VUOI UNA FETTA DI TORTA?

Vito Fragnelli

Università del Piemonte Orientale

vito.fragnelli@mfn.unipmn.it

Sommario

Introduzione

Proprietà

Caso del bene divisibile

Caso dei beni indivisibili

Caso dei beni divisibili

ASSOCIAZIONE MATHESIS – Sez. ALESSANDRIA

ALESSANDRIA - 28 APRILE 2004

INTRODUZIONE

Problema

Divisione di una torta eterogenea tra giocatori che hanno gusti (preferenze) differenti.

Applicazioni

- Divisioni di eredità
- Separazioni e divorzi
- Accordi internazionali (Panama, Isole Spratly)
- Assicurazioni

Approccio procedurale

Una procedura garantisce che i contendenti possano conseguire il loro obiettivo sulla base delle sole loro conoscenze e consente di implementare in pratica il processo che conduce alla divisione.

Quando una procedura è buona?

PROPRIETA'

Dividere m beni ($m \geq 1$) tra n giocatori 1, 2, ..., n ($n \geq 2$).

Data una divisione $P = (P_1, P_2, ..., P_n)$ il giocatore i riceve la porzione P_i.

Il giocatore i attribuisce alla parte ricevuta dal giocatore j un valore percentuale $\alpha_{ij} \in [0, 1]$ tale che $\Sigma_j \, \alpha_{ij} = 1$.

- PROPORZIONALITA': Per ogni giocatore i, $\alpha_{ii} \geq 1/n$.
- ASSENZA DI INVIDIA: Non esiste un giocatore i per cui $\alpha_{ij} > \alpha_{ii}$ per qualche j.
- EQUITA': Per ogni coppia di giocatori i e j, $\alpha_{ii} = \alpha_{jj}$.
- EFFICIENZA: Non esiste una differente divisione P' a cui i giocatori attribuiscono una valutazione $\beta = (\beta_{ij})$ tale che $\beta_{ii} \geq \alpha_{ii}$ per ogni i e esiste un j tale che $\beta_{jj} > \alpha_{jj}$.

PROPRIETA' - Osservazioni

- Assenza di invidia e efficienza non richiedono le valutazioni ma sono sufficienti le preferenze:
  - *ASSENZA DI INVIDIA: Non esiste un giocatore i che preferisce P_j a P_i per qualche j.*
  - *EFFICIENZA: Non esiste una differente divisione P' tale che tutti i giocatori preferiscono (debolmente) P'_i a P_i ed esiste almeno un giocatore j che preferisce strettamente P'_j a P_j.*
- Le valutazioni percentuali possono essere sostituite dalle valutazioni assolute (è più complessa la definizione di equità).
- L'assenza di invidia implica la proporzionalità:

$$\alpha_{ii} \geq \alpha_{ij} \Rightarrow n\,\alpha_{ii} \geq 1 \Rightarrow \alpha_{ii} \geq 1/n.$$

- Nel caso di due giocatori vale anche il viceversa:

$$\alpha_{11} \geq 1/2 \Rightarrow \alpha_{12} \leq 1/2;\ \alpha_{22} \geq 1/2 \Rightarrow \alpha_{21} \leq 1/2$$

Controesempio dei tre giocatori:

$$\alpha_1 = (1/3,\ 1/2,\ 1/6);\ \alpha_2 = (1/3,\ 1/3,\ 1/3);\ \alpha_2 = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$$

PROPRIETA' - Procedura semplice

Procedura semplice per due giocatori

Uno taglia la torta in due parti e l'altro sceglie uno dei due pezzi.

Proporzionalità: SI, ognuno ottiene una parte che egli ritiene che sia almeno metà della torta.

Assenza di invidia: SI, nessuno pensa che l'altro abbia ricevuto un pezzo preferibile al suo.

Equa: NO, il primo ottiene esattamente metà, il secondo può ottenere più della metà.

Efficiente: NO, una differente divisione della torta può soddisfare maggiormente i due giocatori.

CASO DEL BENE DIVISIBILE - I

(torta rettangolare)

Dividi e scegli per n = 2 (Dubins-Spanier, 1961)

a) un arbitro muove un coltello attraverso la torta, partendo dal margine sinistro, in modo che si mantenga parallelo al bordo di partenza;

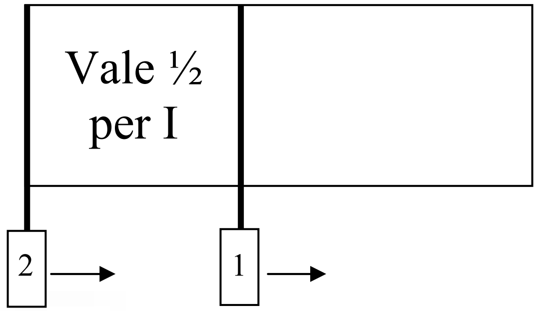
b) uno dei due giocatori chiama “taglio”;

c) il giocatore che ha chiamato il taglio riceve il pezzo a sinistra del coltello e l’altro giocatore riceve il pezzo a destra; STOP.

Proporzionale - Priva di invidia - Non equa - Non efficiente

CASO DEL BENE DIVISIBILE - II

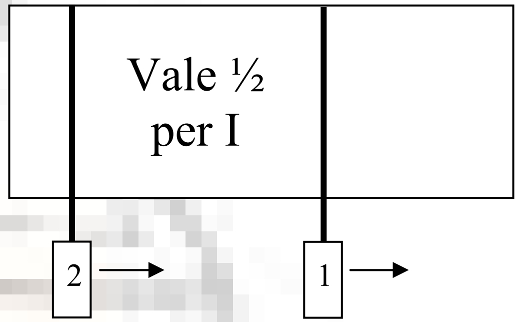
Moving Knives per n = 2 (Austin, 1982)



a) un arbitro muove il coltello 1 lentamente attraverso la torta dal bordo sinistro a quello destro;

b) un giocatore, che chiamiamo I, dice “stop”;

c) il coltello 2 viene posto sul lato sinistro della torta e I muove parallelamente entrambi i coltelli attraverso la torta, eventualmente variando la distanza, in modo che il pezzo tra i due coltelli rimanga di valore ½ nella sua stima (quando il coltello 1 arriva al bordo destro della torta, il coltello 2 si trova nella posizione in cui era il coltello 1 quando I aveva detto “stop”);



d) mentre i due coltelli si muovono, II può dire “stop” in ogni momento;

e) un arbitro (o il caso) decide chi deve scegliere una delle due parti; STOP.

Proporzionale - Priva di invidia - Equa - Non efficiente.

CASO DEL BENE DIVISIBILE - III

Dividi e scegli per n ≥ 3 (Dubins-Spanier, 1961)

a) un arbitro muove un coltello attraverso la torta, partendo dal margine sinistro, in modo che si mantenga parallelo al bordo di partenza;

b) uno dei giocatori chiama “taglio”;

c) il giocatore che ha chiamato il taglio riceve il pezzo a sinistra del coltello e viene “eliminato” dal gioco;

d) se ci sono almeno due giocatori, si torna al passo a);
altrimenti la torta viene assegnata al giocatore rimasto; STOP.

Proporzionale - Non priva di invidia - Non equa - Non efficiente.

CASO DEL BENE DIVISIBILE - IV

Last Diminisher per n ≥ 3 (Banach-Knaster, 1949 & Steinhaus, 1948)

a) un arbitro (o il caso) ordina i giocatori;

b) il primo giocatore taglia una fetta;

c) il successivo può tagliare o meno la fetta, riducendola;

d) se ci sono altri giocatori si torna al passo c);

altrimenti il giocatore che ha fatto l'ultimo taglio riceve la fetta (dopo le eventuali riduzioni) e viene "eliminato" dal gioco;

e) le rimanenti parti della torta vengono "riassemblate";

f) se ci sono almeno due giocatori, si torna al passo b);

altrimenti la torta viene assegnata al giocatore rimasto; STOP.

Proporzionale - Non priva di invidia - Non equa - Non efficiente.

CASO DEI BENI INDIVISIBILI - I

Offerta segreta (Knaster-Steinhaus, 1948)

a) ogni giocatore i ($i = 1, ..., n$) assegna a ciascun bene b_k ($k = 1, ..., m$) il valore v_{ik}, fissando una quota iniziale per lui equa $E_i = 1/n\ \Sigma_k\ v_{ik}$;

b) il bene b_k viene assegnato al giocatore i(k) tale che $i(k) = \text{argmax}\ \{v_{ik},\ i = 1, ..., n\}$ e sia $v_k = v_{i(k)k}$;

c) sia G_i la somma dei valori che il giocatore i assegna ai beni da lui ricevuti (risulta $\Sigma_i\ G_i = \Sigma_k\ v_k$);

d) sia $s = \Sigma_i\ (G_i - E_i)$ il surplus;

e) ogni giocatore deve ricevere il valore $V_i = E_i + s/n$;

f) per ogni giocatore i, se la quantità monetaria $V_i - G_i$ è positiva il giocatore riceve questa quantità oltre ai beni già ricevuti;

altrimenti il giocatore i deve dare la quantità monetaria $G_i - V_i$; STOP.

CASO DEI BENI INDIVISIBILI - II

La procedura è proporzionale poichè:

$$s = \Sigma_i G_i - \Sigma_i E_i = \Sigma_k v_k - \Sigma_k (1/n \, \Sigma_i v_{ik}) \geq \Sigma_k (v_k - 1/n \, \Sigma_i v_k) = 0$$

cioè il giocatore i ritiene di aver ricevuto almeno un ennesimo della sua valutazione complessiva dei beni.

Dal passo e) si ottiene che la procedura è equa se e solo se $E_i = E$ per ogni giocatore i.

CASO DEI BENI INDIVISIBILI - III

Osservazione di Fink (1994)

Il surplus s si può scrivere come:

$$s = \Sigma_i (G_i - E_i) = \Sigma_i G_i - \Sigma_i E_i = \Sigma_k v_k - \Sigma_i (1/n\ \Sigma_k v_{ik}) =$$

$$= \Sigma_k (v_k - 1/n\ \Sigma_i v_{ik}) = \Sigma_k s_k$$

dove $s_k = v_k - 1/n\ \Sigma_i v_{ik}$ è il surplus del bene b_k, che può essere riscritto come:

$$s_k = v_k - v^*_k$$

dove $v^*_k = 1/n\ \Sigma_i v_{ik}$ è il valor medio attribuito dai giocatori al bene b_k.

Ma il surplus del bene b_k, può essere riscritto anche come:

$$s_k = v_k - 1/n\ v_{i(k)k} - 1/n\ \Sigma_{i \neq i(k)} v_{ik} = (n-1)/n\ v_k - 1/n\ \Sigma_{i \neq i(k)} v_{ik}$$

CASO DEI BENI INDIVISIBILI - IV

La procedura di Knaster si può ottenere applicando ad ogni singolo bene b_k la seguente procedura:

a) ogni giocatore i valuta il bene b_k;

b) il bene b_k viene assegnato al giocatore i(k) che ha dato la massima valutazione v_k e che paga la quantità monetaria $(n-1)/n\ v_k$;

c) a ciascuno degli altri giocatori $i \neq i(k)$ viene data la quantità monetaria $1/n\ v_{ik}$;

d) la quantità monetaria rimanente s_k viene divisa in parti uguali tra tutti i giocatori; STOP.

CASO DEI BENI INDIVISIBILI - V

La condizione $E_i = E$ per ogni giocatore i è sufficiente affinchè la procedura sia priva di invidia.

Infatti si ha:

Per ogni bene b_k si ha (trascurando il surplus s_k):

Dal punto di vista di i(k): i(k) riceve: $v_k - (n-1)/n\ v_k = 1/n\ v_k$

gli altri i ricevono: $1/n\ v_{ik} \leq 1/n\ v_k$

Dal punto di vista di $i \neq i(k)$: i(k) riceve: $v_{ik} - (n-1)/n\ v_k \leq 1/n\ v_{ik}$

i riceve: $1/n\ v_{ik}$

gli altri j ricevono: $1/n\ v_{jk}$, che può essere >, =, < $1/n\ v_{ik}$

Globalmente si ha (trascurando il surplus s):

Dal punto di vista di i: i riceve:

$$1/n\ (\Sigma_{i(k)=i}\ v_k + \Sigma_{i(k)\neq i}\ v_{ik}) = 1/n\ (\Sigma_{i(k)=i}\ v_{ik} + \Sigma_{i(k)\neq i}\ v_{ik}) = E_i = E$$

gli altri j ricevono:

$$\Sigma_{i(k)=j}\ [v_{ik} - (n-1)/n\ v_{jk}] + 1/n\ \Sigma_{i(k)\neq j}\ v_{jk} \leq 1/n\ (\Sigma_{i(k)=j}\ v_{jk} + \Sigma_{i(k)\neq j}\ v_{jk}) = E_j = E$$

CASO DEI BENI INDIVISIBILI - VI

Esempio

Si devono dividere 4 oggetti (A, B, C, D) tra 3 giocatori (I, II, III).

	Giocatori		
	I	II	III
Valutazione di A	10000	4000	7000
Valutazione di B	2000	1000	4000
Valutazione di C	500	1500	2000
Valutazione di D	800	2000	1000
Valutazione totale	13300	8500	14000
Oggetti ricevuti	A	D	B, C
Valore ricevuto (G_i)	10000	2000	6000
Equa divisione iniziale (E_i)	4433	2833	4667
Differenza	5567	-833	1333
Divisione del surplus (s/3)	2022	2022	2022
Adattamento equa div. (E_i + s/n)	6455	4855	6689
Situazione finale	A-3545	D+2855	B,C+689
Valori monetari finali	6455	4855	6689
Percentuali	49%	57%	48%

CASO DEI BENI INDIVISIBILI - VII

In questo caso la divisione è priva di invidia:

- I ha ricevuto 6455 e pensa che II abbia ricevuto 800 + 2855 = 3655 e III 2500 + 689 = 3189;
- II ha ricevuto 4855 e pensa che I abbia ricevuto 4000 - 3545 = 455 e III 2500 + 689 = 3189;
- III ha ricevuto 6689 e pensa che I abbia ricevuto 7000 - 3545 = 3455 e II 1000 + 689 = 1689.

La procedura è proporzionale ma non è priva di invidia.

Modificando le valutazioni del giocatore II per gli oggetti A e B come 2000 e 3000, la divisione non è priva di invidia.

La procedura è sempre priva di invidia in un gioco a 2 persone, essendo proporzionale.

CASO DEI BENI INDIVISIBILI - VIII

Adjusted Knaster (Raith, 1999)

Variazione equa che modifica così il passo e):

e’) ogni giocatore deve ricevere il valore $V_i = E_i + s\ (E_i/\Sigma_i\ E_i)$;

per cui risulta $V_i/E_i = V_j/E_j$ per ogni coppia di giocatori i e j.

CASO DEI BENI DIVISIBILI - I

Sono dati m ($m \geq 2$) oggetti divisibili e omogenei; due giocatori I e II indicano quanto valutano i diversi oggetti distribuendo 100 punti sui beni.

Per ogni oggetto si calcola il rapporto tra la valutazione del giocatore II e del giocatore I e si riordinano gli oggetti per valori non decrescenti del rapporto (nei casi di uguaglianza l'ordine è deciso dal caso).

Gli oggetti riordinati si indicano con $b_1, \ldots, b_m$, le valutazioni di I con $x_1, \ldots, x_m$ e quelle di II con $y_1, \ldots, y_m$ dove $\Sigma_h x_h = \Sigma_h y_h = 100$.

CASO DEI BENI DIVISIBILI - II

Esempio

Dividere sei beni tra i giocatori I e II:

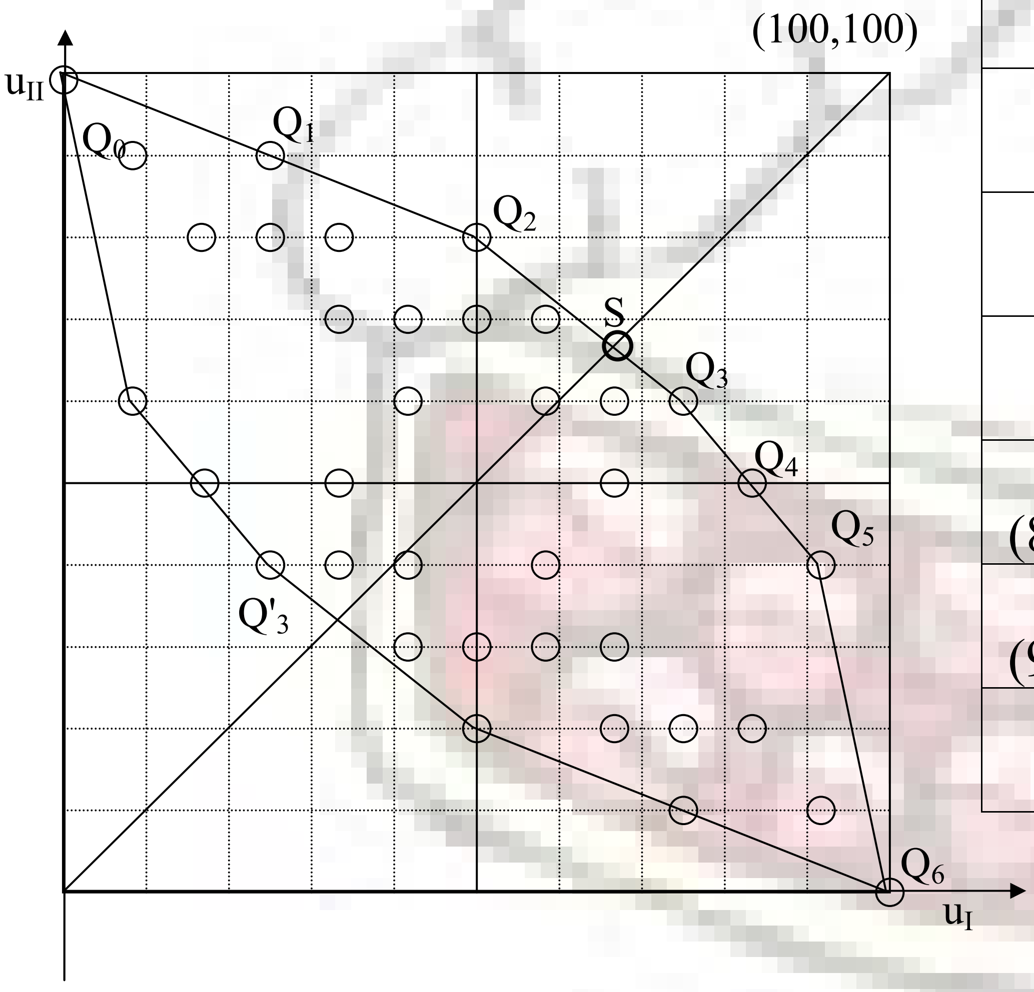
Oggetti	A	B	C	D	E	F	TOTALE
Valutazioni di I	25	8.33	8.33	8.33	25	25	100
Valutazioni di II	10	10	10	40	10	20	100

Riordinando i beni secondo i rapporti otteniamo:

Oggetti	b_1 (A)	b_2 (E)	b_3 (F)	b_4 (B)	b_5 (C)	b_6 (D)	TOTALE
Valutazioni di I	25	25	25	8.33	8.33	8.33	100
Valutazioni di II	10	10	20	10	10	40	100

I da la valutazione $50 + z_x$ a una parte P_1 della totalità dei beni e II da la valutazione $50 + z_y$ alla parte rimanente P_2; allora I da a P_2 la valutazione $50 - z_x$ e II da a P_1 la valutazione $50 - z_y$. Sono possibili le coppie di payoff $(50 + z_x, 50 + z_y)$ e $(50 - z_x, 50 - z_y)$, quindi l'insieme ***F*** delle coppie dei payoff è simmetrico rispetto al punto (50, 50).

CASO DEI BENI DIVISIBILI - III



Allocazioni	Oggetti dati a I	Oggetti dati a II
Q_0 (0, 100)		$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$
Q_1 (25, 90)	b_1	b_2, b_3, b_4, b_5, b_6
Q_2 (50, 80)	b_1, b_2	b_3, b_4, b_5, b_6
Q_3 (75, 60)	b_1, b_2, b_3	b_4, b_5, b_6
Q_4 (83.33, 50)	b_1, b_2, b_3, b_4	b_5, b_6
Q_5 (91.66, 40)	b_1, b_2, b_3, b_4, b_5	b_6
Q_6 (100, 0)	$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$	

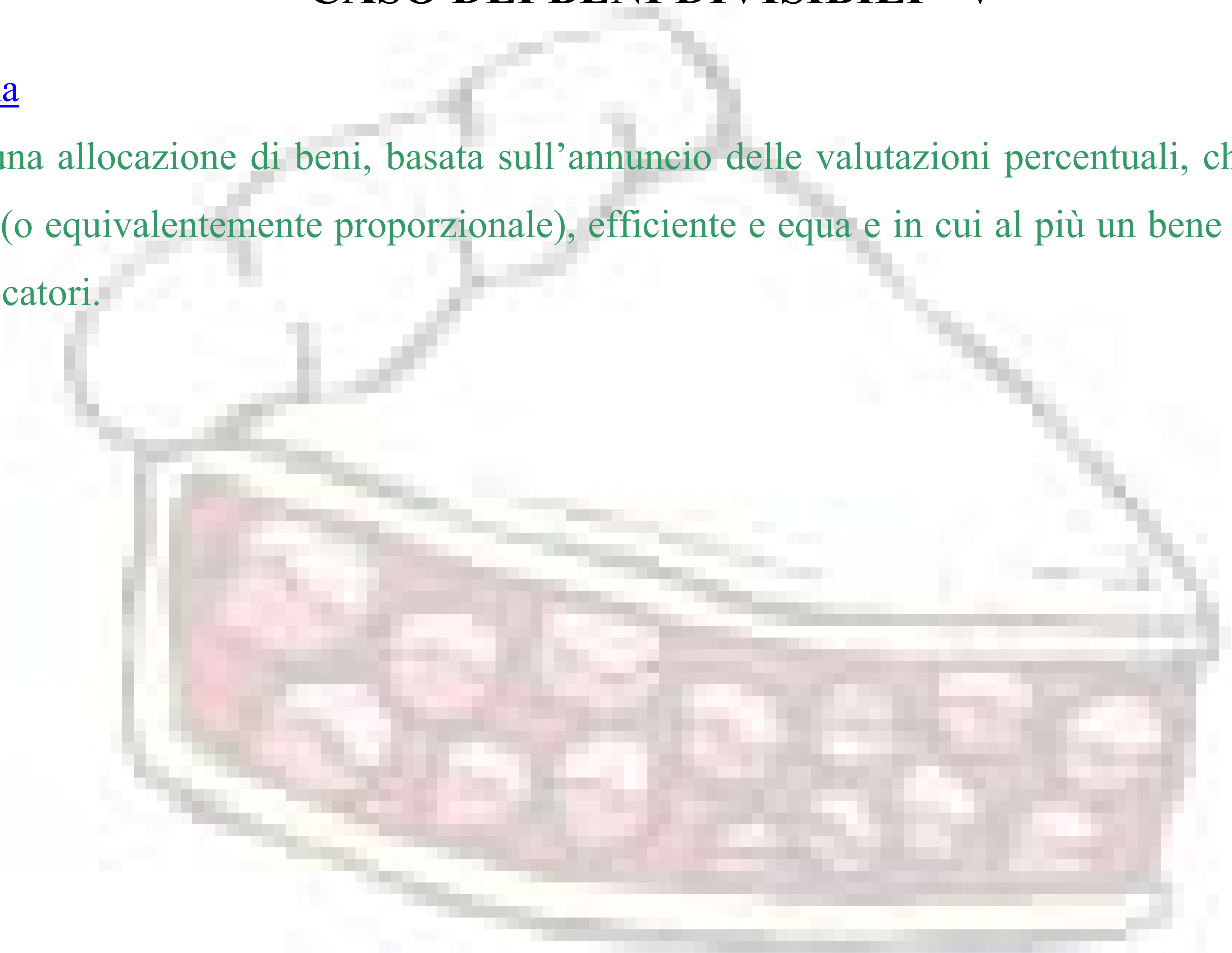
CASO DEI BENI DIVISIBILI - IV

- Per l'ordinamento dei beni la spezzata Q_0, Q_1, ..., Q_6 definisce la frontiera paretiana di ***F*** (allocazioni efficienti).
- I vertici della spezzata si ottengono "trasferendo" uno ad uno, secondo l'ordine precedente, ogni bene da II a I, mentre i punti interni al segmento $Q_{k-1}Q_k$ corrispondono al "trasferimento" di una frazione del bene b_k.
- La pendenza del segmento $Q_{k-1}Q_k$ è data dal rapporto y_k/x_k.
- Il punto (50, 50) divide ***F*** in quattro parti di cui la parte nord-est corrisponde alle allocazioni prive di invidia (in quanto proporzionali).
- I punti che stanno sulla bisettrice corrispondono a quelle eque.
- Il punto S rappresenta l'unica soluzione efficiente, equa, priva di invidia e proporzionale.
- Il segmento che unisce il punto (50, 50) col punto S corrisponde alle allocazioni eque, prive di invidia e proporzionali.

CASO DEI BENI DIVISIBILI - V

Teorema

Esiste una allocazione di beni, basata sull'annuncio delle valutazioni percentuali, che è priva di invidia (o equivalentemente proporzionale), efficiente e equa e in cui al più un bene viene diviso tra i giocatori.



CASO DEI BENI DIVISIBILI - VI

Adjusted Winner (AW) (Brams-Taylor, 1996)

a) ciascun giocatore assegna una valutazione percentuale agli oggetti;

b) ciascun giocatore riceve gli oggetti a cui da una valutazione strettamente maggiore dell'altro;

c) ogni oggetto che riceva la stessa valutazione dai due giocatori viene assegnato a sorte;

d) se per entrambi i giocatori la somma dei punti dei beni ricevuti è uguale STOP;
altrimenti sia I il giocatore che ha ricevuto un punteggio maggiore;

e) si riordinano gli oggetti come detto nell'introduzione; siano $b_1, \ldots, b_r$ i beni ricevuti da I, $X = \Sigma_{h=1,r}\, x_h$; siano $b_{r+1}, \ldots, b_m$ i beni ricevuti da II, $Y = \Sigma_{h=r+1,m}\, y_h$; porre $k = r$;

f) se $X - x_k \geq Y + y_k$ l'oggetto b_k viene "trasferito" al giocatore II; porre $X = X - x_k$, $Y = Y + y_k$ e $k = k-1$ e andare al passo g);
altrimenti si determina la frazione α dell'oggetto b_k tale che $X - \alpha x_k = Y + \alpha y_k$; STOP;

g) se $X = Y$ STOP;
altrimenti tornare al passo f);

CASO DEI BENI DIVISIBILI - VII

Proportional Allocation (PA) (Brams-Taylor, 1996)

a) I e II assegnano agli oggetti $b_1, \ldots, b_m$ le valutazioni percentuali $s_1, \ldots, s_m$ e $t_1, \ldots, t_m$ rispettivamente, dove $\Sigma_k\, s_k = \Sigma_k\, t_k = 100$ e $s_h + t_h > 0$;

b) per ogni h si assegna al giocatore I la frazione $s_h/(s_h + t_h)$ dell'oggetto b_h e al giocatore II la frazione $t_h/(s_h + t_h)$;

Teorema

La procedura PA produce una allocazione dei beni priva di invidia (o equivalentemente proporzionale) e equa.

Teorema

La procedura PA è efficiente se e solo se non esistono due beni b_k e b_h a cui i due giocatori danno valutazioni non nulle tali che $s_k/s_h < t_k/t_h$.