha \theta'} = -\nu_H \frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha} \quad (69)$$

avendo introdotto la diffusività termica turbolenta  $\nu_H$

Inoltre si è trascurato il termine di conduttività termica  $\nu_\theta$  perché piccolo rispetto a quello turbolento.



Tabella 1: SCALA SINOTTICA

U	$10ms^{-1}$	scala delle velocità orizzontali
W	$1cms^{-1}$	scala delle velocità verticali
L	$10^6m$	lunghezza di scala orizzontale
H	$10^4m$	lunghezza di scala verticale
$\delta P/\rho$	$10^3m^2s^{-2}$	scala delle variazioni orizzontali di pressione
L/U	$10^5s$	scala dei tempi

Tabella 2: ANALISI DI SCALA DELL'EQUAZIONE PER LA COMPONENTE ORIZZONTALE

Eq. -x	$\frac{du}{dt}$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$-2\Omega \sin \phi v$	$2\Omega \cos \phi w$	$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$
Eq. -y	$\frac{dv}{dt}$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$2\Omega \sin \phi u$	-	$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2}$
Scale	$\frac{U^2}{L}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$f_0 U$	$f_0 W$	$\nu \frac{U}{H^2}$
$ms^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-12}$

## 7 IL FLUSSO GEOSTROFICO

Consideriamo la cosiddetta *scala sinottica*, definita dalle grandezze di scala per le variabili che caratterizzano il moto atmosferico riportate in Tabella 1.

Utilizzando questi valori di scala possiamo valutare gli ordini di grandezza e quindi la relativa importanza dei vari termini delle equazioni del moto non mediate (eq. 42). In Tabella 2 è riportata l'analisi di scala per le equazioni delle componenti orizzontali.

Dove  $f_0 = 2\Omega \sin \phi \simeq 10^{-4} s^{-1}$  per le medie latitudini e  $\nu \simeq 10^{-5} m^2 s^{-1}$ .

Tenuto conto degli ordini di grandezza dei vari termini possiamo semplificare l'equazioni del moto orizzontali mantenendo solo i termini dell'ordine di  $10^{-3}$  si ottengono così l'equazioni per il moto geostrofico :

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -fv \\
 -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= fu
 \end{aligned}
 \tag{70}$$

Il primo termine trascurato, perché di un ordine di grandezza inferiore, è la derivata temporale delle componenti della velocità, quindi queste equazioni sono valide se il rapporto tra questo termine e quelli che le compongono è molto minore di 1. In altre parole l'approssimazione geostrofica è valida se

Tabella 3: ANALISI DI SCALA DELL'EQUAZIONE PER LA COMPONENTE VERTICALE

Eq. -z	$\frac{dw}{dt}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	-g	$-2\Omega \cos \phi u$	$\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$
Scale	$\frac{WU}{L}$	$\frac{P_0}{\rho H}$	g	$f_0 U$	$\nu \frac{W^2}{H^2}$
$m.s^{-2}$	$10^{-7}$	10	10	$10^{-3}$	$10^{-15}$

il numero di Rossby definito come rapporto tra i termini inerziali (derivate temporali) e quelli dovuti alla rotazione:

$$Ro = \frac{U}{fL} \quad (71)$$

e' molto minore di 1 ( $Ro \ll 1$ ). Si noti che  $Ro$  e' una quantità adimensionale e quindi indipendente dal sistema di misura utilizzato. Quando questa condizione non e' più valida, si debbono includere anche i termini inerziali, cioè utilizzare le equazioni quasi-geostrofiche:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \end{aligned} \quad (72)$$

Per l'equazione della componente verticale l'analisi di scala è riportata in Tabella 3: con  $P_0 = 10^3 hPa$  e  $\rho = 1Kg m^{-3}$ . I termini più importanti sono quelli di gradiente di pressione e di gravità, considerando solo questi due termini si ottiene l'equazione idrostatica:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (73)$$

Questa equazione può essere considerata una buona approssimazione dell'equazione del moto verticale, in un gran numero di casi ed di scale di moto, infatti i termini che la compongono sono di diversi ordini di grandezza maggiori degli altri. Tuttavia equazioni più complesse devono essere considerate in casi in cui non sia possibile trascurare l'accelerazione verticale (equazioni non-idrostatiche).

Quindi per le scale qui considerate o, più in generale, quando le scale del moto siano tale da dare un numero di Rossby minore di 1, la soluzione



Figura 9: Equilibrio idrostatico

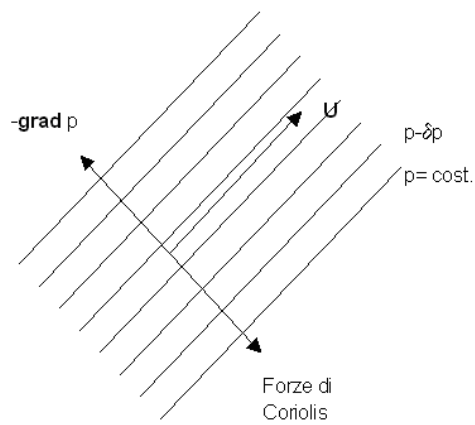


Figura 10: Equilibrio geostrofico

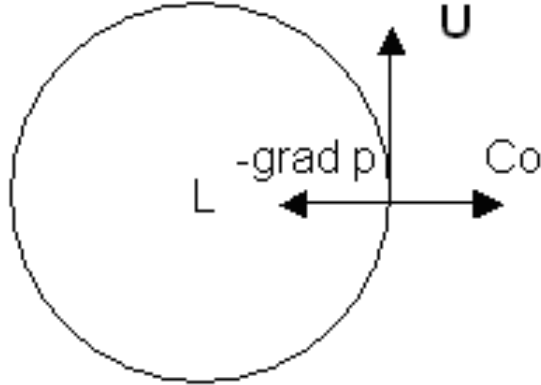


Figura 11: Circolazione ciclonica

delle equazioni del moto e' data dal flusso geostrofico che obbedisce al set di equazioni dato dalle 70. 73. Per esempio con  $U = 10ms^{-1}$ ,  $f = 10^{-4}s^{-1}$  ed  $L = 1000 km$  si ha  $Ro = 0.1$  Le equazioni precedenti rappresentano un moto lungo le isobare(figura 8), cioè curve lungo le quali la pressione è costante, infatti definendo il vettore geostrofico:

$$\mathbf{U} \equiv (u_g \mathbf{i} + v_g \mathbf{j}) \quad (74)$$

si ha:

$$\mathbf{U} \cdot \nabla p = \frac{1}{\rho f} \left( -\frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{j} \right) \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} \right) = 0 \quad (75)$$

Si possono verificare due diverse situazioni:

- In presenza di un minimo di pressione (L) si ha circolazione ciclonica (figura 11)
- In presenza di un massimo di pressione (H) si ha circolazione anticiclonica (figura 12)

## 8 IL VENTO TERMICO

In presenza di un gradiente orizzontale di densità si ha una variazione del vento geostrofico con la quota.

Supponendo per esempio  $\frac{\partial \rho}{\partial x} < 0$ , per l'equilibrio idrostatico che implica  $\delta p = -\rho g \delta z$ , deve essere  $\delta z_2 > \delta z_1$ , quindi, come mostrato in figura 13, le

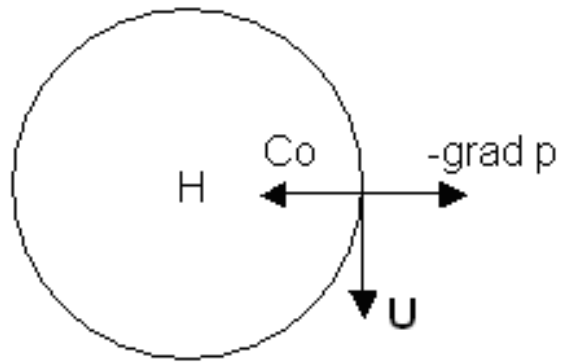


Figura 12: Circolazione anticiclonica

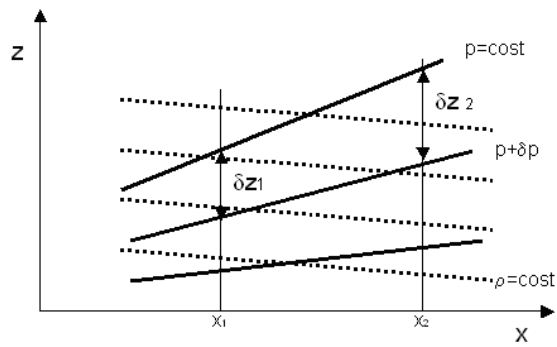


Figura 13: Schema raffigurante il fenomeno del vento termico

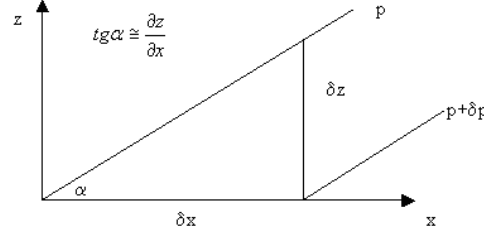


Figura 14: Coordinate isobariche

superfici isobariche sono inclinate verso l'alto con pendenza crescente con la quota, ne risulta che il gradiente orizzontale di pressione cresce con la quota e quindi il vento geostrofico cresce con la quota.

Derivando rispetto a  $z$  le componenti del vento geostrofico:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_g}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_g}{\partial z} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\quad (76)$$

e introducendo l'equazione idrostatica si ottiene la variazione delle componenti del vento geostrofico con la quota in funzione del gradiente orizzontale di densità:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_g}{\partial z} &= \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial v_g}{\partial z} &= -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y}\end{aligned}\quad (77)$$

Si noti che si è utilizzata l'approssimazione di Boussinesq, considerando le variazioni di densità rispetto allo stato base solo nel termine di gravità.

Introducendo le coordinate isobariche, cioè il sistema che utilizza come coordinata verticale la pressione si ha:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{z=const.} = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x=const.} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{p=const.}\quad (78)$$

il segno - tiene conto del fatto che  $p$  diminuisce con la quota (figura 14).

Utilizzando questa relazione e l'equazione idrostatica si ha:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{z=const.} = -g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{p=const.} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{p=const.}\quad (79)$$

dove si e' introdotto il geopotenziale  $\Phi$  definito dalla relazione

$$\partial\Phi = g\partial z \quad (80)$$

e quindi:

$$\Phi = \int_0^z g dz \quad (81)$$

analogamente si ottiene:

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{z=const.} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{p=const.} \quad (82)$$

Quindi il vento geostrofico può essere ottenuto in funzione del gradiente orizzontale del geopotenziale su superfici isobariche:

L'equazione idrostatica essendo:

$$\partial p = -\rho g \partial z = -\rho \partial \Phi \quad (83)$$

diventa:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{p} \quad (84)$$

Derivando logicamente rispetto a p e utilizzando l'equazione idrostatica si ha:

$$\begin{aligned} p \frac{\partial v_g}{\partial p} &= \frac{\partial v_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{p=const.} \\ p \frac{\partial u_g}{\partial p} &= \frac{\partial u_g}{\partial \ln p} = \frac{R}{f} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{p=const.} \end{aligned} \quad (85)$$

o, in forma vettoriale:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p T \quad (86)$$

Si definisce **vento termico** la differenza del vento geostrofico tra due livelli isobarici:

$$\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_g(\mathbf{p}_1) - \mathbf{V}_g(\mathbf{p}_0) = -\frac{R}{f} \int_{p_0}^{p_1} (\mathbf{k} \times \nabla_p T) d \ln p \quad (87)$$

Se  $\langle T \rangle$  e' la temperatura media nello strato compreso tra i due livelli isobarici, si ha:

$$\begin{aligned} v_T &= \frac{R}{f} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} \right)_{p=const.} \ln \frac{p_0}{p_1} \\ u_T &= -\frac{R}{f} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right)_{p=const.} \ln \frac{p_0}{p_1} \end{aligned} \quad (88)$$

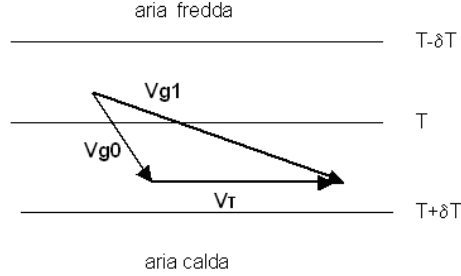


Figura 15: Avvezione fredda

Utilizzando l'equazione idrostatica si ottiene:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = \int_0^1 d\Phi = -R \int_{p_0}^{p_1} \frac{T}{p} dp = R \langle T \rangle \ln \frac{p_0}{p_1} \quad (89)$$

cioè lo spessore di geopotenziale è proporzionale alla temperatura media dello strato, linee a  $\Delta\Phi$  costante equivalgono a isoterme. Le componenti del vento termico possono essere riscritte in funzione dello spessore di geopotenziale:

$$\begin{aligned} v_T &= \frac{1}{f} \left( \frac{\partial \Delta\Phi}{\partial x} \right)_{p=const.} \\ u_T &= -\frac{1}{f} \left( \frac{\partial \Delta\Phi}{\partial y} \right)_{p=const.} \end{aligned} \quad (90)$$

In forma vettoriale si ha:

$$\mathbf{V}_T = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \Delta\Phi \quad (91)$$

dove il pedice  $p$  indica che il gradiente è calcolato su superfici isobariche. Da questa relazione si deduce che il vento termico è parallelo alle isoterme con l'aria calda sulla destra nell'emisfero nord. Si noti per inciso che *il vento termico non un vero e proprio vento* (per così dire non 'soffia') ma è unicamente la differenza del vento geostrofico tra due livelli isobarici. Esso è tuttavia un'utile quantità in meteorologia, infatti, come si può vedere dall'esempio che segue, può essere utile a valutare l'avvezione di temperatura, cioè il movimento di masse d'aria a diversa temperatura, dalla misura del vento geostrofico a due diverse quote.

Si consideri la situazione mostrata in figura 15: se si osserva una rotazione antioraria con la quota del vento geostrofico si ha *avvezione fredda*, cioè il



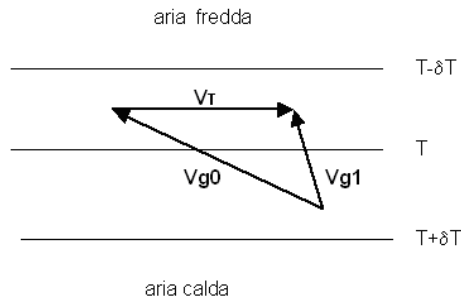


Figura 16: Avvezione calda

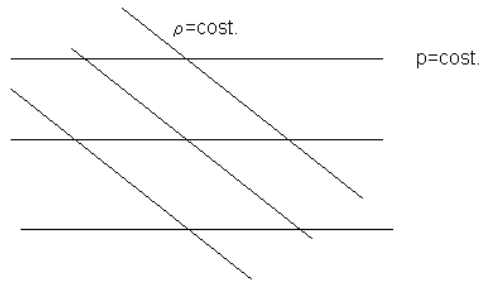


Figura 17: Atmosfera baroclina

vento geostrofico soffia da zone dove l'aria è più fredda verso zone dove l'aria è più calda. Nel caso in cui si osservi una rotazione in senso orario si ha *avvezione calda*. Viceversa si può stimare il vento geostrofico ad ogni quota, noto il suo valore ad un certo livello, dal campo di temperatura.

Il vento termico è un fenomeno tipicamente baroclinico, infatti si definisce fluido baroclinico un fluido in cui le superfici di ugual densità non sono parallele alle superfici di ugual pressione (figure 17):

In un'atmosfera di questo tipo si ha  $\nabla_p T \neq 0$  e quindi il vento geostrofico varia con la quota. In un fluido barotropico invece la densità dipende solo dalla pressione,  $\rho = \rho(p)$  (figure 18), le superfici di ugual densità sono parallele alle superfici isobariche.

In una atmosfera barotropica si ha  $\nabla_p T = 0$  e quindi  $\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial \ln p} = 0$ , il vento geostrofico non varia con la quota.

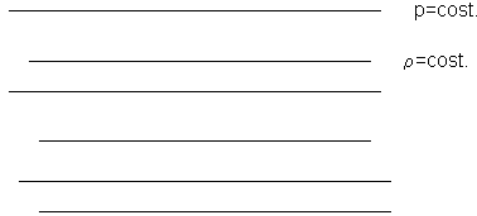


Figura 18: Atmosfera barotropica

## 9 TEOREMA DI TAYLOR-PROUDMAN

Consideriamo, in un fluido omogeneo, un flusso geostrofico:

$$Ro = \frac{U}{fL} < 1 \quad (92)$$

siano le forze viscosse trascurabili:

$$\nu \frac{U}{L^2} < fU \Rightarrow Ek \equiv \frac{\nu}{fL^2} < 1 \quad (93)$$

dove si è definito il numero di Ekman (Ek) come rapporto tra le forze viscosse e le forze di Coriolis. L'equazioni del moto sono quelle del moto geostrofico per l'orizzontale e l'equazione idrostatica per la direzione verticale:

$$\begin{aligned} fv &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ fu &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \quad (94)$$

, derivando la prima equazione rispetto ad y, la seconda rispetto ad x si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (95)$$

da cui, sommando membro a membro:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (96)$$

inoltre, per la condizione di incompressibilità ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), si ha:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (97)$$

derivando ora rispetto a  $z$  l'equazioni geostrofiche e introducendo l'equazione idrostatica, si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (98)$$

In conclusione, non si ha variazione del campo di velocità lungo la direzione verticale (direzione parallela all'asse di rotazione):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = 0 \quad (99)$$

Inoltre, se esiste una parete solida perpendicolare all'asse di rotazione, in corrispondenza di tale parete deve essere  $w=0$  (come ad esempio al suolo), per quanto visto in precedenza si ha  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  e  $w = 0$  in ogni punto lungo questa direzione.

Quindi il flusso e' interamente **bidimensionale** in piani perpendicolari all'asse di rotazione.

## 10 EQUAZIONI PER ACQUA SOTTILE

Consideriamo la situazione mostrata in figura, un strato di fluido omogeneo di spessore  $H$  e dimensione orizzontale  $L$  per cui sia:

- $H \ll L$  (modello per l'acqua sottile)

Per la condizione di incompressibilità ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) si ha  $\frac{U}{L} + \frac{W}{H} = 0$  e quindi  $\frac{U}{W} \simeq \frac{L}{H}$ , essendo  $H \ll L$  si ha anche  $W \ll U$ .

Sia  $\eta(x, y)$  la variazione di spessore del fluido rispetto ad  $H$  ( $\eta \ll H$ ), la pressione alla generica quota  $z$  può essere espressa in funzione di questa quantità:

$$p(z) = \rho g(H + \eta - z) \quad (100)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (101)$$

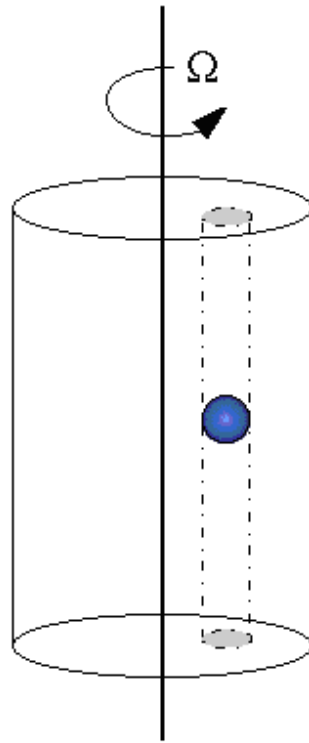


Figura 19: Colonna di Taylor

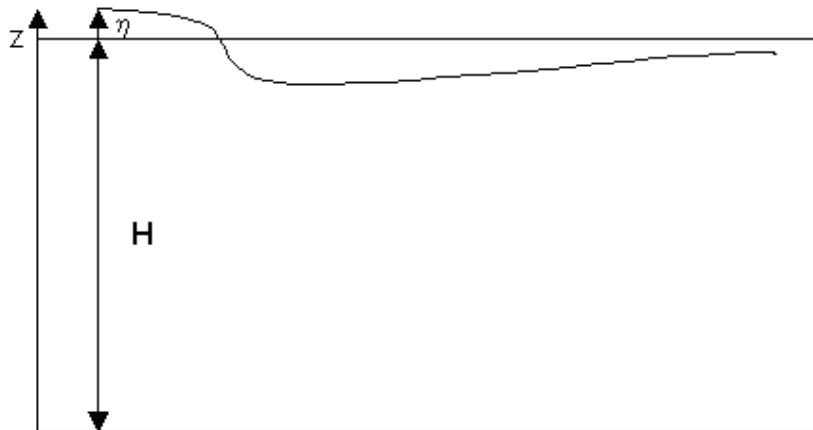


Figura 20: Modello per acqua sottile

I gradienti orizzontali di pressione sono quindi indipendenti dalla quota ( $\eta(x, y)$ ), perciò lo sono anche le componenti orizzontali della velocità e i loro gradienti orizzontali; dall'equazione di continuità risulta:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (102)$$

da cui risulta che la velocità verticale varia linearmente con  $z$ . Integrando l'equazione di continuità tra  $z=0$  e  $z=H+h$  si ottiene, essendo  $u$  e  $v$  indipendenti da  $z$ ,

$$(H + \eta) \frac{\partial u}{\partial x} + (H + \eta) \frac{\partial v}{\partial y} + w(\eta) - w(0) = 0 \quad (103)$$

dove  $w(0) = 0$  e  $w(\eta) = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y}$ ; sostituendo si ottiene:

$$(H + \eta) \frac{\partial u}{\partial x} + (H + \eta) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (104)$$

che si può riscrivere come:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(H + \eta) u] + \frac{\partial}{\partial y} [(H + \eta) v] = 0 \quad (105)$$

Questa equazione mostra che il livello del fluido è variato dal trasporto orizzontale. Essendo  $h \ll H$  (onde di piccola ampiezza) si possono trascurare i termini non lineari  $\left( \frac{\partial}{\partial x} [\eta u]; \frac{\partial}{\partial y} [\eta v] \right)$  in confronto a quelli lineari, ottenendo l'equazione linearizzata di continuità:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + H \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad (106)$$

Infine, utilizzando l'espressioni (101) per i gradienti orizzontali di pressione si possono scrivere l'equazioni prognostiche del moto orizzontale come segue:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (107)$$

Anche queste equazioni possono essere linearizzate trascurando i termini avvevivi con l'assunzione di piccola ampiezza (i gradienti orizzontali sono piccoli e la velocità verticale è trascurabile).

In conclusione otteniamo il set di equazioni linearizzate per acqua sottile (**Shallow water model**):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= 0\end{aligned}\tag{108}$$

Queste equazioni possono essere utilizzate, per esempio, per lo studio delle onde di gravità.

## 11 CONSERVAZIONE DELLA VORTICITÀ POTENZIALE

L'equazioni del moto per uno strato sottile (non linearizzate) sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) &= 0\end{aligned}\tag{109}$$

dove  $h = H + \eta$ . Derivando la prima equazione rispetto a  $y$  e la seconda rispetto a  $x$  e sottraendo membro a membro:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (\zeta + f_0) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \beta v = 0\tag{110}$$

in cui si è usata l'approssimazione di b-plane per la variazione del parametro di Coriolis con la latitudine:

$$f = f_0 + \beta y\tag{111}$$

con  $y$  diretta lungo i meridiani e si è introdotta la componente verticale  $\zeta$  della **vorticità relativa**  $\omega$ :

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}\tag{112}$$

e quindi

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\tag{113}$$

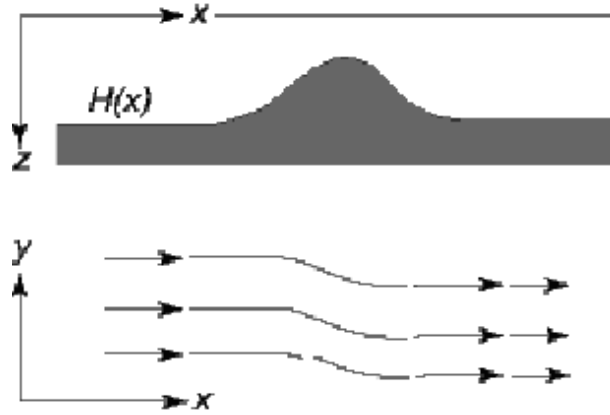


Figura 21: Effetto della conservazione della vorticità potenziale nel passaggio di un flusso sopra un ostacolo

La vorticità indica la curvatura del flusso, curvatura di tipo ciclonico è associato a vorticità positiva, curvatura di tipo anticiclonico è associato a vorticità negativa (nell'emisfero Nord, viceversa nell'emisfero Sud). La componente verticale  $\zeta$  indica la curvatura del flusso su un piano orizzontale.

Utilizzando l'equazione di continuità si ha:

$$\frac{d\zeta}{dt} - (\zeta + f_0) \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + \beta v = 0 \quad (114)$$

inoltre essendo

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = \beta v \quad (115)$$

si ottiene:

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} - \frac{(\zeta + f_0)}{h} \frac{dh}{dt} = 0 \quad (116)$$

oppure, essendo  $\beta y \ll f_0$  e quindi  $f \simeq f_0$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\zeta + f}{h} \right) = 0 \quad (117)$$

La quantità tra parentesi, chiamata **vorticità potenziale**:

$$P = \frac{\zeta + f}{h} \quad (118)$$

si conserva lungo il moto.

Questo costituisce l'importante **principio di conservazione della vorticità potenziale**. Si può dimostrare che questo principio è valido anche

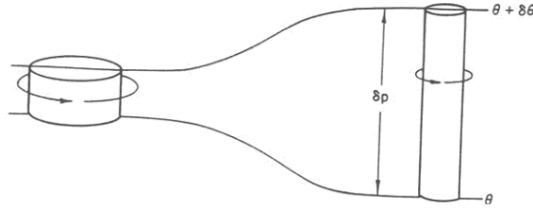


Figura 22: Conservazione della vorticità potenziale di Ertel

per fluidi non omogenei ma barotropici. Nello scavalcare un ostacolo lo spessore del fluido  $h$  diminuisce e quindi anche la vorticità relativa deve diminuire (restando  $f$  costante) affinché si conservi  $P$ . Questa diminuzione di  $\zeta$  genera una *curvatura anticiclonica (oraria)* del flusso orizzontale. Si noti che la curvatura del flusso si ha anche a quote superiori all'altezza dell'ostacolo e non dipende quindi dalla sua presenza. Superato l'ostacolo lo spessore  $h$  torna al valore iniziale e quindi anche  $\zeta$  ritorna al valore iniziale acquisendo una *curvatura ciclonica (antioraria)*.

Nel caso di fluidi baroclini è possibile definire la *vorticità potenziale di Ertel* come segue:

$$P = (\zeta_\theta + f) \left( -g \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \quad (119)$$

dove  $\zeta_\theta$  è la componente verticale della vorticità relativa calcolata su superfici isoentropiche ( $\theta = \text{cost.}$ ).

Si può dimostrare che per flussi adiabatici e non viscosi questa quantità si **conserva lungo il moto**.

La vorticità potenziale, in generale, rappresenta sempre il rapporto tra la vorticità assoluta, somma di quella relativa e quella planetaria, e l'effettivo spessore dei vortici.

In questo caso l'effettivo spessore è la distanza tra superfici di temperatura potenziale misurate in unità di pressione. Un interessante esempio è costituito dal flusso su un rilievo orografico.

Si noti il diverso comportamento del flusso da ovest rispetto a quello da est, a causa del termine di vorticità planetaria  $f$  che varia quando il flusso si dirige a causa della curvatura, verso nord o verso sud. Infatti, per esempio, una curvatura di tipo anticiclonico in un flusso da ovest lo devia verso sud con conseguente diminuzione di  $f$ , mentre in un flusso da est lo devia verso nord con conseguente aumento di  $f$ .



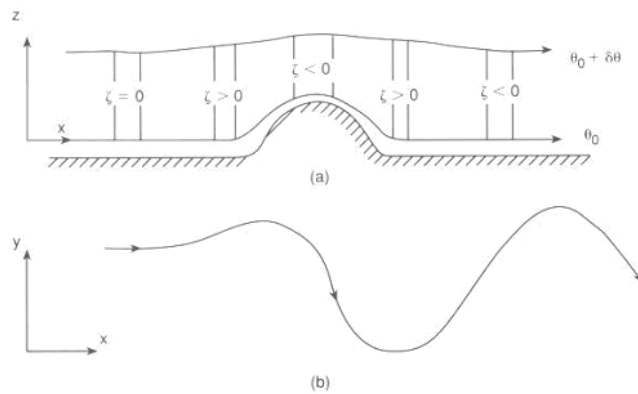


Figura 23: Effetto della conservazione della vorticit  potenziale in un flusso da ovest sopra un rilievo montuoso (da Holton, 1992)

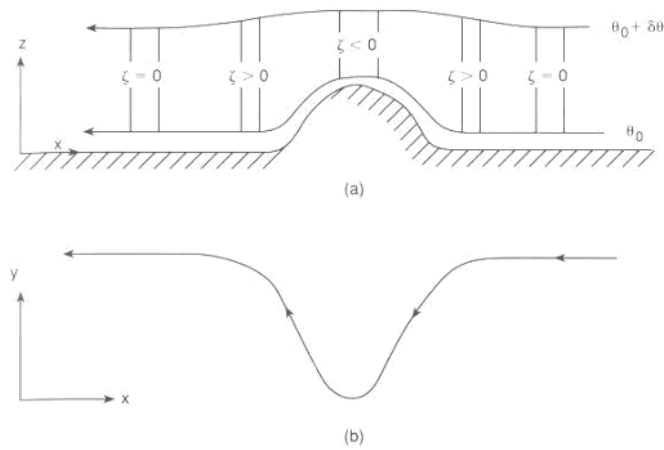


Figura 24: Effetto della conservazione della vorticit  potenziale in un flusso da est sopra un rilievo montuoso (da Holton, 1992)