METEOROLOGIA
(Lezioni per il corso di studi in Scienze Ambientali)

Prof. Enrico Ferrero

A.A 2008/2009

SOMMARIO

Lista dei principali simboli usati

V volume

t coordinata temporale

ρ densità

ρ’ inverso del volume specifico

S superficie

$\vec{v}$ o $\vec{u}$ vettore velocità (anche maiuscolo)

x, y, z coordinate spaziali (z in genere indica la direzione verticale)

$\mathbf{x_1, x_2, x_3}$ coordinate spaziali

u, v, w, componenti vettore velocità (w in genere velocità verticale)

$\mathbf{u_1, u_2, u_3}$ componenti vettore velocità

p pressione

n numero di moli

R costante dei gas perfetti

$\mathbf{C_p}$ calore specifico a pressione costante

$\mathbf{C_v}$ calore specifico a volume costante

m massa

μ_0 massa di una mole

T temperatura assoluta

e pressione parziale del vapor d’acqua

$\mathbf{v_v}$ volume specifico

T_v temperatura virtuale

q umidità specifica

U energia interna

Q quantità di calore

Θ o θ temperatura potenziale o potenziale virtuale

T tensore degli stress (sforzi)

G forze di volume

μ viscosità molecolare dinamica

ν viscosità molecolare cinematica

$\vec{\Omega}$ velocità di rotazione terrestre (vorticità planetaria)

g accelerazione di gravità

φ latitudine

$f = 2\Omega \sin\varphi$ parametro di Coriolis

$\mathbf{U_g}$ velocità del vento geostrofico

$\overline{u'_i u'_j}$ componente del tensore degli stress turbolenti di Reynolds

ν_V, ν_H viscosità turbolenta verticale e orizzontale

ν_θ conduttività termica

$\overline{u'_\alpha \vartheta'}$ flussi turbolenti

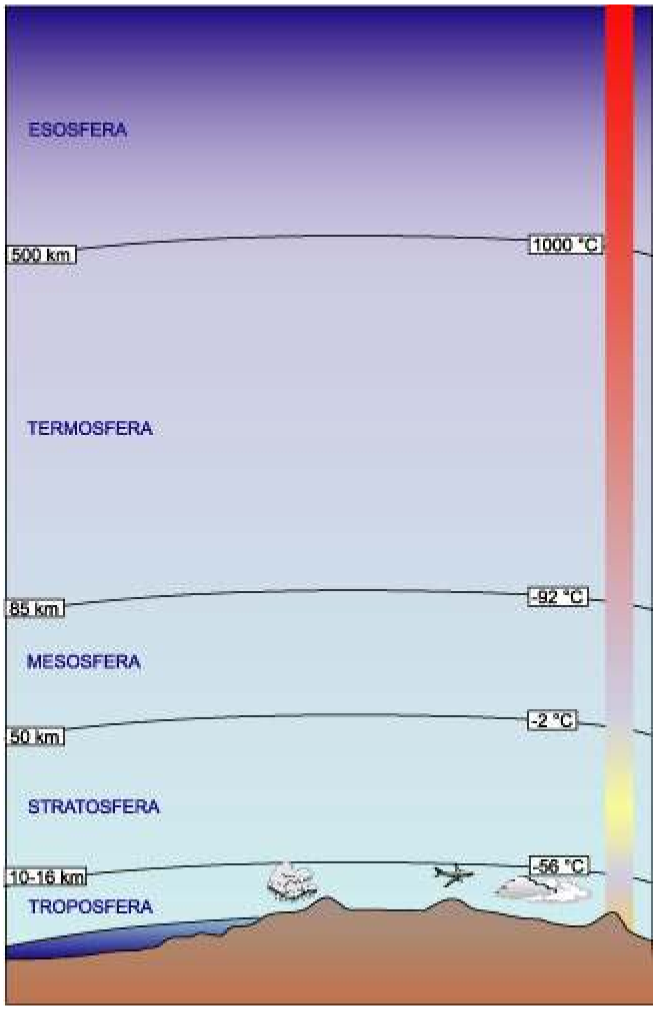
L lunghezza di scala orizzontale

H lunghezza di scala verticale

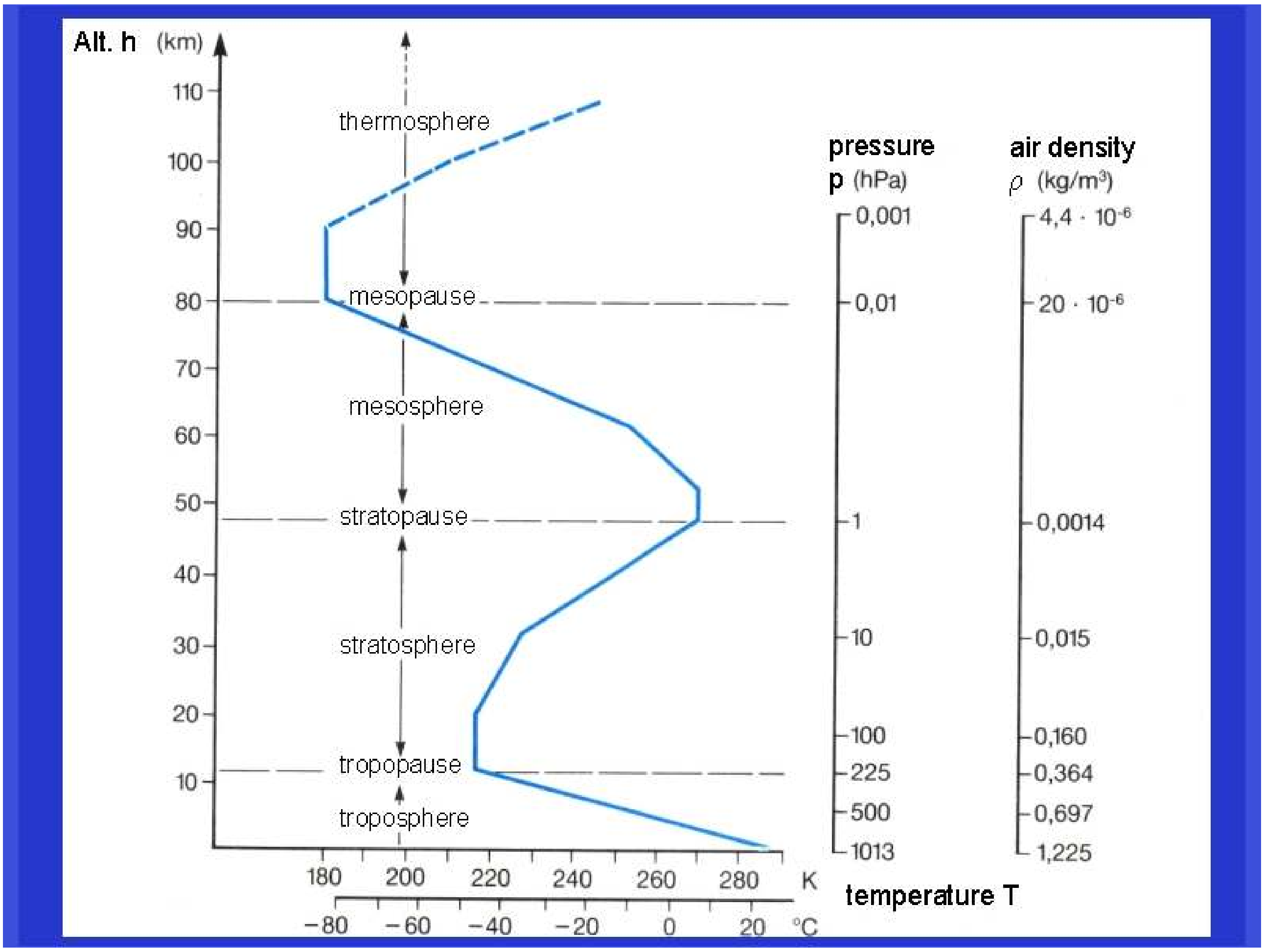
$\vec{\omega}$ vorticità relativa

ζ componente verticale della vorticità relativa

0-GENERALITA' SULLA STRUTTURA VERTICALE DELL'ATMOSFERA



Suddivisione dei vari strati atmosferici



Profilo verticale di temperatura, pressione e densità

L'aria secca e' composta da una mistura di diversi gas:

Azoto (N_2)	78,084%
Ossigeno (O_2)	20,946%
Argon (Ar)	0,943%
Biossido di Carbonio (CO_2)	360 ppm
Neon (Ne)	18,182 ppm
Elio (He)	5,24 ppm
Metano (CH_4)	1,77 ppm
Cripto (Kr)	1,14 ppm
Idrogeno (H_2)	0,5 ppm
Xeno (Xe)	0,09 ppm

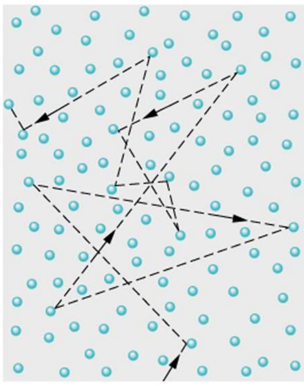
Molte altre sostanze "inquinanti" sono disperse nell'atmosfera, alcune delle quali non reattive e altre reattive, come p.e. biossido di zolfo (SO_2) e ossidi di azoto (NO_X), particolarmente reattivi in associazione con l'acqua.

Il vapor d'acqua è un costituente variabile (tra 0.5 e 4%) la cui concentrazione dipende dalla temperatura e dalle vicissitudini dell'atmosfera:

- passaggi di stato (può diventare solido o liquido)
- precipitazione
- trasferimenti dall'atmosfera alla terra e viceversa.

Definizione di **gas perfetto:**

Un gas perfetto è un gas ideale le cui molecole hanno volume trascurabile e non interagiscono tra di loro se non con urti elastici.



Vale la semplice **'equazione di stato':**

$$PV=nRT,$$

che lega le variabili di stato:

- pressione P
- temperatura T (assoluta si misura in Kelvin, K)
- volume V

R e' la costante dei gas perfetti che vale 8.31 J K^{-1} $moli^{-1}$

n è il numero di moli (1 mole contiene lo stesso numero di molecole per ogni gas: 6,02 10^{23} detto numero di Avogadro) n=m/M dove m è la massa del gas e M la massa di una mole, caratteristica di ogni gas.

- Per l'aria secca M_a=28,965 g/mole
- Per il vapore d'acqua M_v=18 g/mole

L'aria per semplicità viene trattata come un gas perfetto. Quando non vi sono cambiamenti di stato anche il vapor d'acqua può essere trattato come una gas perfetto. Maggiori problemi si hanno quando il vapor d'acqua è vicino alla saturazione o quando le molecole impattano su una superficie fredda o che è contaminata con un sale idrofilo, infatti, in questo caso le molecole di vapor d'acqua rimangono attaccate a tale superficie.

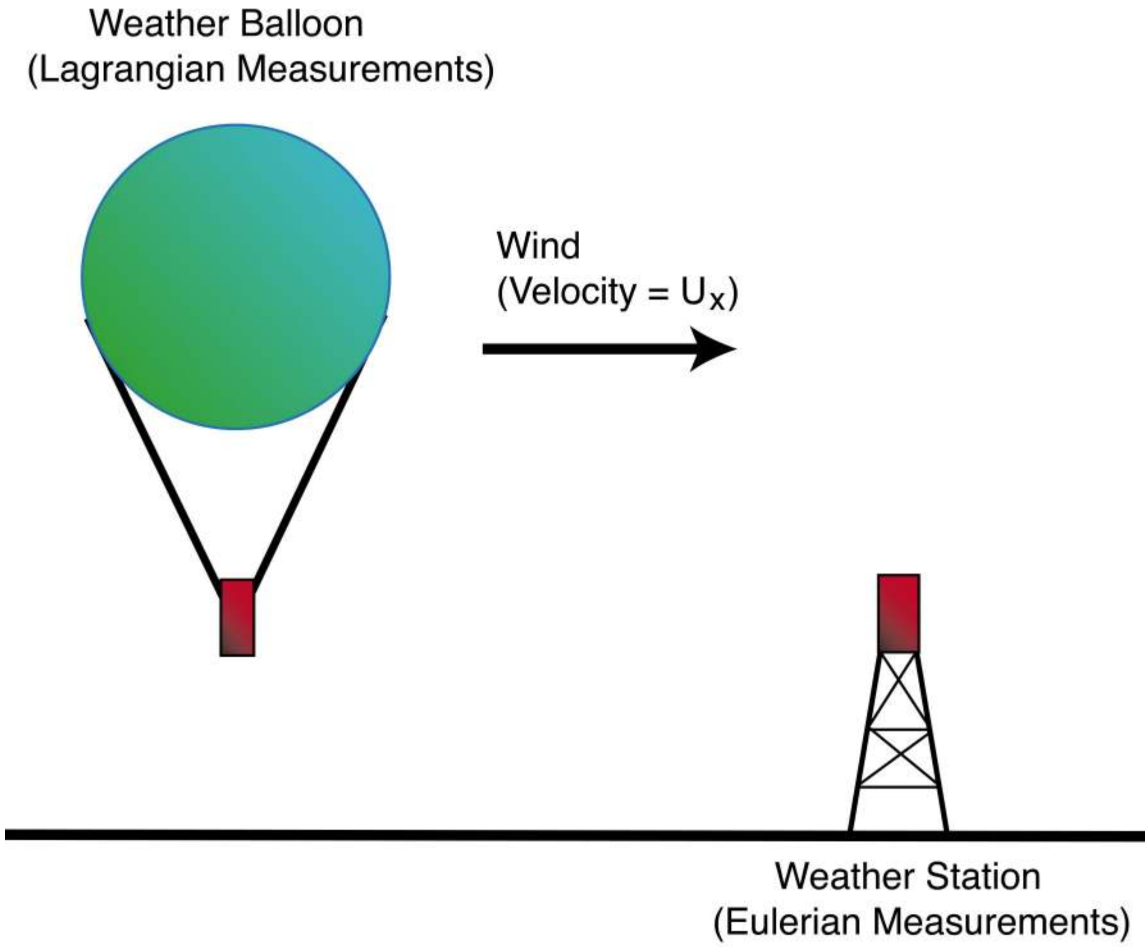
1-I MOTI ATMOSFERICI

I moti atmosferici sono descritti di un insieme di **3 equazioni differenziali**:

- **Conservazione della massa (equazione di continuità)**
- **Conservazione della quantità di moto (equazioni di Navier-Stokes)**
- **Conservazione dell'energia (primo principio della termodinamica)**

Inoltre, per chiudere il sistema è necessaria una quarta equazione, **l'equazione di stato dei gas ideali**.

Nello studio dei fenomeni atmosferici, e più in generale in fluidodinamica, si distinguono due modi per descrivere le variabili fisiche: Euleriano e Lagrangiano.
Nel sistema di riferimento Euleriano le variabili vengono osservate da un punto fisso di coordinate x,y,z e sono funzione di queste coordinate, oltre che naturalmente del tempo, per esempio: $u(x, y, z, t)$. Nel sistema di riferimento Lagrangiano si segue il moto delle particelle di fluido. Le variabili dipendono quindi dalla posizione iniziale (al tempo $t=0$) e dal tempo $u(x_0, y_0, z_0, t)$.


Weather Balloon
(Lagrangian Measurements)
Wind
(Velocity = U_x)
Weather Station
(Eulerian Measurements)

2-L'EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Questa equazione esprime il principio di conservazione della massa o, in altre parole, il bilancio di massa in un volume V. La variazione di massa è dovuta solo al flusso attraverso la superficie Σ che contorna il volume V. La variazione di massa si considera usualmente per unità di volume e quindi corrisponde ad una variazione di densità ρ.

La conservazione della massa implica quindi che il flusso netto (differenza tra flusso entrante e flusso uscente) di massa (per unità di volume) sia uguale alla variazione di densità. Da questa condizioni si ricava **l'equazione di continuità**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3}=0$$

Si dicono **fluidi incomprimibili** quei fluidi per cui la variazione di densità è nulla. In questo caso il flusso netto di massa per unità di volume deve essere nullo:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=\nabla \cdot \vec{u}=0$$

L'atmosfera si considera generalmente un fluido incomprimibile.

3-L’EQUAZIONE DI STATO

Per un gas lontano dal punto critico vale, con buona approssimazione l’equazione di stato

$$pV = nR_uT$$

dove R_u è la costante universale dei gas (8.314 J mol^{-1} K^{-1}), n il numero di moli, $n=m/\mu_0$: massa diviso massa di un mole (peso molecolare).

L’equazione può essere riscritta in altra forma ponendo $R=R_u/\mu_0$ =287 m^2 s^{-2} K^{-1}, per aria secca e condizioni standard.

$$p = \rho RT$$

dove ρ è la densità

Se l’atmosfera è umida bisogna considerare il vapore d’acqua. Il contenuto di vapore d’acqua può essere caratterizzato dall’umidità specifica:

$$q = \frac{m_v}{m} = \frac{\rho'_v}{\rho}$$

cioè il rapporto tra la massa del vapor d’acqua m_v e la massa dell’aria umida $m=m_v+m_d$ dove m_d è la massa dell’aria secca. Si è inoltre definito $\rho'_v = \frac{1}{v_v} = \frac{m_v}{V}$, dove v_v è il volume specifico, per cui $\rho=\rho'_v+\rho'_d$.

Si ricordi che il vapore è più leggero dell’aria umida che a sua volta è molto più leggera dell’aria secca $\rho_v < \rho < \rho_d$.

La pressione atmosferica è la somma delle pressioni parziali dell’aria secca p_d e del vapore d’acqua *e* (legge di Dalton).

Supponendo che entrambi siano gas ideali si ottiene

$$p = p_d + e = \rho'_d RT + \rho'_v R_v T =$$

$$= \rho RT \left(\frac{\rho'_d}{\rho} + \frac{1.61\,\rho'_v}{\rho} \right) = \rho RT \,(1 + 0.61\,q)$$

essendo $\frac{R_v}{R} = \frac{28.96}{18} = 1.61$ (rapporto tra i pesi molecolari):

- Per l'aria secca M_a=28,96 g/mole
- Per il vapore d'acqua M_v=18 g/mole

oppure

$$p = \rho R T_v$$

dove,

$$T_v = T(1+0.61q)$$

è la *temperatura virtuale*, ovvero la temperatura che deve avere una particella d'aria secca per avere la stessa densità di una particella di aria con umidità specifica q a parità di pressione. Inoltre R_v=1.61R.

Nel caso in cui sia presente sia vapore sia liquido si ha,

$$\rho = \rho'_v + \rho'_L + \rho'_d$$

e

$$T_v = T(1+0.61q-q_L),$$

essendo $q_L = \rho'_L/\rho$ per il liquido.

4-IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Le variazioni di energia interna sono legate agli scambi di calore e di lavoro dalla legge (primo principio)

$$dU = \delta Q - pdV$$

Per un processo adiabatico dQ=0 vale l'equazione di Poisson

$$\frac{T_{v1}}{T_{v2}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

dove c_p=1007 m^2 s^{-2} K^{-1} è il calore specifico a pressione costante (diviso μ_0).

La temperatura potenziale virtuale Θ è definita, dall'equazione di Poisson, come la temperatura virtuale raggiunta da una particella portata, con un processo adiabatico, dalla pressione a livello p fino al livello 1000 mbar

$$\Theta = T_v \left(\frac{1000}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

Il primo principio può essere riscritto come segue

$$dU = \delta Q - d(pV) + Vdp = \delta Q - RdT + Vdp$$

utilizzando la relazione di Mayer c_p-c_v=R e la relazione dU=c_vdT, considerando per semplicità una mole, si ottiene:

$$c_p dT = \delta Q + Vdp$$

Si tenga conto che in questa espressione c_p ed R sono divisi per μ_0 e quindi anche gli altri termini vanno considerati per unità di massa, in particolare si ha , avendo considerato una mole, $V/\mu_0 = 1/\rho$. Inoltre, avendo ottenuto questa espressione per unità di massa, essa resta valida in generale per n moli.

Derivando rispetto al tempo la precedente espressione del primo principio e considerando la temperatura virtuale si ha

$$\frac{dT_v}{dt} = \frac{1}{\rho c_p}\frac{dp}{dt} + S_\vartheta$$

dove si è posto $S_\vartheta = \frac{1}{c_p}\frac{\delta Q}{dt}$ che rappresenta sorgenti e pozzi di calore.

Infine con l'aiuto dell'equazione per la temperatura potenziale Θ[1] si ha:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta}{T_v} S_\Theta \quad .$$

[1] Prendendo il logaritmo dell'espressione che definisce la temperatura potenziale e differenziando otteniamo: $\frac{d\Theta}{\Theta} = \frac{dT_v}{T_v} - \frac{R}{c_p}\frac{dp}{p}$

5-EQUAZIONI DEL MOTO (di Navier-Stokes)

La variazione della quantità di moto in un volume V è data dalle forze sulla superficie di tale volume, più le forze agenti sull'intero volume.

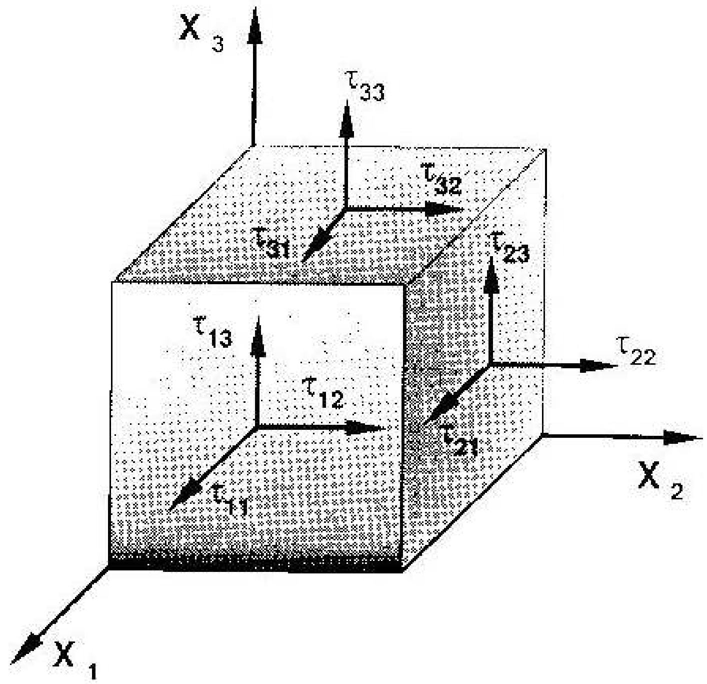
T forze di superficie

$\rho\, G$ forze di volume

T rappresenta il **tensore degli stress** definito dalla seguente matrice:

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11}\tau_{12}\tau_{13} \\ \tau_{21}\tau_{22}\tau_{23} \\ \tau_{31}\tau_{32}\tau_{33} \end{pmatrix}$$

Il significato di T è mostrato in figura in cui sono rappresentate le forze cha agiscono su un volume di fluido di forma cubica. Si hanno componenti normali ($\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$) e componenti parallele ($\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{21}, \tau_{32}, \tau_{31}$).



Le prime corrispondono alle forze di pressione, mentre le seconde rappresentano le forze di attrito viscoso; se il fluido è senza attriti, non viscoso, le componenti tangenziali sono nulle.

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p$$

e quindi

$$\frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}}{3} = -p$$

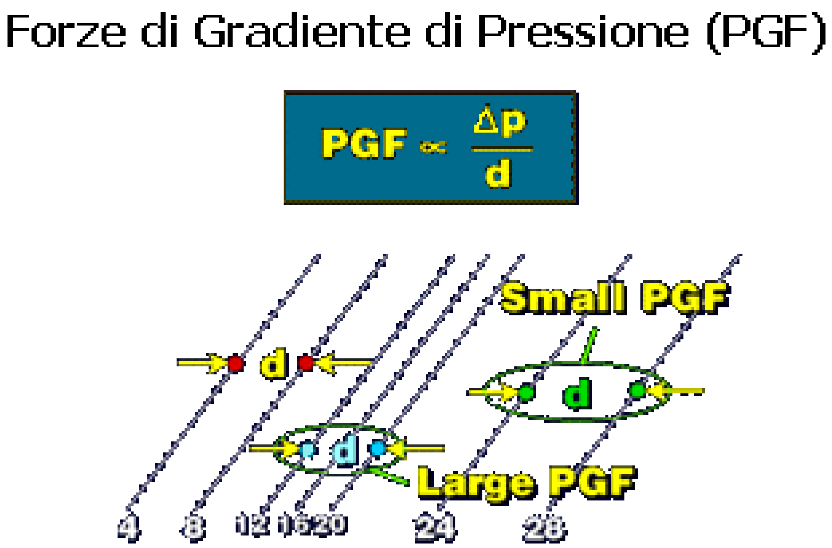
La pressione è invariante per rotazioni (isotropia). Inoltre valgono le seguenti relazioni di simmetria:

$$\tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{32} = \tau_{23}, \tau_{13} = \tau_{31}$$

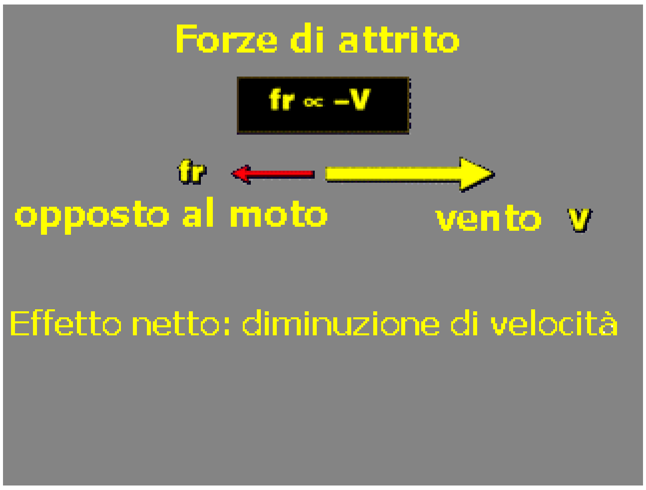
Utilizzando il tensore degli stress , se il fluido è incompressibile, si ricava la seguente equazione che fornisce la variazione di velocità in funzione del tempo (equazione del moto atmosferico di Navier-Stokes), che in una dimensione si scrive:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + F_r + G$$

dove il primo termine a destra dell'uguale rappresenta le **forze di gradiente di pressione**:

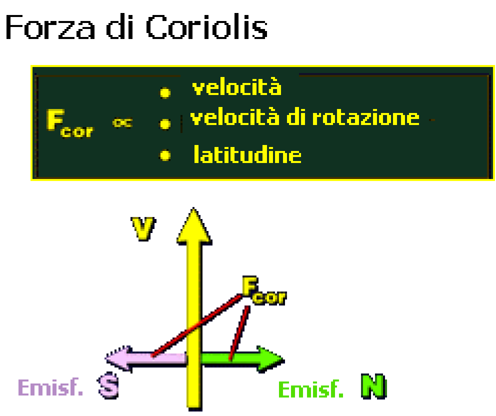


$\mathbf{F_r}$ rappresenta le forze di attrito viscoso:



G rappresenta la forza di gravità.

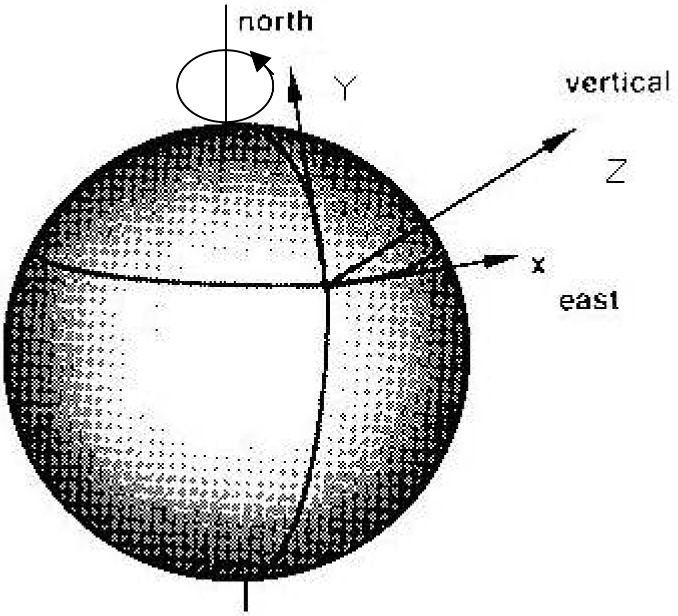
Se il fluido si trova in un sistema di riferimento **rotante** (non inerziale) come la terra:



bisogna trasformare l'equazione precedente per tener conto degli effetti di rotazione. Compaiono così nuovi termini nell'equazione del moto: la forza centrifuga che, di norma, viene inglobato nel termine di gravità dando origine alla gravità effettiva **g** e i termini che esprimono la **forza di Coriolis**.

Le equazioni del moto si scrivono per componenti (x, y, z), considerando il sistema di riferimento della terra:

- asse x diretto verso EST
- asse y diretto verso NORD
- asse z perpendicolare al piano tangente



e indicando con φ la latitudine, si ha:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + F_{rx} + 2\Omega \sin\varphi v - 2\Omega \cos\varphi w$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} + F_{ry} - 2\Omega \sin\varphi u$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} + F_{rz} - g + 2\Omega \cos\varphi u$$

dove Ω è la velocità di rotazione della terra.

6- SEMPLIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI BASE

Ogni variabile termodinamica viene scomposta in due parti: uno stato base di riferimento (sinottico) ed una perturbazione:

$$p = p_0 + p''$$

$$\rho = \rho_0 + \rho''$$

$$T = T_0 + T''$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta''$$

dove con il pedice ‘0’ si è indicato lo stato base e con l’apice (“) le perturbazioni. Accanto alle usuali variabili termodinamiche, pressione (p), densità (ρ) e temperatura assoluta (T), è stata introdotta la temperatura potenziale (ϑ). Le variabili di riferimento soddisfano alle equazioni del vento geostrofico per le direzioni orizzontali e all’equazione idrostatica per la direzione verticale (si veda il prossimo paragrafo). Inoltre vale una equazione di stato per lo stato base.

Trascurando le fluttuazioni di densità in tutti i termini tranne che in quello di gravità (**approssimazione di Boussinesq**), si ottengono le equazioni del moto atmosferico (e oceanico).

$$\frac{du}{dt} = f\left(v - V_g\right) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p''}{\partial x} + F_{rx}$$

$$\frac{dv}{dt} = -f\left(u - U_g\right) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p''}{\partial y} + F_{ry}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\vartheta''}{\vartheta_0} g - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p''}{\partial z} + F_{rz}$$

Si noti che l'approssimazione di Boussinesq è valida per flussi atmosferici con scala verticale delle lunghezze inferiore a 1km. Da essa deriva l'incompressibilità del fluido e la soppressione delle onde acustiche.

Nello scrivere i termini di Coriolis si possono trascurare i termini $2\Omega\cos\varphi w$ e $-2\Omega\cos\varphi u$.

E' generalmente accettato che i flussi atmosferici e oceanici siano descritti da queste equazioni.
Non si conoscono soluzioni analitiche, ma possono essere risolte numericamente. La complessità e' introdotta dai termini non lineari (prodotti delle componenti delle velocità per le loro derivate), che determinano il comportamento caotico, la dipendenza dalle condizioni iniziali e la non predicibilità.

Un grosso problema nella soluzione di queste equazioni e' dato dal grande numero di scale spaziali e temporali che e' necessario considerare.
Questo problema può essere risolto con l'ipotesi di Reynolds: le variabili possono essere scomposte in un termine medio più una fluttuazione, il primo termine corrispondente alla grande scala ed il secondo alla piccola scala:

$$u_i = U_i + u_i'$$

$$p = P + p'$$

$$\vartheta = \Theta + \vartheta'$$

le medie possono essere spaziali, temporali o d'insieme.
Sostituendo e mediando l'equazioni si ottengono delle nuove equazione, per i valori medi, analoghe alle equazioni di Navier-Stokes ma nelle quali compaiono dei termini in più, delle nuove incognite date dai valori medi dei prodotti delle fluttuazioni (cross-correlazioni) detti "Reynolds stress":

$$\overline{u'v'},\ \overline{u'w'},\ \overline{v'w'},\ \overline{u'^2},\ \overline{v'^2},\ \overline{w'^2}$$

dove la barra indica l'operazione di media.
Questi termini costituiscono un tensore simmetrico detto "tensore degli stress di Reynolds" e rappresentano la parte turbolenta del moto.
Il problema e' come esprimere questi termini in funzione delle quantità medie in modo da chiudere le equazioni, per questo motivo va sotto il nome di "chiusura della turbolenza".
Una semplice soluzione si ottiene immaginando che il moto turbolento a piccola scala agisca sul moto a grande scala nello stesso modo in cui il moto molecolare influenza il flusso macroscopico,

introducendo il concetto di “viscosità turbolenta” o “eddy viscosity” il tensore degli stress si può esprimere in funzione dei gradiente delle quantità medie, come segue:

$$\overline{u'^2} = -\nu_H \frac{dU}{dx}, \qquad \overline{v'^2} = -\nu_H \frac{dV}{dy},$$

$$\overline{w^2} = -\nu_V \frac{dW}{dz}$$

$$\overline{u'v'} = -\nu_H \left(\frac{dU}{dy} + \frac{dV}{dx} \right),$$

$$\overline{u'w'} = -\nu_V \frac{dU}{dz} - \nu_H \frac{dW}{dx}, \qquad \overline{v'w'} = -\nu_V \frac{dV}{dz} - \nu_H \frac{dW}{dy}$$

dove si è introdotta la condizione di anisotropia distinguendo tra viscosità turbolenta orizzontale ν_H e verticale ν_V.

In atmosfera:

$\nu_V \approx 10 \ m^2 s^{-1}$

$\nu_H \approx 10^5 \ m^2 s^{-1}$

nell’oceano:

$\nu_V \approx 0.01 \ m^2 s^{-1}$

$\nu_H \approx 10^2 \ m^2 s^{-1}$

Valori molecolari:

$\nu = 1.5 \ 10^{-5} \ m^2 s^{-1}$ per l’aria

$\nu = 10^{-6} \ m^2 s^{-1}$ per l’acqua.

Lo stesso procedimento può essere applicato all’equazione per la temperatura potenziale, che riscriviamo introducendo il termine di *conduttività termica* ν_θ e introducendo l’ipotesi di Reynolds e mediando l'equazione si ottiene una nuova equazione dove compaiono i *flussi turbolenti* di calore:

$$\overline{u'\vartheta'}\ ,\ \overline{v'\vartheta'}\ ,\ \overline{w'\vartheta'}\ .$$

Analoghi procedimenti di media si possono applicare alle altre equazioni differenziali che descrivono i moti atmosferici

7- IL FLUSSO GEOSTROFICO

Consideriamo la cosiddetta **scala sinottica**, definita dalle seguenti grandezze di scala per le variabili che caratterizzano il moto atmosferico:

$U \approx 10\ m\ s^{-1}$	scala delle velocità orizzontali
$W \approx 1\ cm\ s^{-1}$	scala delle velocità verticali
$L \approx 10^6\ m$	lunghezza di scala orizzontale
$H \approx 10^4\ m$	lunghezza di scala verticale
$\delta P/\rho \approx 10^3\ m^2 s^{-2}$	scala delle fluttuazioni orizzontali di pressione
$L/U \approx 10^5\ s$	scala dei tempi

Utilizzando questi valori di scala possiamo valutare gli ordini di grandezza e quindi la relativa importanza dei vari termini delle equazioni del moto.

Per le equazioni orizzontali si ha:

Eq. -x	$\frac{du}{dt}$	$-2\Omega \sin\varphi v$	$2\Omega\cos\varphi w$	$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$	F_{rx}
Eq. -y	$\frac{dv}{dt}$	$2\Omega\sin\varphi u$		$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}$	F_{ry}
Scale	$\frac{U^2}{L}$	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$\nu \frac{U}{H^2}$
ms^{-2}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-12}

Dove $f_0 = 2\Omega \sin\varphi_0 \approx 10^{-4} s^{-1}$ per le medie latitudini è il parametro di Coriolis e $\nu \approx 10^{-5} m^2 s^{-1}$ viscosità cinematica molecolare.

Tenuto conto degli ordini di grandezza dei vari termini possiamo semplificare l'equazioni del moto orizzontali mantenendo solo i termini dell'ordine di 10^{-3} si ottengono così le componenti del moto **geostrofico** :

$$u = -\frac{1}{f\rho}\frac{dp}{dy} \qquad\qquad v = \frac{1}{f\rho}\frac{dp}{dx}$$

Dove $f = 2\Omega \sin\varphi$ è il *parametro di Coriolis*.

Il primo termine trascurato, perché di un ordine di grandezza inferiore e' la derivata temporale delle componenti della velocità, quindi queste equazioni sono valide se il rapporto tra questo termine e quelli che le compongono e' molto minore di 1. In altre parole l'approssimazione geostrofica e' valida se il **numero di Rossby** definito come rapporto tra i termini inerziali (derivate temporali) e quelli dovuti alla rotazione:

$$Ro = \frac{U^2 / L}{fU} = \frac{U}{fL}$$

e' molto minore di 1 (Ro<<1). Si noti che Ro e' una quantità adimensionale e quindi indipendente dal sistema di misura utilizzato.

Quando questa condizione non e' più valida, si debbono includere anche i termini inerziali, cioè utilizzare le equazioni **quasi-geostrofiche**.

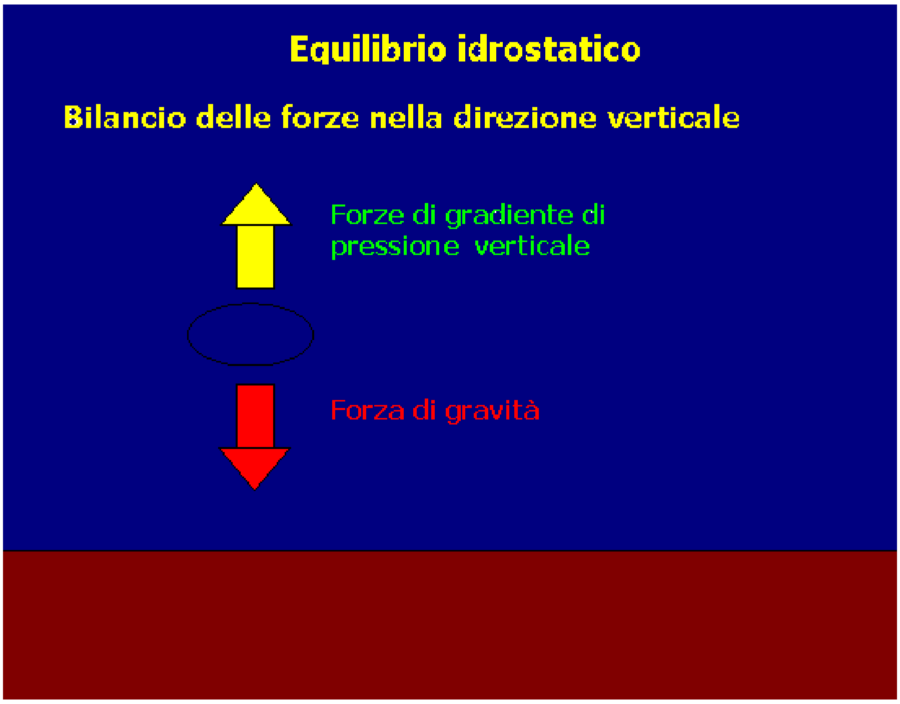
Per l'equazione verticale si ha:

Eq. -z	$\frac{dw}{dt}$	$-2\Omega\cos\varphi u$	$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}$	-g	F_r
Scale	$\frac{UW}{L}$	$f_0 U$	$\frac{P_0}{\rho H}$	g	$\nu\frac{W}{H^2}$
ms^{-2}	10^{-7}	10^{-3}	10	10	10^{-15}

con $P_0=10^3$ hPa e $\rho=1$ Kg m^{-3}.

I termini più importanti sono quelli di gradiente di pressione e di gravità, considerando solo questi due termini si ottiene l'equazione idrostatica:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = -g$$



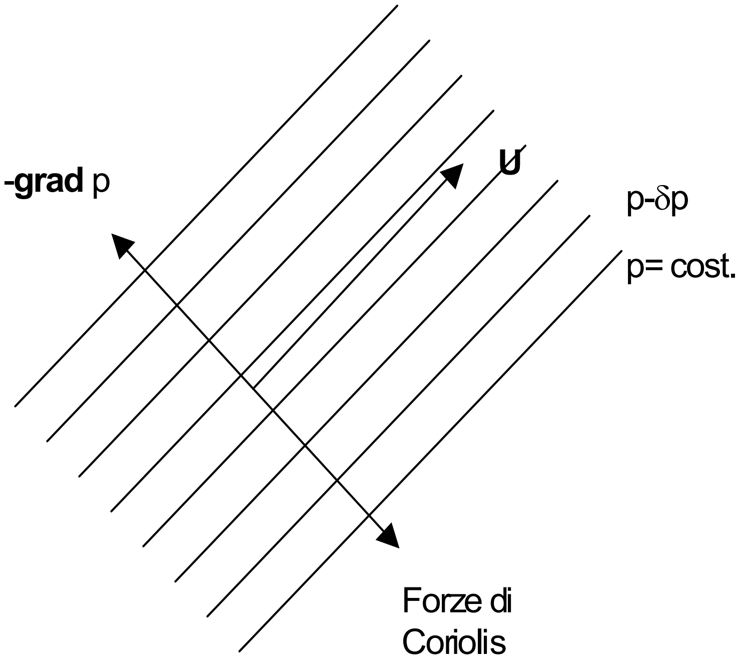
Questa equazione può essere considerata una buona approssimazione dell'equazione del moto verticale, in un gran numero di casi ed di scale di moto, infatti i termini che la compongono sono di diversi ordini di grandezza maggiori degli altri. Tuttavia equazioni più complesse devono essere considerate in casi in cui non sia possibile trascurare l'accelerazione verticale (equazioni non-idrostatiche).

Quindi per le scale qui considerate (scala sinottica) o, più in generale, quando le scale del moto siano tale da dare un numero di Rossby minore di 1, la soluzione delle equazioni del moto e' data dal flusso geostrofico in orizzontale e dall'eqauzione idrostatica per la componente verticale.

Per esempio con U=10 m s^{-1} f=10^{-4} s^{-1} ed L=1000 Km si ha:

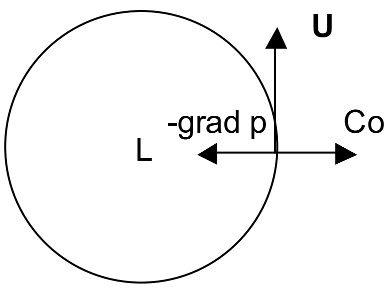
Ro=0.1

Le equazioni geostrofiche rappresentano un moto lungo le isobare (curve lungo le quali la pressione e' costante) come rappresentato in figura per l'emisfero nord:

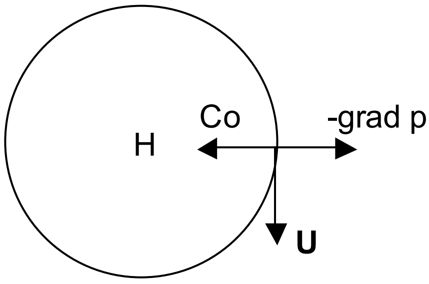


Si possono verificare due diverse situazioni:

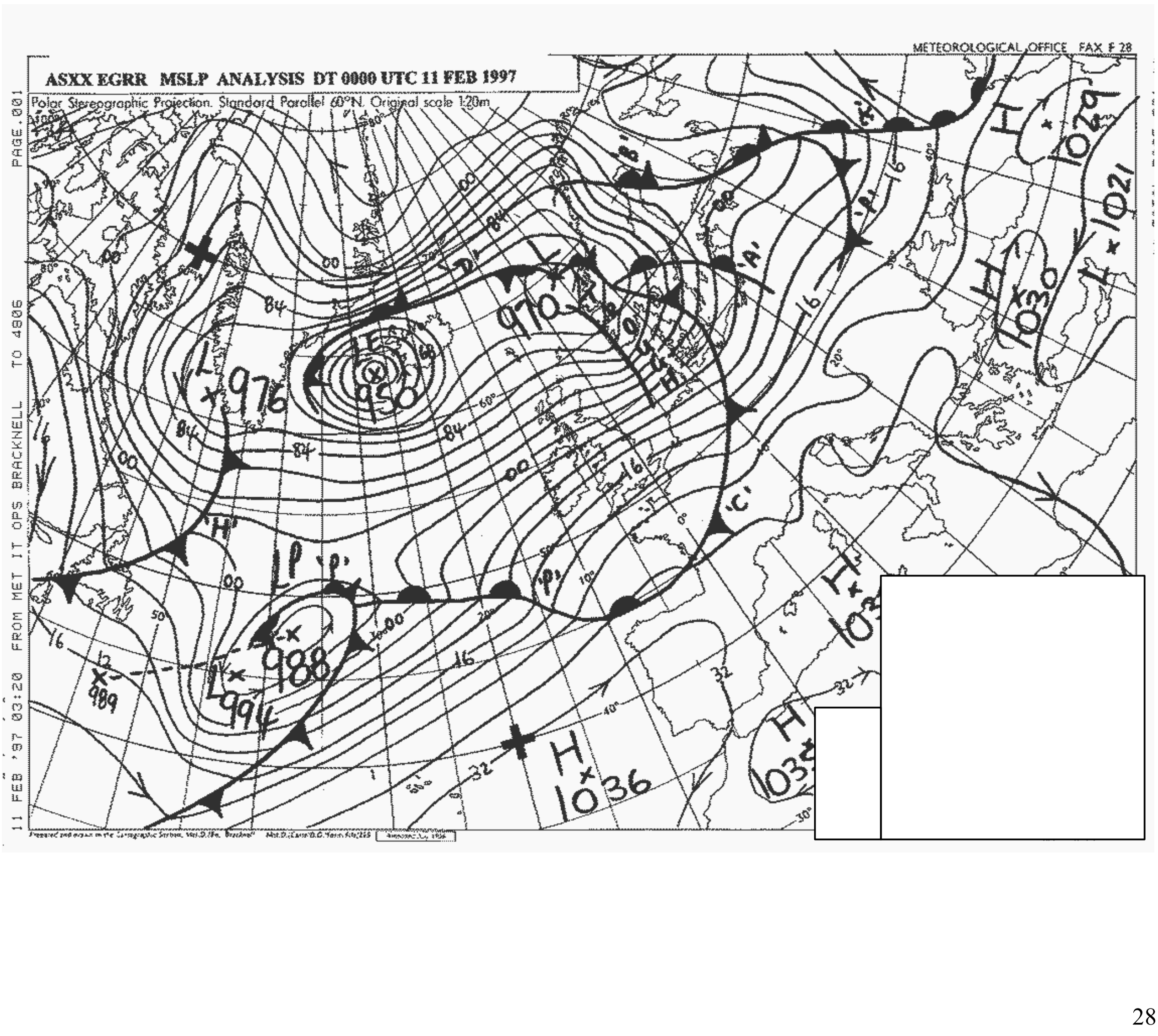
In presenza di un minimo di pressione (L) si ha circolazione **ciclonica**:



In presenza di un massimo di pressione (H) si ha circolazione **anticiclonica**:

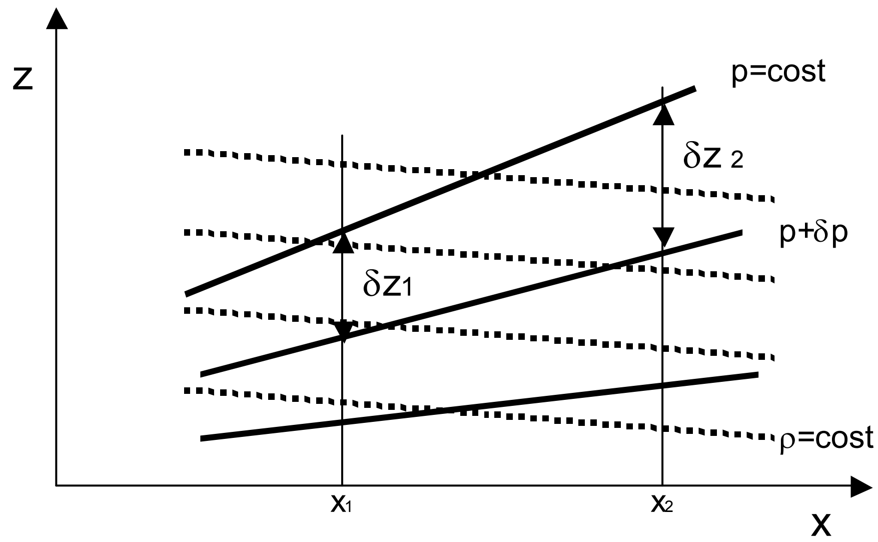


Dall’ osservazione della distribuzione di pressione in una carta meteorologica si può quindi risalire alla direzione dei venti e alla circolazione atmosferica.



8- IL VENTO TERMICO

In presenza di un gradiente orizzontale di densità si ha una variazione del vento geostrofico con la quota.



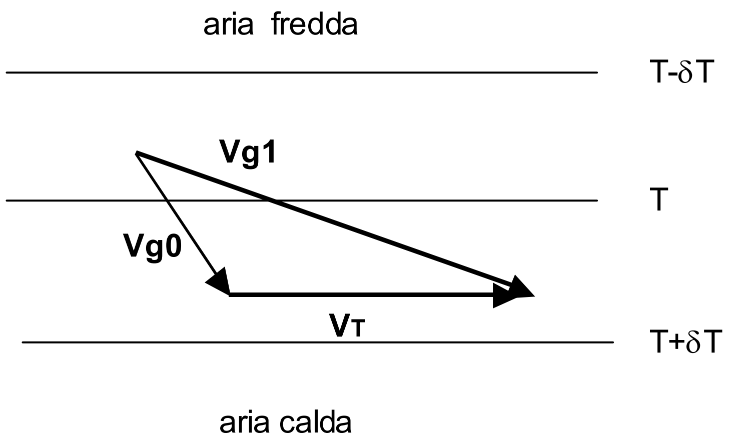
Essendo $\dfrac{d\rho}{dx} < 0$ a causa dell'equilibrio idrostatico ($dp = -\rho g dz$) si deve avere $dz_2 > dz_1$ per ottenere la stessa dp. Quindi, come mostrato in figura, le superfici isobariche sono inclinate verso l'alto con pendenza crescente con la quota, ne risulta che il gradiente orizzontale di pressione cresce con la quota e quindi il vento geostrofico cresce con la quota.

Si definisce vento termico la differenza del vento geostrofico a quote diverse, non è quindi un vento reale.

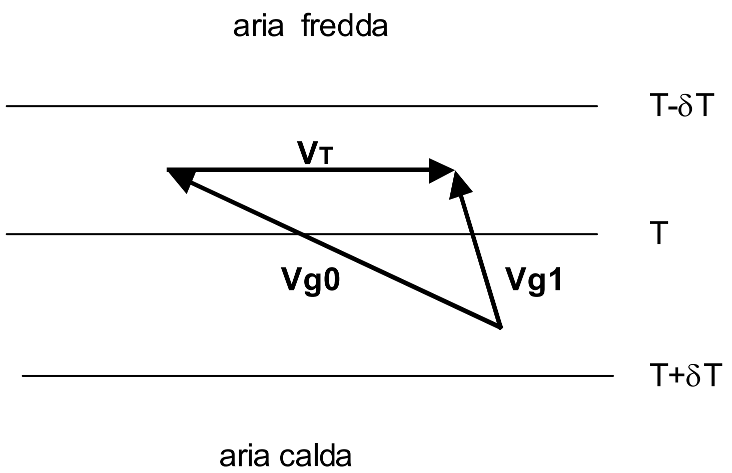
Si può dimostrare che il vento termico è parallelo alle isoterme con l'aria calda sulla destra nell'emisfero nord.

Si noti per inciso che il vento termico non e' un vero e proprio vento (per così dire non 'soffia') ma è unicamente la differenza del vento geostrofico tra due livelli isobarici. Esso è tuttavia un'utile quantità in meteorologia, infatti, come si può vedere dall'esempio che segue, può essere utile a valutare l'avvezione di temperatura, cioè il movimento di masse d'aria a diversa temperatura, dalla misura del vento geostrofico a due diverse quote.

Si consideri la situazione mostrata in figura:

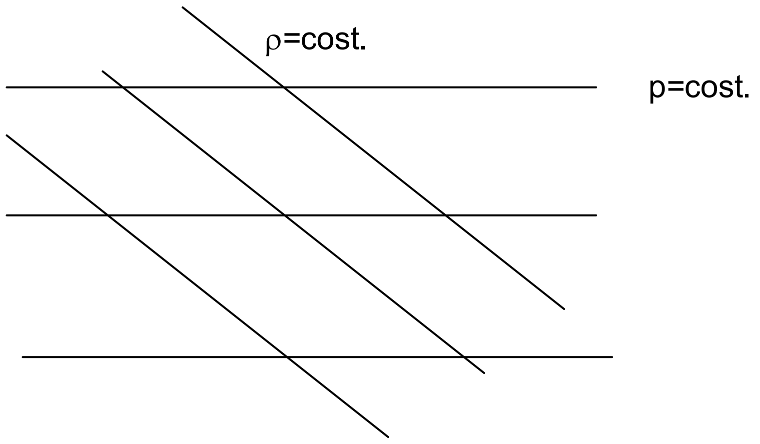


se si osserva una rotazione antioraria con la quota del vento geostrofico si ha *avvezione fredda,* cioè il vento geostrofico soffia da zone dove l'aria e' più fredda verso zone dove l'aria e' più calda.
Nel caso in cui si osservi una rotazione in senso orario si ha *avvezione calda*.



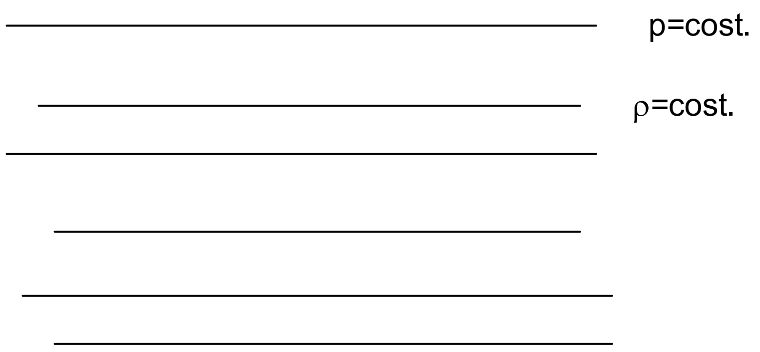
Viceversa si può stimare il vento geostrofico ad ogni quota, noto il suo valore ad un certo livello, dal campo di temperatura.

Il vento termico e' un fenomeno tipicamente baroclino, infatti si definisce **fluido baroclino** un fluido in cui le superfici di ugual densità non sono parallele alle superfici di ugual pressione:



In un'atmosfera di questo tipo si ha un gradiente di temperatura isobarico (cioè calcolato sulle superfici a pressione costante) non nullo e quindi il vento geostrofico varia con la quota.

In un **fluido barotropico** invece la densità dipende solo dalla pressione $\rho = \rho(p)$, le superfici di ugual densità sono parallele alle superfici isobariche:



In una atmosfera barotropica si ha il gradiente di temperatura isobarico nullo e quindi il vento geostrofico non varia con la quota.

9 TEOREMA DI TAYLOR-PROUDMAN

Consideriamo, **in un fluido omogeneo**, un flusso geostrofico:

$$Ro = \frac{U}{fL} << 1,$$

siano le forze viscose trascurabili:

$$\nu \frac{U}{L^2} < fU \Rightarrow E \equiv \frac{\nu}{fL^2} < 1$$

dove si è definito il **numero di Ekman** (E) come rapporto tra le forze viscose e le forze di Coriolis: υ è la viscosità molecolare, U la scala delle velocità, L la scala spaziale e *f* il parametro di Coriolis.
L'equazioni del moto sono quelle del moto geostrofico per l'orizzontale e l'equazione idrostatica per la direzione verticale:

$$fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$fv = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho_0$$

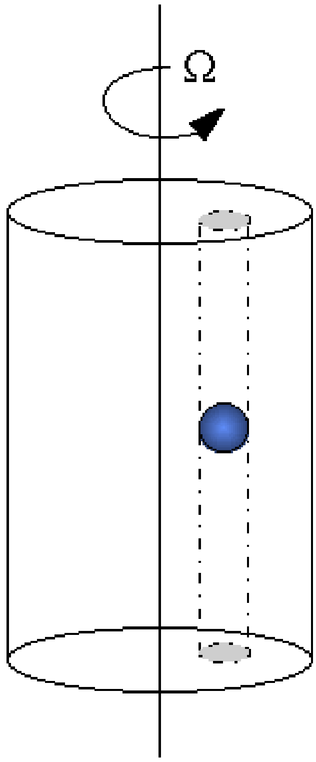
Si può dimostrare, applicando la condizione di incompressibilità che, in queste condizioni, non si ha variazione del campo di velocità lungo la direzione verticale (più in generale lungo la direzione parallela all'asse di rotazione):

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial z} = 0$$

Inoltre, se esiste una parete solida perpendicolare all'asse di rotazione, in corrispondenza di tale parete deve essere w=0 (come ad esempio al suolo), per quanto visto in precedenza si ha:

$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ e $w=0$ in ogni punto lungo questa direzione.

Quindi il flusso e' interamente bidimensionale in piani perpendicolari all'asse di rotazione.



10 MODELLO PER ACQUA SOTTILE

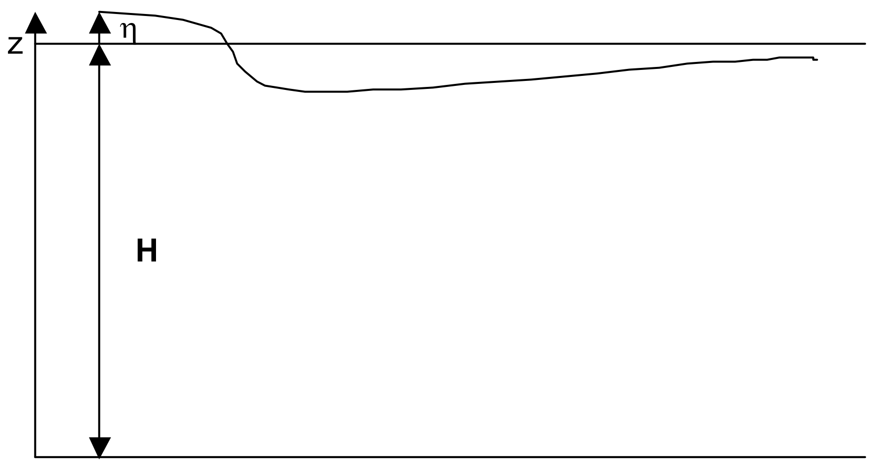
Consideriamo la situazione mostrata in figura, un strato di **fluido omogeneo** di spessore H e dimensione orizzontale L per cui sia:

H<<L (modello per l'*acqua sottile*).

Per la condizione di incompressibilità si ha:

$$\frac{U}{L}+\frac{W}{H}=0 \quad \text{e quindi} \quad \frac{U}{W}\approx\frac{L}{H} \;;$$

essendo H<<L si ha anche W<<U.



Sia η(x,y) la variazione di spessore del fluido rispetto ad H (η<<H), la pressione alla generica quota z può essere espressa in funzione di questa quantità:

$$p(z)=\rho g\left(H+\eta-z\right)$$

Nel modello di acqua sottile la dinamica dell'atmosfera dipende unicamente da tre variabili: le componenti orizzontali della velocità e lo spessore del fluido.

Per descrivere la capacità del flusso di far ruotare gli elementi di fluido si introduce la **vorticità relativa** $\vec{\omega}$, si ha per la sua **componente verticale**:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Le aree a circolazione antioraria (ciclonica nell'emisfero nord) sono caratterizzate da valori della vorticità relativa positiva, mentre le aree a circolazione oraria (anticiclonica nell'emisfero nord) sono caratterizzate da vorticità relativa negativa.
Introducendo l'approssimazione di *β-plane* per la variazione del parametro di Coriolis con la latitudine:

$$f = f_0 + \beta y$$

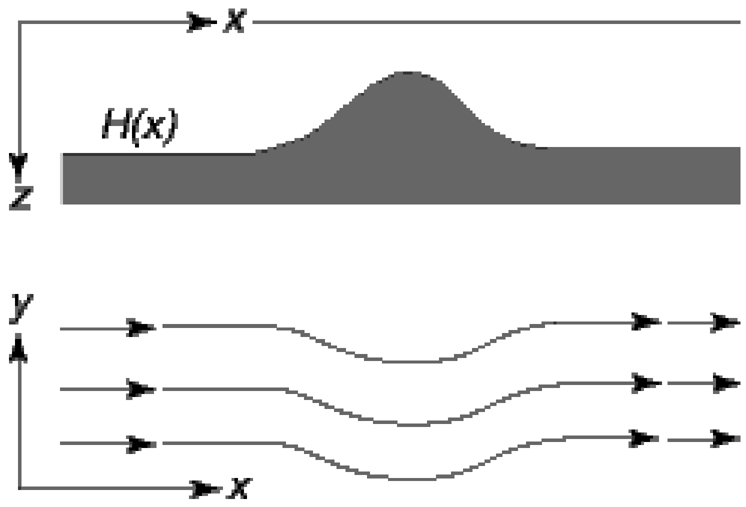
dove si intende y diretta lungo i meridiani e β una costante, si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta + f}{h}\right) = 0$$

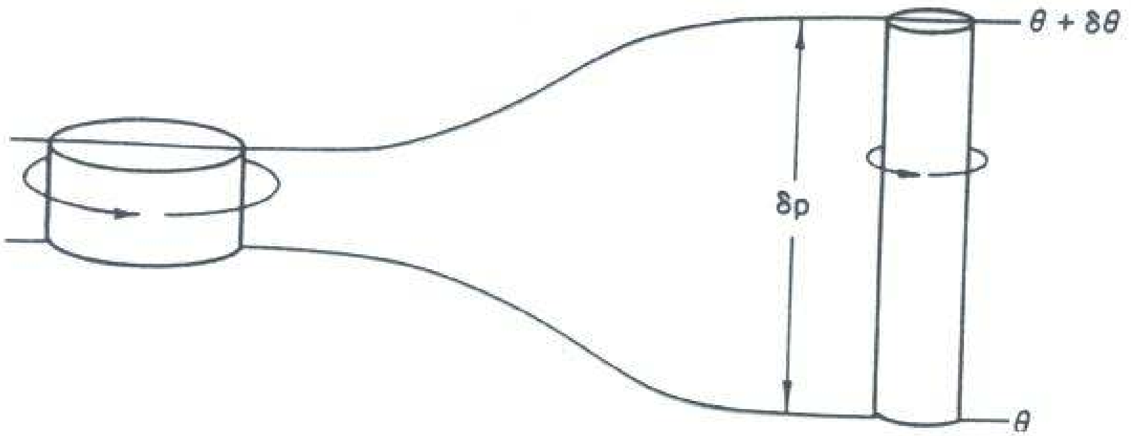
Dove h è lo spessore totale del fluido, h=H+η. La quantità tra parentesi, chiamata **vorticità potenziale**:

$$P = \frac{\zeta + f}{h}$$

si conserva lungo il moto.
Consideriamo per semplicità l'emisfero nord. Se il fluido passa sopra un ostacolo (p.e. un rilievo montuoso) lo spessore h del fluido diminuisce e di conseguenza (restando *f* costante), affinché la vorticità potenziale rimanga costante, anche la vorticità relativa deve diminuire creando una curvatura in senso orario nel flusso (anticiclonica). Viceversa se lo spessore del fluido aumenta, la vorticità potenziale aumenta e si crea una circolazione antioraria (vorticità ciclonica).

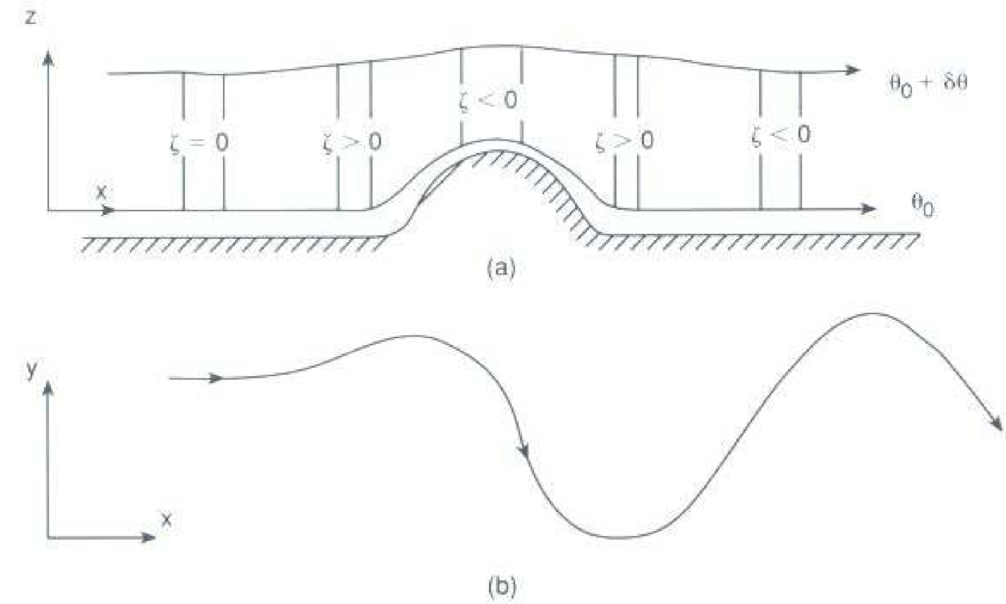


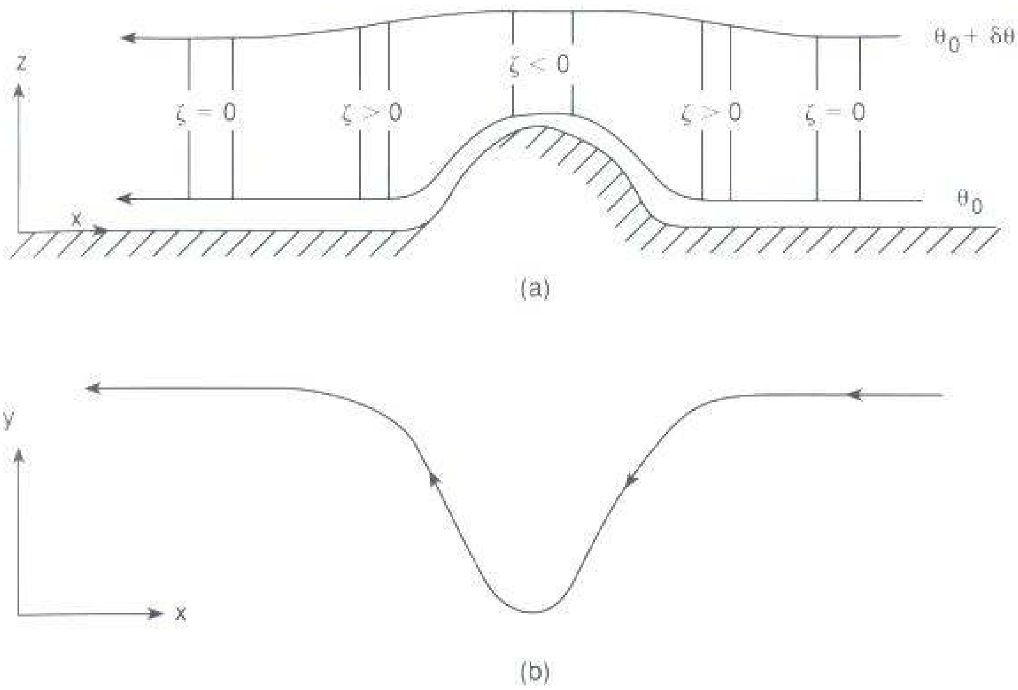
Questo costituisce l'importante **principio di conservazione della vorticità potenziale**. Si può dimostrare che questo principio e' valido anche per fluidi non omogenei ma *barotropici;* nel caso di fluidi *baroclini* è possibile definire la vorticità potenziale di Ertel dove la componente verticale della vorticità relativa ζ_ϑ è calcolata su superfici isoentropiche (a temperatura potenziale θ = cost.) e lo spessore h_ϑ è la differenza di pressione tra superfici isoentropiche (Figura). Si può dimostrare che per flussi adiabatici e non viscosi questa quantità si **conserva lungo il moto**.



La vorticità potenziale, in generale, rappresenta sempre il rapporto tra la vorticità assoluta, somma di quella relativa e quella planetaria, e l'effettivo spessore dei vortici.

Un interessante esempio è costituito dal flusso su un rilievo orografico, mostrato nella Figura seguente. Si noti il diverso comportamento del flusso da ovest rispetto a quello da est, a causa del termine di vorticità planetaria.





(da Holton, 1992)