METODI DI MISURA E ANALISI DATI

Enrico Ferrero

Lezioni del corso

1 INTRODUZIONE

- Errori come incertezze:
  non sono ‘sbagli’, sono inevitabili e devono essere ridotti il più possibile.
- Inevitabilità degli errori nella misura di grandezze fisiche:
  cause evitabili e intrinseche, errori trascurabili e importanza dell’errore.
- Importanza del conoscere gli errori:
  verifica di teorie tramite esperimenti

Esempio:

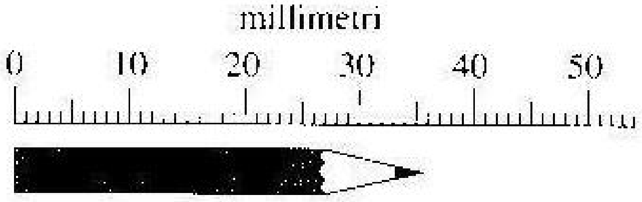
Stima della densità dell’oro a 18 carati
Supponiamo la densità dell’oro ρ_{oro}=15.5 g cm^{-3} e la densità di una lega ρ_{lega}=13.8 g cm^{-3}
Vengono effettuate le seguenti stime:
Esperto A:
valore 15 g cm^{-3} compreso tra 13.5 g cm^{-3} e 16.5 g cm^{-3}
Esperto B:
valore 13.9 g cm^{-3} compreso tra 13.7 g cm^{-3} e 14.1 g cm^{-3}

Si osserva che:
1. B è più preciso ma anche la misura di A è corretta.
2. Gli intervalli si sovrappongono dunque le misure sono compatibili e corrette.
3. La stima di A è inutilizzabile perché nell’intervallo cadono entrambi i valori di densità della lega e dell’oro.
4. La conclusione di B è che il campione sia costituito da una lega.

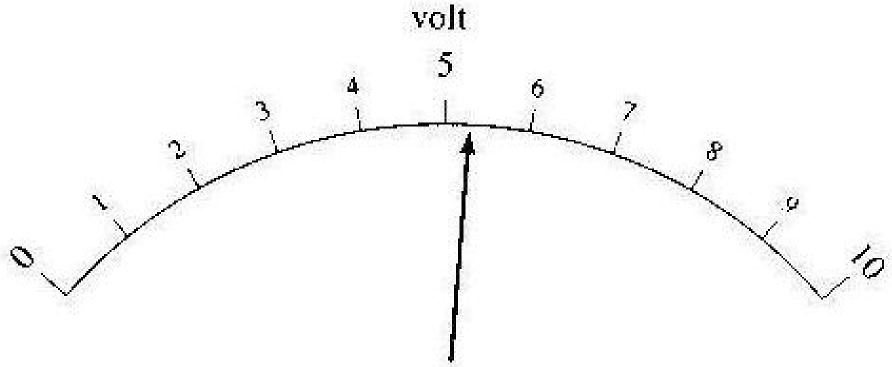
2 LA STIMA DEGLI ERRORI NELLA LETTURA DELLE SCALE

Interpolazione tra le incisioni

Esempi : righello e voltmetro



La misura di una lunghezza con un righello.



Una lettura su un voltmetro.

Nel caso del righello si ha:
miglior stima = 36 mm
intervallo probabile tra 35.5 mm e 36.5 mm (mezza divisione)

Nel caso del voltmetro si ha:
miglior stima = 5.3 volt (valore interpolato)
Intervallo probabile da 5.2 volt a 5.4 volt

Convenzione:

se non è specificato nulla si assume come errore metà dell'intervallo tra le incisioni.
Esempio:
x=1.27 significa che x giace tra 1.265 e 1.275.

La **sensibilità** di uno strumento (o per meglio dire l'**errore di sensibilità**) può venir definita come la minima variazione della grandezza in esame che si riesce ad apprezzare in modo obiettivo . Nel caso di strumenti tarati la sensibilità corrisponde quindi al minimo intervallo di valori apprezzabile mediante lo strumento. Per strumenti digitali (cioè dotati di un display numerico) questo valore è una unità sull'ultima cifra esibita dallo strumento. Per strumenti con scala graduata di norma e il più piccolo intervallo in cui e divisa la scala. In alcuni casi però (per esempio un regolo con divisioni in mm) può essere lecito valutare a occhio la **mezza divisione**.

3 LA STIMA DEGLI ERRORI NELLE MISURE RIPETIBILI

Esempio:
Misura del periodo di un pendolo, misure ripetute:

2.3, 2.4, 2.5, 2.4 (s)

La miglior stima è 2.4 (valor medio)
Minimo: 2.3 e massimo 2.5 costituiscono l'intervallo probabile

L'importanza delle misure statistiche: metodi statistici.
Non sempre è possibile ripetere le misure
Alcuni errori non sono eliminabili con i metodi statistici, e vengono ripetuti in ciascuna misura: errori sistematici.

4 RAPPRESENTAZIONE ED UTILIZZO DEGLI ERRORI

Il risultato di una misura deve essere scritto nella forma:

Miglior stima ± errore

Esempio:

Miglior stima: 2.4 s
Intervallo probabile 2.3-2.5 s
Quindi in forma compatta si ha:

$$2.4 \pm 0.1 \text{ s}$$

Regola:

$$\text{Valore misurato di } x = x_{best} \pm \delta x$$

La miglior stima è x_{best}

Ed è compresa tra:

$$x_{best} - \delta x \quad \text{e} \quad x_{best} + \delta x$$

δx è l'errore, l'incertezza della misura
δx e' una quantità positiva.

Non sempre possiamo essere certi (100%) che il valore misurato sia compreso nell'intervallo $x_{best} - \delta x$ e $x_{best} + \delta x$, possiamo però stimare, in senso statistico, un livello di confidenza (p.e. 70%, 90% etc.)

5 CIFRE SIGNIFICATIVE

Degli errori

L'errore, in quanto tale, non può essere stimato con troppa precisione, per esempio scrivere:

$$g=9.82 \pm 0.02385 \ m/s^2$$

è assurdo.

Regola:

Si deve arrotondare l'errore ad una sola cifra significativa.

Esempio:

$$g=9.82 \pm 0.02 \ m/s^2$$

Eccezione:

Se la 1ª cifra significativa è 1 allora si aggiunge una 2ª cifra

Esempio:

$$\delta x=0.14$$

Infatti, se si ponesse $\delta x=0.1$ si sottovaluterebbe l'errore del 40 %

Dei risultati

Valutato l'errore di una misura si devono considerare le cifre significative nei risultati.

Esempio:
Scrivere $v=6051.78 \pm 30$ m/s, è assurdo!

L'espressione corretta è:

$$v=6050 \pm 30 \text{ m/s}$$

Regola:

L'ultima cifra significativa in qualunque risultato deve essere dello stesso ordine di grandezza (nella stessa posizione decimale) dell'errore.

Esempi:

Si misura $x=92.81$,

- se $\delta x=0.3$ allora $x=92.8 \pm 0.3$
- se $\delta x=3$ allora $x=93 \pm 3$
- se $\delta x=30$ allora $x=90 \pm 30$

Nota 1:

Nei calcoli è utile tenere 1 cifra in più di quella richiesta nel risultato finale.

Nota 2:

Le dimensioni fisiche dell'errore sono le stesse della grandezza stimata

Nel caso di numeri molto grandi o piccoli per cui sia conveniente usare la notazione scientifica si scrive per esempio:

$$q=(1.61 \pm 0.05) \times 10^{-19}\ C$$

che e' più chiaro che:

$$q=1.61 \times 10^{-19} \pm 5 \times 10^{-21}\ C$$

Eccezione:

Se $\delta x=1$ si può trattenere una cifra significativa in più, per esempio:

$$l = 27.6 \pm 1$$

con l'arrotondamento (28 ± 1) si perderebbe informazione

6 DISCREPANZA

Discrepanza: differenza tra due valori misurati della stessa grandezza

La discrepanza può essere o non essere significativa:
esempio:

$$\Omega_1=40 \pm 5\ \text{ohm}$$
$$\Omega_2=42 \pm 8\ \text{ohm}$$

la discrepanza e' 2, molto minore dell'errore su Ω, quindi non significativa, gli intervalli di errore delle due misure si sovrappongono.
Se invece è:

$$\Omega_1=35 \pm 2 \text{ ohm}$$
$$\Omega_2=45 \pm 1 \text{ ohm}$$

la discrepanza è significativa, gli intervalli di errore delle due misure non si sovrappongono.

Se l'errore del valore stimato (di confronto) e' molto più piccolo di quello che può essere fatto in una misura di laboratorio, allora il valore stimato viene assunto come esatto.
Per esempio il valore della velocità della luce stimato è:

$$c=299792458\pm 1 \text{ m/s}$$

Altre volte può succedere che il valore stimato sia solo una vaga indicazione, come per esempio l'indice di rifrazione.

7 CONFRONTO VALORI MISURATI-DATI

Se il valore accettato cade nell'intervallo di incertezza della misura allora va bene, se leggermente fuori va ancora bene, se completamente fuori dall'intervallo:

1. c'è un errore nella stima del valore
2. c'è un errore nella stima dell'errore
3. il confronto non è corretto perché le condizioni non sono le stesse

Confronto di due misure
Esempio (conservazione della quantità di moto)

$$p=1.49 \pm 0.04 \text{ kg m/s}$$
$$p'=1.56 \pm 0.06 \text{ kg m/s}$$

gli intervalli si sovrappongono quindi possiamo concludere che

$$p=p'$$

altrimenti, o le misure sono sbagliate (errore sperimentale) o gli errori sono sottostimati

Consideriamo la differenza p-p':

$$p=p_{best} \pm \delta p$$
$$p'=p'_{best} \pm \delta p'$$

Stimiamo l'errore sulla differenza p-p':
Il valore più grande per p-p' si ha per

$$p=p_{best} + \delta p \text{ e } p'=p'_{best} - \delta p'$$

da cui

$$p-p' = p_{best} - p'_{best} + \delta p + \delta p'$$

il valore più basso si ha per

$$p=p_{best} - \delta p \text{ e } p'=p'_{best} + \delta p'$$

da cui

$$p-p' = p_{best} - p'_{best} - (\delta p + \delta p')$$

in conclusione l'errore nella differenza p-p' è $(\delta p + \delta p')$:

$$p-p' = p_{best} - p'_{best} \pm (\delta p + \delta p')$$

Regola:
Se le grandezze x e y sono misurate con errori δx e δy e $q=x-y$ allora

$$\delta q \approx \delta x + \delta y$$

Nota:
si è utilizzato il simbolo ≈ perché:

1. non abbiamo ancora una definizione precisa degli errori in gioco
2. sarà definita come regola più precisa.

Questo costituisce il primo esempio di propagazione dell'errore.

8 PROPORZIONALITA' DI UN GRAFICO

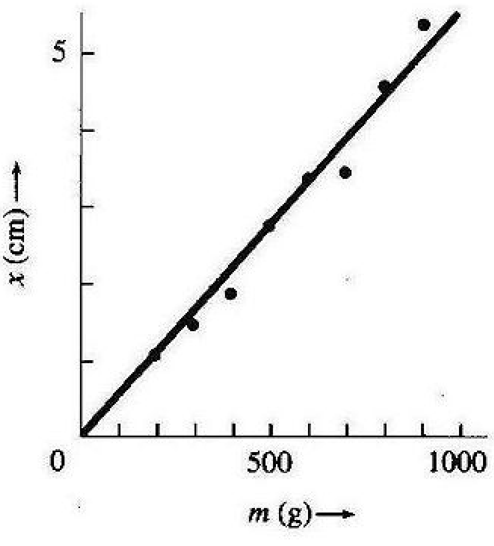
Molte leggi fisiche implicano la proporzionalità fra due grandezze.

Consideriamo p.e. la legge di Hook per l'allungamento di una molla:

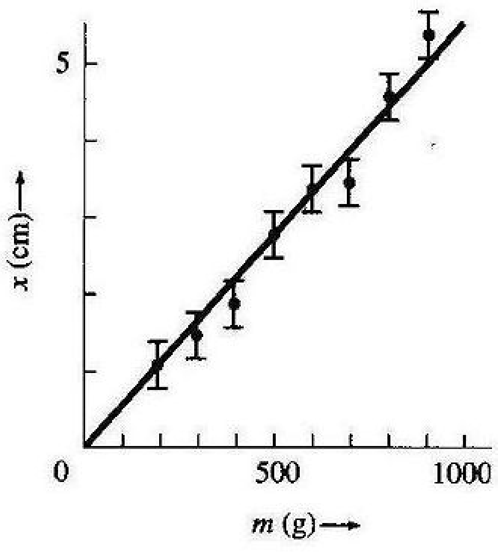
$$x = \frac{F}{k}$$

dove k è una costante.
Nel caso in cui F sia la forza peso del carico (massa *m*), si ha una relazione lineare tra allungamento e massa che può essere verificato graficamente:

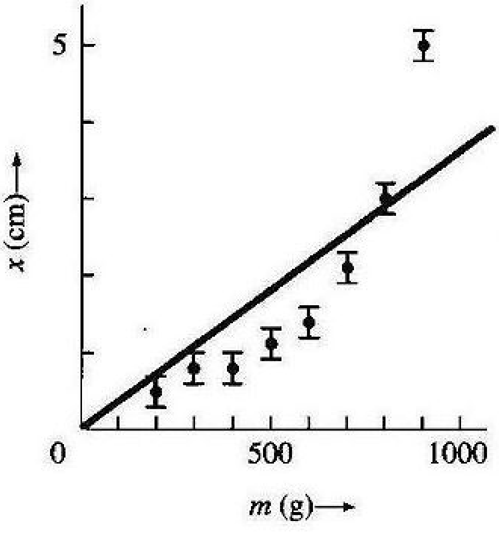
$$x = \left(\frac{g}{k}\right)m$$



(a)



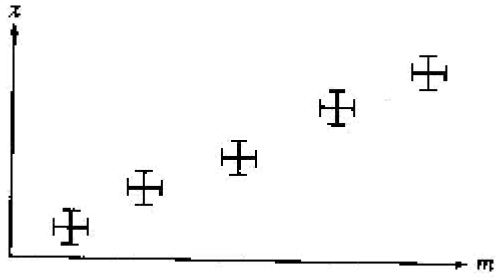
(b)



(c)

Tenendo conto delle barre di errore la relazione lineare può essere verificata (b) o non verificata (c).

L’incertezza può essere su entrambe le variabili:



9 ERRORI RELATIVI

Si definisce errore relativo il rapporto tra l'errore δx e la miglior stima:

$$\frac{\delta x}{x_{best}}$$

in genere si ha $\delta x \ll x_{best}$ e quindi l'errore relativo si puo' esprimere come percentuale.
Esempio:

$$f = 50 \pm 1 \text{ cm}$$

allora in termini di errore relativo si ha:

$$\frac{\delta f}{f_{best}} = \frac{1}{50} = 0.02 \quad \text{cioè} \qquad 2\%$$

In termini di errore percentuale si può stabilire schematicamente che:

- un errore del 10% corrisponde a misure rozze
- un errore del 1-2 % corrisponde a misure buone
- un errore minore del 1% è difficile da ottenere in laboratorio.

10 MOLTIPLICAZIONE DI DUE VALORI DI MISURA

Utilizzando l'errore relativo si può scrivere:

$$x = x_{best} \pm \delta x = x_{best}\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)$$

dove si è utilizzato il valore assoluto perché l'errore deve essere una quantità positiva.

Esempio:
se si ha un errore del 3% allora:

$$x = x_{best}\left(1 \pm \frac{3}{100}\right)$$

quindi:

$$0.97 x_{best} \le x \le 1.03 x_{best}$$

Consideriamo per esempio la quantità di moto:

p=mv

$$m = m_{best}\left(1 \pm \frac{\delta m}{|m_{best}|}\right) \qquad v = v_{best}\left(1 \pm \frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)$$

il valore più elevato per p si ha prendendo i massimi valori per m e v:

$$p = m_{best} v_{best}\left(1 + \frac{\delta m}{|m_{best}|}\right)\left(1 + \frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)$$

$$\left(1 + \frac{\delta m}{|m_{best}|}\right)\left(1 + \frac{\delta v}{|v_{best}|}\right) = \left(1 + \frac{\delta m}{|m_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|} + \frac{\delta m}{|m_{best}|}\frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)$$

e trascurando il termine del secondo ordine si ha:

$$p = m_{best} v_{best}\left[1 + \left(\frac{\delta m}{|m_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)\right]$$

analogamente si ottiene il valore minore per p:

$$p = m_{best} v_{best} \left(1 - \frac{\delta m}{|m_{best}|}\right)\left(1 - \frac{\delta v}{|v_{best}|}\right) \approx$$

$$\approx m_{best} v_{best} \left[1 - \left(\frac{\delta m}{|m_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)\right]$$

in conclusione si ha:

$$p = m_{best} v_{best} \left[1 \pm \left(\frac{\delta m}{|m_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)\right]$$

$$p = p_{best} \left(1 \pm \frac{\delta p}{|p_{best}|}\right)$$

dove si è posto:

$$p_{best} = m_{best}\, v_{best}$$

e

$$\frac{\delta p}{|p_{best}|} \cong \frac{\delta m}{|m_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|}$$

Esempio:

Sia $m = 0.53 \pm 0.01$ kg e $v = 9.1 \pm 0.3$ m/s

si ha:

$$p_{best} = m_{best}\, v_{best} = 0.53 \times 9.1 = 4.82 \text{ kg m/s}$$

$$\frac{\delta m}{m_{best}} = \frac{0.01}{0.53} = 0.02 = 2\%$$

$$\frac{\delta v}{|v_{best}|} = \frac{0.3}{9.1} = 0.03 = 3\%$$

da cui

$$\frac{\delta p}{|p_{best}|} = 2\% + 3\% = 5\%$$

e quindi

$$\delta p = p_{best} \frac{\delta p}{|p_{best}|} = 4.82 \times \frac{5}{100} = 0.2 kg \frac{m}{s}$$

p=4.8 ± 0.2 kg m/s

Regola:

Se x e y sono misurate con piccoli errori relativi e se q=xy, allora l'errore relativo su q è uguale alla somma degli errori relativi su x e y:

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} \cong \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|}$$

11 PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Quando si effettuano misure indirette è necessario propagare gli errori.

Somma e differenza

Abbiamo già visto che nel caso della differenza:

$$q=x-y$$

si ha

$$\delta q \approx \delta x + \delta y$$

Si può mostrare analogamente che nel caso della somma:

$$q=x+y$$

si ha:

$$\delta q \approx \delta x + \delta y$$

Infatti il valore più grande si ha per:

$$x_{best} + y_{best} + \delta x + \delta y$$

e quello più piccolo per

$$x_{best} + y_{best} - \delta x - \delta y$$

e quindi

$$q_{best}=x_{best} + y_{best}$$

e

$$\delta q \approx \delta x + \delta y$$

Si può generalizzare questa regola al caso di n somme differenze:

$$q=x+y+y+.....-u-v-w....$$

si ha:

$$\delta q \approx \delta x+\delta y+\delta y+.....+\delta u+\delta v+\delta w....$$

Si noti che anche in questo caso si è utilizzato il simbolo ≈ perché:

1. non abbiamo ancora una definizione precisa degli errori in gioco
2. sarà definita come regola più precisa.

Prodotti e quozienti

Abbiamo visto che nel caso del prodotto:

$$q=xy$$

si ha:

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} \cong \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|}$$

Consideriamo ora il quoziente

$$q = \frac{x}{y}$$

dove $x = x_{best}\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)$ $\qquad$ $y = y_{best}\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y_{best}|}\right)$

e quindi

$$q = \frac{x_{best}\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)}{y_{best}\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y_{best}|}\right)}$$

il valore più grande di q si avrà per

$$q = \frac{x_{best}\left(1 + \frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)}{y_{best}\left(1 - \frac{\delta y}{|y_{best}|}\right)}$$

ed essendo

$$\frac{1}{1-b} \approx 1 + b \qquad \text{se} \qquad b \ll 1$$

si ha:

$$\frac{1}{1 - \frac{\delta y}{|y_{best}|}} \approx 1 + \frac{\delta y}{|y_{best}|} \qquad \text{essendo generalmente } \frac{\delta y}{|y_{best}|} \ll 1$$

e quindi:

$$q = \frac{x_{best}}{y_{best}}\left(1 + \frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)\left(1 + \frac{\delta y}{|y_{best}|}\right) = \frac{x_{best}}{y_{best}}\left(1 + \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|} + \frac{\delta x}{|x_{best}|}\frac{\delta y}{|y_{best}|}\right) \cong$$

$$\cong \frac{x_{best}}{y_{best}}\left(1 + \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|}\right)$$

analogamente si ottiene il valore più piccolo per:

$$q = \frac{x_{best}\left(1 - \frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)}{y_{best}\left(1 + \frac{\delta y}{|y_{best}|}\right)} \cong \frac{x_{best}}{y_{best}}\left(1 - \frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)\left(1 - \frac{\delta y}{|y_{best}|}\right) \cong$$

$$\cong \frac{x_{best}}{y_{best}}\left(1 - \left(\frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|}\right)\right)$$

in conclusione si può scrivere:

$$q = q_{best}\left(1 \pm \frac{\delta q}{|q_{best}|}\right)$$

dove si è posto

$$q_{best} = \frac{x_{best}}{y_{best}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\delta q}{|q_{best}|} = \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|}$$

Regola:

Se x e y sono misurate con piccoli errori relativi e se $q = \frac{x}{y}$, allora l'errore relativo su q è uguale alla somma degli errori relativi su x e y:

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} \cong \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|}$$

Generalizzando se si ha una espressione costituita da prodotti e quozienti del tipo:

$$q = \frac{xy.....z}{uv.....w}$$

l'errore relativo su q sarà la somma degli errori relativi sulle diverse variabili:

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} \cong \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|} + ... + \frac{\delta z}{|z_{best}|} + \frac{\delta u}{|u_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|} + ... + \frac{\delta w}{|w_{best}|}$$

si noti che si è utilizzato il simbolo ≈ perché:

1. non abbiamo ancora una definizione precisa degli errori in gioco
2. sarà definita come regola più precisa.

Esempi:

Prodotto di un numero esatto (dato senza errore) per una grandezza misurata:

$$q = Bx$$

essendo $\delta B = 0$
si ha

$$\frac{\delta q}{|q|} \cong \frac{\delta B}{|B|} + \frac{\delta x}{|x|} = \frac{\delta x}{|x|}$$

e quindi $\delta q = B\delta x$

Errore in una potenza:

$$q = x^n$$

supponiamo sia n=2 allora si ha:

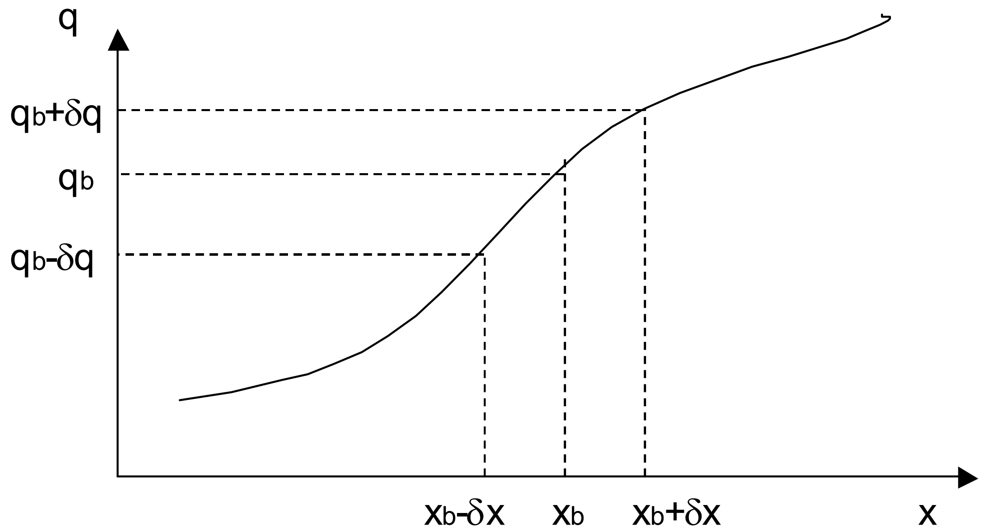
$$\frac{\delta q}{|q|} \cong \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta x}{|x|} = 2\frac{\delta x}{|x|}$$

generalizzando, per $q = x^n$ si ha:

$$\frac{\delta q}{|q|} \cong n\frac{\delta x}{|x|}$$

Nota: vale anche nel caso di n non intero.

Funzioni arbitrarie:



si ha

$$q_{best} = q(x_{best})$$

e sviluppando intorno a q_{best}

$$\delta q = q(x_{best} + \delta x) - q(x_{best}) \cong \frac{dq}{dx}\delta x$$

Se la pendenza della curva è negativa si ha analogamente,

$$\delta q \cong -\frac{dq}{dx}\delta x$$

quindi in generale

$$\delta q \cong \left|\frac{dq}{dx}\right|\delta x$$

Questa relazione si generalizza al caso di più variabili.

Nel caso di due variabili:

$$q = q(x, y)$$

si ha

$$q_{best} = q(x_{best}, y_{best})$$

ed essendo

$q(x + \delta x, y + \delta y) \cong q(x, y) + \frac{\partial q}{\partial x}\delta x + \frac{\partial q}{\partial y}\delta y$ si ottiene

$q(x, y) = q(x_{best}, y_{best}) \pm \left[\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y\right]$ con

$$\delta q \cong \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y$$

12 ERRORI INDIPENDENTI

Si osservi:

Le derivazioni delle regole per la propagazione degli errori fatti fino a qui non tengono conto che sommando e sottraendo le quantità misurate gli errori si potrebbero eliminare a vicenda.
La stessa cosa vale analogamente per gli errori relativi nelle moltiplicazioni e nelle divisioni.

La formula $\delta q \approx \delta x + \delta y$ è stata ricavata per l'espressione
$q = x + y$ nell'ipotesi che le due quantità siano state sovrastimate e sottostimate contemporaneamente delle intere quantità δx e δy; la probabilità che questo accada è molto bassa se gli errori sono casuali e indipendenti, cioè calcolati per misure indipendenti.

In conclusione le formule ricavate danno una sovrastima per errori casuali e indipendenti.
Si sostituisce allora la somma con la somma quadratica:

$$\delta q^2 = \delta x^2 + \delta y^2 < (\delta x + \delta y)^2$$

Se gli errori non sono indipendenti e casuali si deve usare la formula precedente che comunque costituisce un limite superiore:

$$\delta q \leq \delta x + \delta y$$

La regola si generalizza nel caso

$$q=x+y+y+\ldots..-u-v-w\ldots.$$

se gli errori sono casuali e indipendenti si ha:

$$\delta q^2=\delta x^2+\delta y^2+\delta y^2+\ldots..+\delta u^2+\delta v^2+\delta w^2\ldots.$$

altrimenti

$$\delta q\leq\delta x+\delta y+\delta y+\ldots..+\delta u+\delta v+\delta w\ldots.$$

La regola si estende ai prodotti e quozienti:

$$q = \frac{xy.....z}{uv.....w}$$

per errori **casuali e indipendenti** si ha:

$$\left(\frac{\delta q}{|q_{best}|}\right)^2 = \left(\frac{\delta x}{|x_{best}|}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{|y_{best}|}\right)^2 + ... + \left(\frac{\delta z}{|z_{best}|}\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\delta u}{|u_{best}|}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{|v_{best}|}\right)^2 + .. + \left(\frac{\delta w}{|w_{best}|}\right)^2$$

altrimenti:

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} \leq \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|} + ... + \frac{\delta z}{|z_{best}|} + \frac{\delta u}{|u_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|} + ... + \frac{\delta w}{|w_{best}|}$$

Nel caso di un generica funzione, per errori casuali e indipendenti:

$$\delta q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \delta x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \delta y^2$$

nel caso di n variabili:

$$q = q(x, y, z, ...)$$

$$\delta q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \delta x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \delta y^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2 \delta z^2 + ...$$

se gli errori non sono casuali e indipendenti si ha:

$$\delta q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\delta z + ...$$

Note

Le formule per il calcolo nel caso di una generica funzione si possono sempre utilizzare anche quando il calcolo potrebbe essere fatto passo a passo.
In particolare e' preferibile il calcolo diretto anziché quello passo a passo quando una variabile compare più volte perché altrimenti l'errore potrebbe essere sovrastimato.
Per esempio, se si ha:

$$q = \frac{x+y}{x+z}$$

nel calcolo passo a passo si perde la possibilità di semplificare gli errori del numeratore e quelli del denominatore relativi alla stessa variabile.

13 ANALISI STATISTICA DEGLI ERRORI CASUALI

Distinzione tra errori casuali ed errori sistematici.

Esempi:

1. Misure con cronometro:
   tempo di reazione ⇒ errore casuale
   orologio in ritardo ⇒ errore sistematico

2. Misure con righello:
   errori di interpolazione tra le tacche ⇒ errore casuale
   righello deformato ⇒ errore sistematico

3. Errori di parallasse:
   sia sistematici sia casuali

Trattamento degli errori

Casuali ⇒ trattamento statistico
Sistematici ⇒ accuratezza dell'esperimento.

Media e deviazione standard

Esempio:

Si siano effettuate le seguenti misure per la grandezza x:

$$71, 72, 72, 73, 71$$

si ha

$$x_{best} = \overline{x}$$

dove

$$\overline{x} = \frac{71 + 72 + 72 + 73 + 71}{5} = 71.8$$

è il valore medio di x.
In generale, se si hanno N valori:

$$\overline{x} = \frac{\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4 + ... + \mathrm{x}_N}{\mathrm{N}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Calcoliamo la deviazioni

$$d_i = x_i - \overline{x}$$

Prova	x_i	$d_i = x_i - \overline{x}$
1	71	-0.8
2	72	0.2
3	72	0.2
4	73	1.2
5	71	-0.8
	$\overline{x} = 71.8$	$\overline{d} = 0$

Si noti che:

$$\overline{d} = \frac{\sum_i d_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right) = \left(\overline{x} - \overline{x}\right) = 0$$

si considerano quindi gli scarti quadratici d_i^2:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_i d_i^{\,2}}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

chiamata deviazione standard o scarto quadratico medio.

Indica quanto in media le misure si discostano dal valor medio.

Prova	x_i	$d_i^{\,2} = \left(x_i - \overline{x}\right)^2$
1	71	0.64
2	72	0.04
3	72	0.04
4	73	1.4
5	71	0.64
	$\overline{x} = 71.8$	$\sum_i d_i^2 = 2.8$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_i d_i^{\,2}}{N}} = \sqrt{\frac{2.8}{5}} = \sqrt{0.56} = 0.7$$

l'incertezza media delle (singole) misure è 0.7.

Deviazione standard corretta:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$ (del campione)

corregge la tendenza a sottostimare nel caso di piccoli campioni. Nel caso di N=1, per esempio, l'incertezza è ignota perché il valor medio coincide con l'unica misura e non si ha nessuna informazione sull'incertezza. Usando la deviazione standard della popolazione si avrebbe $\sigma_x = 0$, mentre la deviazione standard del campione fornisce più correttamente $\sigma_x = \frac{0}{0}$.

La differenza è rilevante solo per N piccolo.
Nell'esempio precedente, N=5 si ha:

$$\sqrt{N} = 2.2 \Rightarrow \sigma_x = 0.7$$
$$\sqrt{N-1} = 2 \Rightarrow \sigma_x = 0.8$$

In ogni caso è meglio utilizzare la d.s. del campione perché dà una σ_x più grande.

14 DEVIAZIONE STANDARD COME INCERTEZZA NELLA SINGOLA MISURA

Si può dimostrare che se le misure sono distribuite normalmente e vengono ripetute più volte, allora il 68% delle misure giace nell'intervallo

$$\bar{x} \pm \sigma_x$$

σ_x è l'incertezza da associare alla singola misura, infatti se il numero si misure è grande, $\bar{x}$ è una stima affidabile del valore vero.

Al 68 % la singola misura x è entro σ_x dal risultato corretto.

Esempio

Misura della costante k di una molla

L'incertezza δk calcolata per una molla attraverso molte misure dovrebbe essere valida per tutte le molle (se non sono troppo differenti).

k= 86, 85, 84, 89, 86, 88, 88,85, 83, 85

si ha:

$$\bar{k} = 85.9 \frac{N}{m} \quad \text{e} \quad \sigma_k = 1.9 \frac{N}{m} \cong 2 \frac{N}{m}$$

se per la 2ª molla abbiamo $k = 71\frac{N}{m}$, con una confidenza del 70% k giace nell'intervallo $71 \pm 2\frac{N}{m}$

15 DEVIAZIONE STANDARD DELLA MEDIA

Se N è sufficientemente grande si ha:

$$x_{best} = \overline{x} \quad \text{e} \quad \delta x = \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

dove $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ è la deviazione standard della media

Nell'esempio precedente si ha:

$$\sigma_{\overline{k}} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{10}} = 0.6\frac{N}{m}$$

$$k = 85.9 \pm 0.6\frac{N}{m}$$

σ_x è l'incertezza da associare alla singola misura, aumentando il numero di misure N sostanzialmente non varia.

$\sigma_{\bar{x}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$ è l'incertezza da associare al valor medio, diminuisce al crescere di N: al crescere di N la stima del valor medio migliora e quindi si riduce l'incertezza.

Si noti che, essendo $\sigma_{\bar{x}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$ la precisione cresce lentamente

Anche se gli errori casuali possono essere ridotti effettuando un numero grande di misure, gli errori sistematici pongono un limite alla precisione:

$$\delta x = \sqrt{\left(\delta x_{casuali}\right)^2 + \left(\delta x_{sistematici}\right)^2}$$

16 NOZIONI FONDAMENTALI DEL CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Spazio degli eventi e campo di probabilità

Spazio degli eventi: l'insieme F associato ad un dato esperimento, reale o concettuale, tale che ogni suo sottoinsieme sia in *corrispondenza biunivoca* con i risultati dell'esperimento stesso.

Possiamo distinguere tra eventi semplici e eventi composti

Eventi semplici (o elementari) non sono scomponibili in altri eventi.
Eventi composti: scomponibili in un certo numero di eventi semplici.

Lo spazio degli eventi F comprende tutti i possibili sottoinsiemi che si possono formare con i risultati dell'esperimento.

Il particolare sottoinsieme di F che comprende tutti e solo gli eventi semplici viene detto U, esso comprende quindi tutti i possibili risultati diretti dell'esperimento e solo essi. Ogni evento composto si può considerare come un sottoinsieme dell'insieme U e la famiglia F dei sottoinsiemi di U è lo spazio degli eventi dell'esperimento in questione.

Se paragoniamo l'evento semplice ad un punto geometrico ogni risultato elementare dell'esperimento è rappresentato da uno ed un solo punto. L'insieme di tutti i punti U è detto **campo di probabilità**. Tutti gli eventi connessi con il dato esperimento sono rappresentati da un insieme di punti in numero maggiore o uguale a 1.

Relazioni tra eventi

Ad ogni evento A corrisponde un evento $\overline{A}$, detto complemento di A in U, che contiene tutti i punti di U non compresi in A. Se A≡U allora $\overline{A}=0$.

Definiamo A+B l'evento del campo U somma (o unione) degli eventi A e B

Diciamo che A è contenuto in B quando A è un sottoinsieme di B

Definiamo congiunto l'evento AB del campo U, intersezione degli eventi A e B

Se A e B sono eventi del campo di probabilità, anche A+B, AB, $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono eventi del campo. Quindi il campo delle probabilità e' un insieme chiuso rispetto alle operazioni di unione, intersezione e complemento.

Gli assiomi del calcolo delle probabilità

I assioma:

Dato un campo di probabilità costituito dai punti E_1, E_2,….., assumiamo che a ciascun punto E_i sia associata una grandezza misurabile non negativa $p_i=P[E_i]$, detta probabilità di E_i.

II assioma

La probabilità P[A] associata ad un evento composto A, costituito dai punti E_1, E_2,....., è data dalla somma delle probabilità dei singoli punti che la costituiscono:

$$P[A]= P[E_1]+ P[E_2]+\ldots$$

III assioma

La probabilità dell'evento certo vale 1

Si ha come conseguenza:

$P[U]=1$ evento certo

$0<P[A]<1$ evento casuale

$P[\overline{U}]=0$ evento impossibile

Inoltre:

$$P[A]=1-P[\overline{A}]$$

Se l'evento A è contenuto nell'evento B:

$$P[A]\leq P[B]$$

$$P[AB]=P[A]$$

$$P[B-A]=P[B]-P[A]$$

Dagli assiomi segue anche la definizione classica di probabilità. Se c sono i casi possibili e quindi eventi semplici si ha:

$$P[U]=\sum_{i=1}^{c} P[E_i]=1$$

Inoltre essendo equiprobabili $P[E_i]=1/c$ per ogni i. Se a sono i casi favorevoli, allora:

$$P[A]=\sum_{i=1}^{a} P[E_i] = aP[E_i] = \frac{a}{c}$$

Teorema dell'addizione

Nel caso di eventi incompatibili A e B:

$$P[A+B]=P[A]+P[B]$$

Se gli eventi non sono incompatibili è necessario sottrarre la probabilità dell'intersezione degli eventi per non contare due volte i punti comuni ad A e B

$$P[A+B]=P[A]+P[B]-P[AB]$$

Nel caso generale di n eventi si ha:

$$P[A_1+ A_2+\ldots+ A_n] \leq P[A_1]+P[A_2]+\ldots+P[A_n]$$

nota come disuguaglianza di Boole.

Il segno di uguaglianza si ha nel caso particolare di eventi mutuamente esclusivi.

Probabilità subordinata (o condizionata)

Nel caso in cui il verificarsi dell'evento A sia condizionato dal verificarsi dell'evento B si definisce la probabilità subordinata:

$$P[A|B]$$

Si può ricavare la seguente relazione:

$$P[A \mid B] = \frac{P[AB]}{P[B]}$$

P[A|B] rappresenta la probabilità dell'evento P[AB] nel sottoinsieme B di U. Infatti nel caso di B≡U si ha:

$$P[A] = \frac{P[A]}{P[U]}.$$

Teorema della moltiplicazione

Dalla definizione di probabilità condizionata si ha la regola delle probabilità composte:

$$P[AB] = P[A \mid B]P[B] = P[B \mid A]P[A]$$

che nel caso di n eventi diventa:

$$P[A_1A_2\ A_3 \dots A_n] = P[A_1]P[A_2 \mid A_1]P[A_3 \mid A_1A_2] \dots P[A_n \mid A_1A_2 \dots A_{n-1}]$$

Se due eventi sono *stocasticamente indipendenti*, significa che deve essere:

$$P[A|B]= P[A] \qquad e \qquad P[B|A]= P[B]$$

e quindi il teorema della moltiplicazione diventa:

$$P[AB] = P[A]P[B]$$

Si noti che se A è indipendente da B anche B deve essere indipendente da A (relazione di simmetria degli eventi indipendenti).

In generale, per n eventi si ha:

$$P\left[\prod_{i=1}^{n} A_i\right] = \prod_{i=1}^{n} P[A_i]$$

la probabilità del prodotto di eventi indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi.

Esempio

20 palline: 10 bianche, 6 rosse e 4 blu.
Qual è la probabilità che ne vengano estratte una per colore?

Se si rimettono le palline estratte gli eventi sono indipendenti altrimenti no.

Se indipendenti si ha:

$$P = \frac{10}{20} \times \frac{6}{20} \times \frac{4}{20} = 0.03$$

se dipendenti e si suppone la seguente sequenza, bianca, rossa, blu, si ha:

$$P = \frac{10}{20} \times \frac{6}{19} \times \frac{4}{18} = 0.035$$

Si noti che si otterrebbe lo stesso risultato anche con una sequenza diversa.

17 DISTRIBUZIONI E ISTOGRAMMI

Supponiamo di effettuare 10 misure della variabile x:

26, 24, 26, 28, 23, 24, 25, 24, 26, 25

ordinando i valori ottenuti:

23 24 ,24 ,24 25, 25 26, 26, 26 28

possiamo costruire la seguente tabella:

k	Valori x_k	n_k
1	$x_1 = 23$	$n_1 = 1$
2	$x_2 = 24$	$n_2 = 3$
3	$x_3 = 25$	$n_3 = 2$
4	$x_4 = 26$	$n_4 = 3$
5	$x_5 = 27$	$n_5 = 0$
6	$x_6 = 28$	$n_6 = 1$

Calcoliamo il valore medio:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{23 + 24 + 24 + ... + 28}{N} =$$

$$= \frac{23 + (3 \times 24) + (2 \times 25) + ... + 28}{N}$$

In generale si ha:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{k_{\max}} x_k n_k}{N}$$

con

$$\sum_{k=1}^{k_{\max}} n_k = N$$

Introduciamo la frazione di volte in cui compare la misura x_k:

$$F_k = \frac{n_k}{N}$$

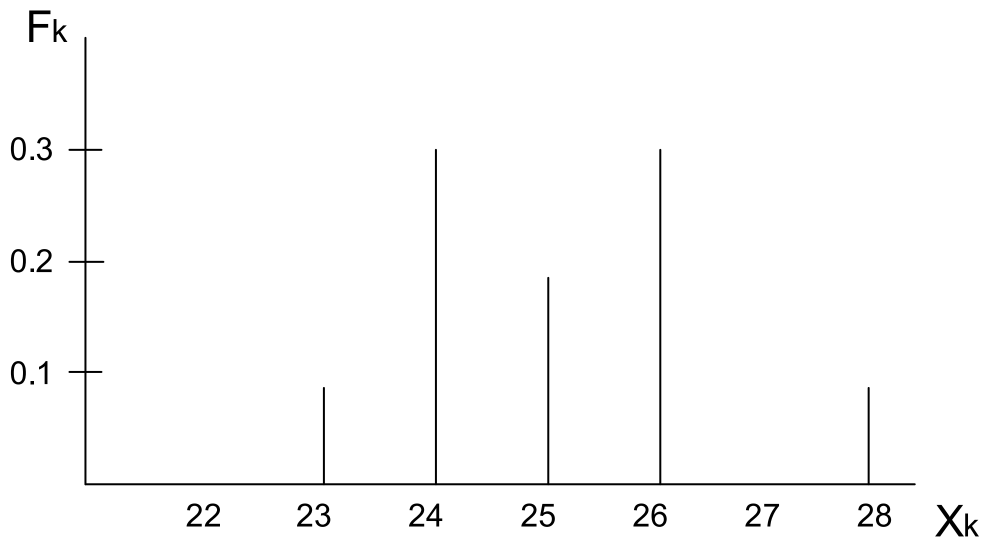
i valori di F_k specificano la *distribuzione* dei dati.

Si ha quindi:

$$\overline{x} = \sum_{k=1}^{k_{\max}} x_k F_k$$

con $\quad \sum_{k=1}^{k_{\max}} F_k = 1 \quad$ condizione di normalizzazione

Rappresentiamo le misure su un istogramma:



In generale, se si hanno misure continue, non è detto che si ripetano gli stessi valori (discreti):

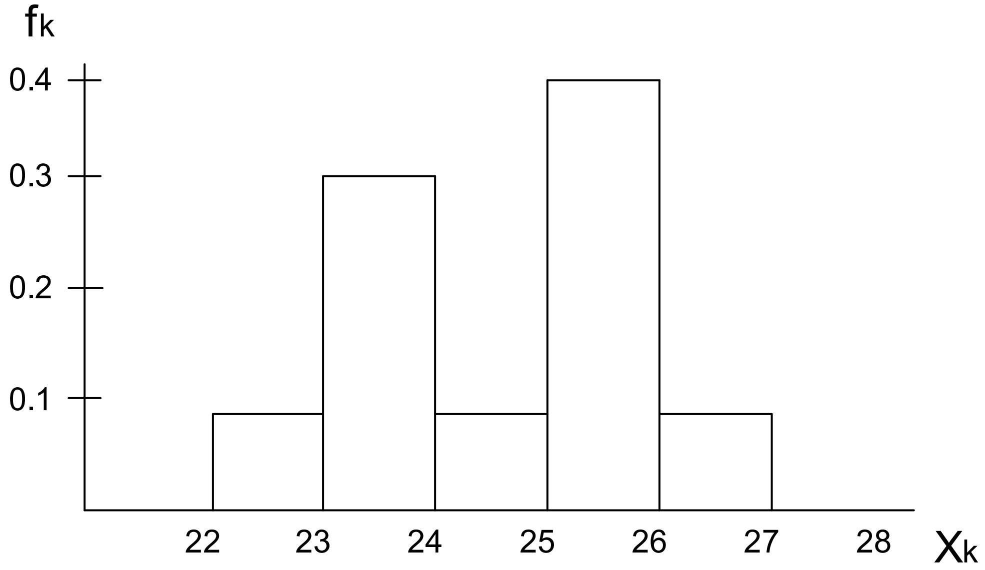
26.4, 23.9, 25.1, 24.6, 22.7, 23.8, 25.1, 23.9, 25.3, 25.4

si considerano allora degli intervalli:

Intervalli	22-23	23-24	24-25	25-26	26-27	27-28
Eventi	1	3	1	4	1	0

Chiamiamo Δ_k la larghezza del k-esimo intervallo (in generale uguale per tutti i k);

f_k l'altezza corrispondente al k-esimo intervallo è scelta in modo che il prodotto $f_k\Delta_k$ sia la frazione di misure che cadono in quell'intervallo.



per esempio:

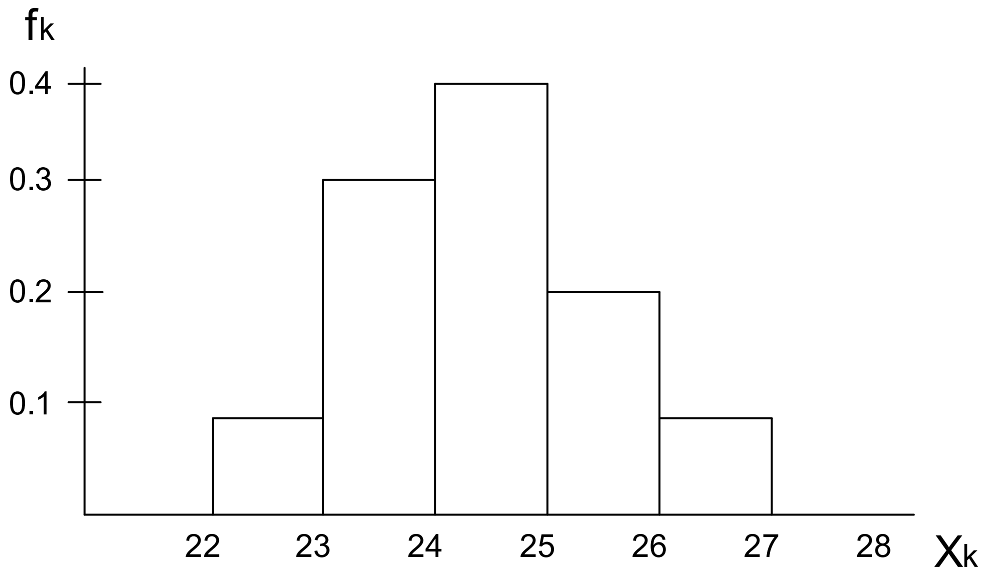
$$f_2\Delta_2 = 0.3 \text{ x } (24\text{-}23) = 0.3$$

3/10 di tutte le misure sono cadute nell'intervallo 2

($f_k\Delta_k$ corrisponde a F_k del caso precedente)

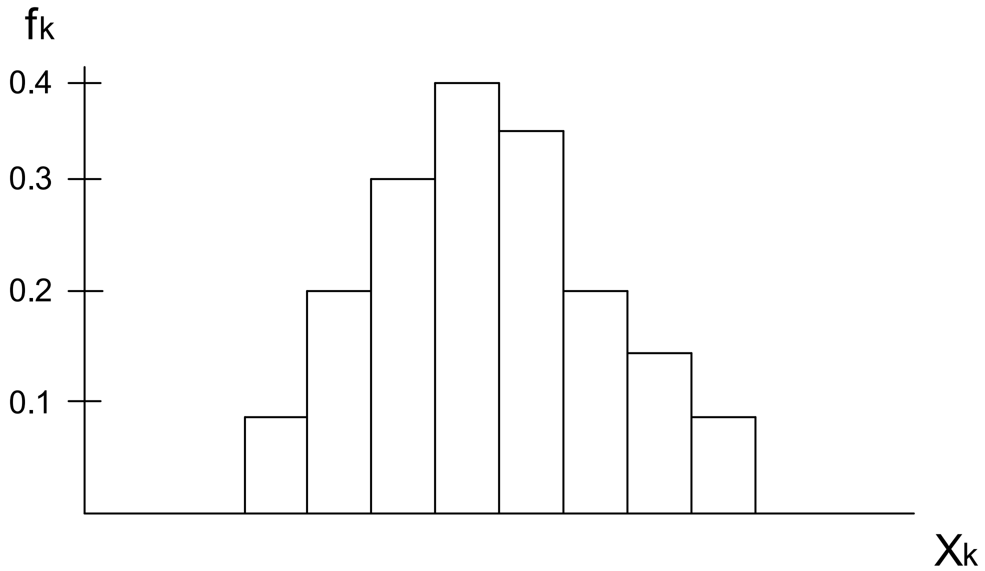
18 DISTRIBUZIONE LIMITE

Aumentando il numero di misure si ottiene un solo picco approssimativamente simmetrico:



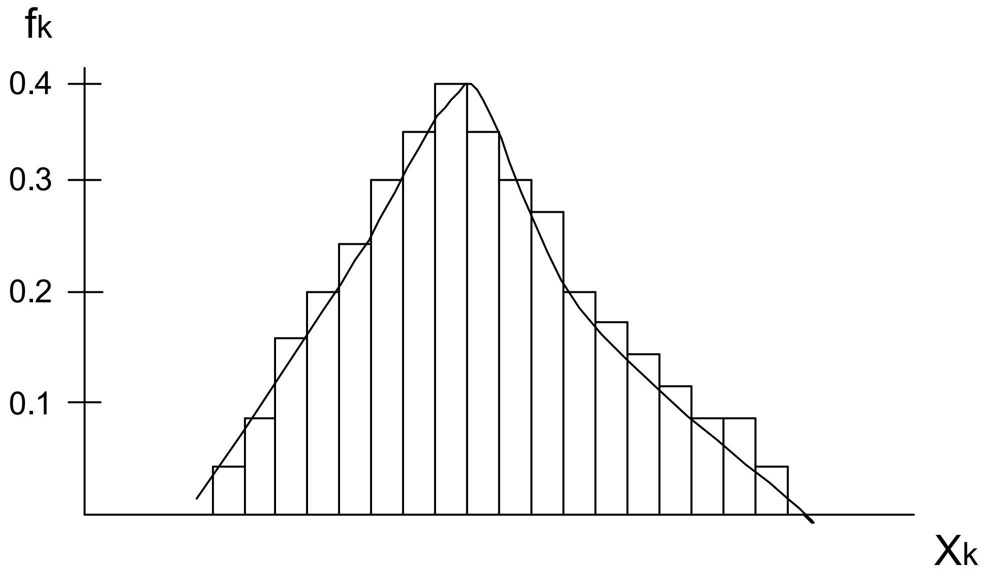
N=100 misure

Aumentando ancora il numero di misure si possono restringere gli intervalli:

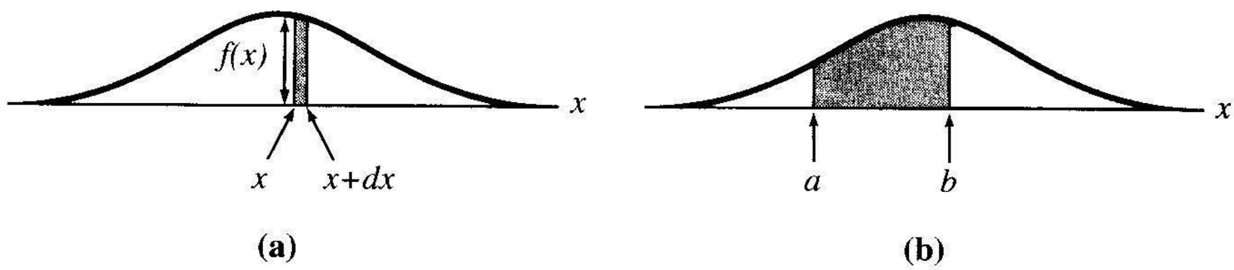


N=1000

Per $N \to \infty$, continuando a ridurre le dimensioni degli intervalli ed aumentando il loro numero, la distribuzione tende a diventare una curva continua.



Distribuzione limite.



f(x)dx $\Rightarrow$ frazione di misure che cadono nell'intervallo compreso tra x e x+dx

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$$ frazione di misure che cadono nell'intervallo compreso tra a e b

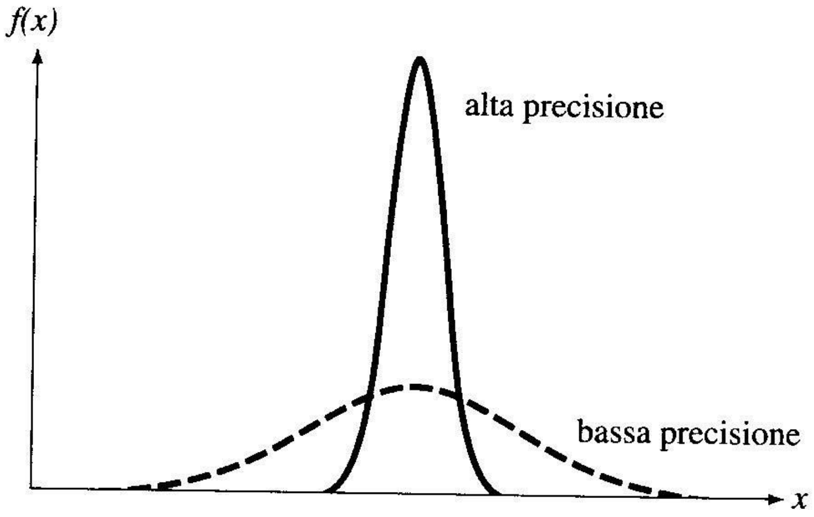
Se si sono effettuate un numero grande di misure.

f(x)dx $\Rightarrow$ rappresenta la probabilità di trovare un misura nell'intervallo compreso tra x e x+dx

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$$ rappresenta la probabilità di trovare un misura nell'intervallo compreso tra a e b

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow$$ Condizione di normalizzazione.

La forma della distribuzione è legata alla precisione della misura



Abbiamo visto che per una distribuzione discreta si ha:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{k_{\max}} x_k F_k$$

con $F_k = f_k \Delta_k \approx f(x_k)dx_k$ e quindi se $dx_k \to 0$ ($N \to \infty$) si ha:

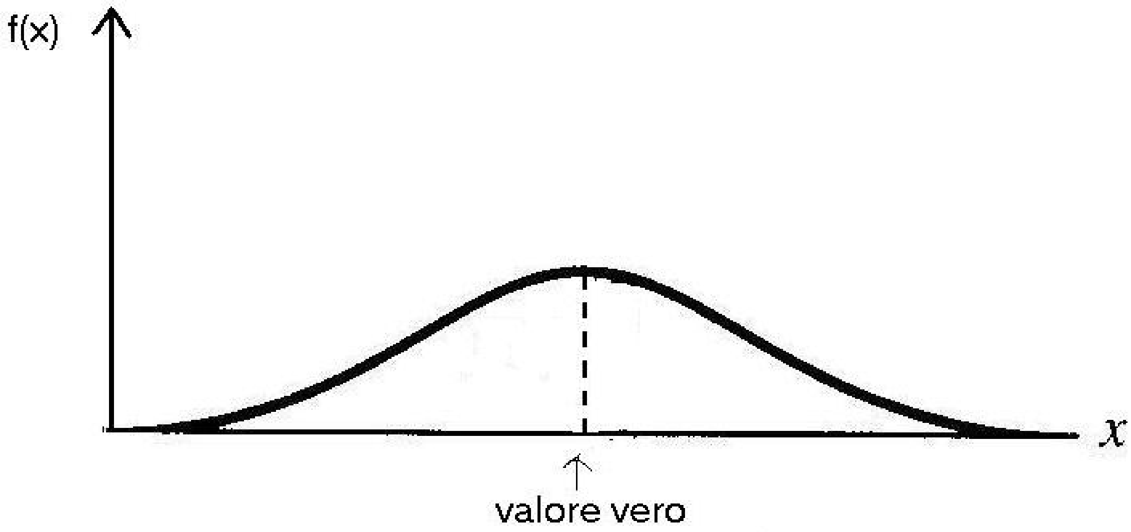
$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

essendo σ_X^2 il valor medio della quantità $\left(x - \bar{x}\right)^2$ si ha:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

19 LA DISTRIBUZIONE NORMALE

Se l'errore è casuale si distribuirà simmetricamente intorno al valore vero, la distribuzione sarà centrata sul valore vero e simmetrica:



Consideriamo *la funzione di Gauss o distribuzione normale*:

$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

dove σ è il parametro di larghezza
Se X è il valore vero si ha:

$$e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

centrata su X.

La condizione di normalizzazione è:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

ponendo:

$$f(x) = Ne^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

dove N è il fattore di normalizzazione, imponendo la condizione di normalizzazione si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ne^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

e ponendo y=x-X si ottiene:

$$= N \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

e ponendo y/σ=z e quindi dy=σdz:

$$= N\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

L'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

è un integrale noto e vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$$

e quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx = N\sigma\sqrt{2\pi}$$

da cui:

$$N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

La distribuzione normale o di Gauss è quindi:

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

Il valor medio si ottiene dall'integrale

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x G_{X,\sigma}(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ponendo y=x-X si ottiene:

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + X \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right)$$

ed essendo il primo integrale nullo perché l'integrando è una funzione dispari e il secondo uguale al fattore di normalizzazione con valore $\sigma\sqrt{2\pi}$ si ha infine:

$$\bar{x} = X$$

Questo risultato sarebbe esattamente vero solo se potessimo fare infinite misure. Se facciamo un grande numero ma finito di misure allora la nostra media risulta vicina a X.

Calcoliamo la deviazione standard per una gran numero di prove:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 G_{X,\sigma}(x) dx =$$

ponendo $\overline{x} = X$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - X)^2 e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Questo integrale puo' essere risolto e si trova:

$$\sigma_x = \sigma$$

se il numero di misure è grande.

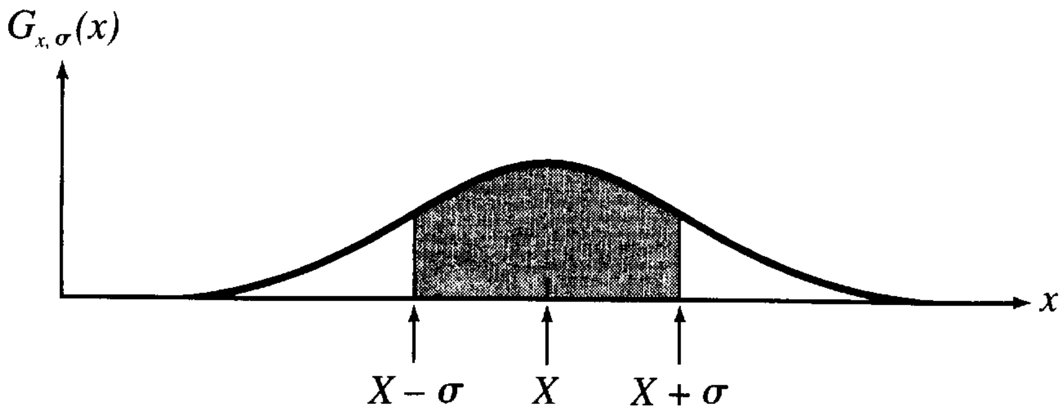
20 DEVIAZIONE STANDARD COME LIMITE DI CONFIDENZA

Calcoliamo la probabilità che una misura sia entro σ dal valore vero X:

$$P(entro\,\sigma) = \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx$$

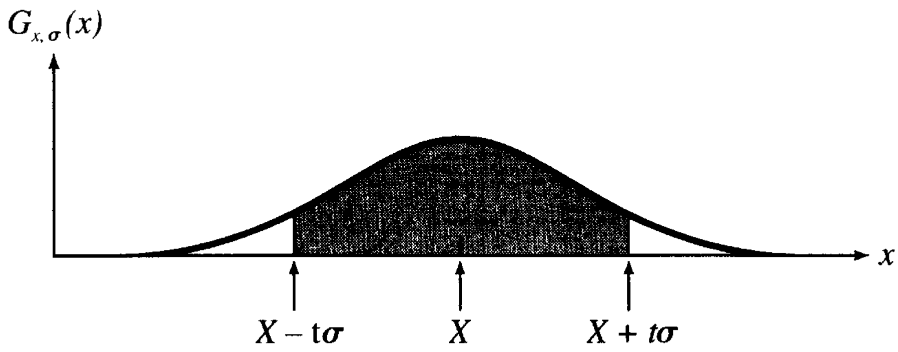
ponendo $z = \dfrac{x - X}{\sigma}$ si ha:

$$P(entro\,\sigma) = \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

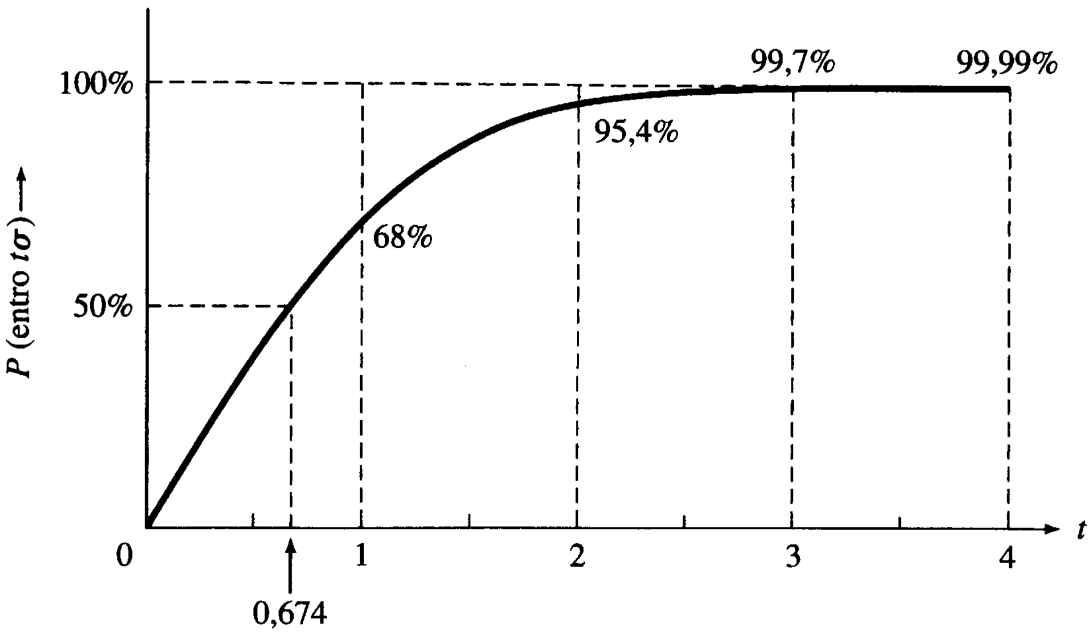


In generale possiamo calcolare la probabilità che il valore cada entro tσ dal valore vero (dove t e' un numero positivo):

$$P(entro\ t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} G_{X,\sigma}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



L'integrale ottenuto e' il cosiddetto integrale degli errori e si indica con (***erf(t)***) non può essere calcolato analiticamente ma si può valutarlo con un computer:



La probabilità che una misura cada entro una deviazione standard dal valore vero è il 68%.
Se σ è l'incertezza in tale misura, cioè scriviamo:

$x = x_{best} \pm \delta x$ e assumiamo $\delta x = \sigma$

allora abbiamo una confidenza del 68% che questo valore sia entro σ dal risultato corretto.

21 GIUSTIFICAZIONE DELLA MEDIA COME MIGLIOR STIMA

Si abbiano N misure distribuite normalmente e indipendenti:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_N$$

si ha

$$P(x_1 \leq x \leq x_1 + dx_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - X)^2}{2\sigma^2}} dx_1$$

quindi:

$$P(x_1) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_1 - X)^2}{2\sigma^2}}$$

da cui

$$P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\sum_i \frac{(x_i - X)^2}{2\sigma^2}}$$

La miglior stima di X e σ si ottiene per il valore massimo di probabilità (**Principio di massima verosimiglianza**).
Nel caso di X si ha massima probabilità per il minimo valore dell'esponente:

$$\sum_i \frac{(x_i - X)^2}{2\sigma^2}$$

Derivando questa espressione rispetto a X e ponendola uguale a zero si ottiene:

$$\sum_i (x_i - X) = 0$$

da cui

$$X = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

che rappresenta la miglior stima di X.

Analogamente derivando rispetto a σ la P e ponendo la derivata uguale a zero, si ha:

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{-N}{\sigma^{N+1}} e^{-\sum_i \frac{(x_i - X)^2}{2\sigma^2}} +$$

$$\frac{1}{\sigma^N} e^{-\sum_i \frac{(x_i - X)^2}{2\sigma^2}} \frac{2}{\sigma^3} \sum_i \frac{(x_i - X)^2}{2} =$$

$$= \frac{-1}{\sigma^{N+1}} e^{-\sum_i \frac{(x_i - X)^2}{2\sigma^2}} \left[N - \frac{1}{\sigma^2} \sum_i (x_i - X)^2 \right] = 0$$

da cui:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - X)^2}{N}}$$

che rappresenta la miglior stima della deviazione standard.

Sostituendo X con $\bar{x}$ si ottiene

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

Avendo sostituito X con $\overline{x}$ abbiamo sottostimato σ, infatti per quanto visto in precedenza il valore che rende minima la quantità

$$\sum_i (x_i - X)^2$$

è proprio $X = \overline{x}$.

Per correggere questa sottostima si sostituisce N con N-1:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$

22 GIUSTIFICAZIONE DELLA SOMMA IN QUADRATURA

Grandezza misurata sommata ad una costante numerica

$$q = x + A$$

Le misure x siano distribuite normalmente intorno al valore X con larghezza σ_x, allora la probabilità di ottenere x è

$$P(x) \propto e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma_x^{\,2}}}$$

Essendo x=q-A la probabilità di ottenere q è

$$P(q) \propto e^{-\frac{(q-A-X)^2}{2\sigma_x{}^2}} = e^{-\frac{(q-(A+X))^2}{2\sigma_x{}^2}}$$

quindi q è distribuito intorno a A+X con larghezza σ_x e quindi l'incertezza su q è la stessa di x.

Grandezza misurata moltiplicata per una costante numerica

q=Bx

si ha se x distribuite normalmente

$$P(q) \propto e^{-\frac{\left(\frac{q}{B}-X\right)^2}{2\sigma_x{}^2}} = e^{-\frac{(q-BX)^2}{2B^2\sigma_x{}^2}}$$

quindi q e distribuito normalmente intorno a BX con larghezza $B\sigma_x$

Somma di due grandezze misurate

q=x+y

Siano x e y indipendenti e distribuite normalmente attorno a X e Y con larghezze σ_x e σ_y.
Per semplicità supponiamo X=0 e Y=0

$$P(x) \propto e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$P(y) \propto e^{-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}}$$

Essendo x e y indipendenti si ha P(x,y)=P(x)P(y) e quindi:

$$P(x,y) \propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)} = e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{(x+y)^2}{\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}-\frac{z^2}{2}\right)}$$

avendo posto uguale a z^2 il secondo termine dell'espressione

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2} = \frac{(x+y)^2}{\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}+\frac{\left(\sigma_y^2 x-\sigma_x^2 y\right)^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}$$

da cui

$$P(x+y,z) \propto e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{(x+y)^2}{\left(\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2\right)}\right)} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

integrando su z si ottiene

$$P(x+y) \propto e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{(x+y)^2}{\left(\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2\right)}\right)}$$

essendo l'integrale di $e^{-\frac{z^2}{2}}$ uguale a $\sqrt{2\pi}$

Quindi i valori x+y sono distribuiti normalmente con larghezza

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Se X e Y non sono nulli si può porre:

x+y= (x-X) + (y-Y) + (X+Y)

Per quanto visto in precedenza i primi due termini, essendo centrati sullo zero con larghezze σ_x e σ_y, sono distribuiti normalmente con larghezza $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$; il terzo termine è una costante e quindi non cambia la larghezza della distribuzione ma la sposta soltanto in modo che sia centrata su X+Y.

In conclusione i valori x+y sono distribuiti normalmente intorno a X+Y con larghezza $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

Caso generale

Se x e y sono vicini a X e Y si può scrivere:

$$q(x,y) \approx q(X,Y) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)(x - X) + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)(y - Y)$$

Il primo termine è un numero fissato che sposta solo la distribuzione.

Essendo σ_x e σ_y le larghezze delle distribuzioni di (x-X) e (y-Y), le larghezze delle distribuzioni del secondo e terzo termine sono:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\sigma_x \qquad\qquad \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\sigma_y$$

Per quanto visto prima si ha

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_y\right)^2}$$

La distribuzione è centrata intorno a q(X,Y).

23 DEVIAZIONE STANDARD DELLA MEDIA

Supponiamo che le misure x siano distribuite normalmente con valore vero X e larghezza σ_X

Vogliamo conoscere l'affidabilità della media di N misure.
Immaginiamo di effettuare molte serie di misure e per ciascuna di esse valutiamo

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$

Notiamo che se le misure x sono distribuite normalmente anche i valori medi sono distribuiti normalmente. Inoltre se X è il valore vero per le misure x allora lo è anche per i valori medi:

$$\frac{X+X+......+X}{N}=X$$

Quindi i valori medi saranno normalmente distribuiti intorno a X. Per valutare l'incertezza sui valori medi applichiamo la propagazione degli errori:

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_1}\sigma_{x1}\right)^2+.......+\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_N}\sigma_{xN}\right)^2}$$

Essendo tutte le misure della stessa grandezza si ha:

$$\sigma_{x1}=...=\sigma_{xN}=\sigma_x$$

inoltre

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_1}=.......=\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_N}=\frac{1}{N}$$

e quindi

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2+.......+\left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2}$$

$$=\sqrt{N\left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Se troviamo la media di N misure una volta, allora possiamo essere confidenti al 68% che il nostro risultato giace entro una distanza $\sigma_{\bar{x}}$ dal valore vero X.

24 CONFRONTO DI UNA MISURA

Significato delle parole “ragionevolmente confidenti” che le misure siano comprese in

$$x_{best} \pm \delta x$$

Possiamo dare un valore quantitativo effettuando N misure:

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

ci attendiamo che il 68% delle misure cada in tale intervallo.

Se scegliamo

$$\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$$

allora il 95% delle misure ci aspettiamo cadano in questo intervallo.

Quindi il livello di confidenza dipende dall’intervallo scelto.

Confronto con un valore noto

Supponiamo di aver fatto misure da cui si ottiene

$$x_{best} \pm \sigma$$

σ è la deviazione standard della media se x_{best} è stato ricavato facendo la media delle misure.
Abbiamo visto che il valore è accettabile se

$$\left| x_{best} - x_{\exp} \right| < \sigma$$

dove x_{exp} è il valore noto con cui confrontiamo le nostre misure, ma non abbiamo una misura della bontà dell'accordo.

Facciamo 2 ipotesi

a) la distribuzione delle misure è normale e centrata su x_{esp}

b) σ è il parametro di larghezza della distribuzione

definiamo

$$t = \frac{\left|x_{best} - x_{\exp}\right|}{\sigma}$$

Possiamo calcolare (per esempio da una tabella), da una distribuzione normale, la probabilità di trovare un valore che differisce di t o più σ:

$$P(\text{al di fuori di } t\sigma)=1-P(\text{entro } t\sigma)$$

Se questa probabilità è grande allora la discrepanza $\left|x_{best} - x_{\exp}\right|$ è ragionevole e x_{best} accettabile.

Per esempio se t=1 allora una discrepanza di σ è altamente probabile ed è quindi non significativa. Viceversa una discrepanza di 3σ o maggiore è poco probabile.

Il limite tra accettabilità e inaccettabilità di una discrepanza dipende dal livello al disotto del quale giudichiamo che sia ragionevolmente improbabile, per esempio 5%:

$$P(\text{al di fuori di } 2\sigma) = 4.6\%$$

Allora è inaccettabile.