# INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI GIOCHI PER PROBLEMI DI DECISIONE

Vito Fragnelli

Dipartimento di Scienze e Tecnologie Avanzate
Università del Piemonte Orientale

*vito.fragnelli@mfn.unipmn.it*

Teoria dei Giochi

Situazioni in cui il risultato dipende dalle scelte fatte da più persone (giocatori), che operano perseguendo obiettivi che possono risultare:

- comuni, ma non identici
- differenti
- contrastanti

Possono essere presenti anche aspetti aleatori

Deriva da "*Theory of Games and Economic Behavior*" di Von Neumann e Morgenstern (1944)

| | |
|---|---|
| <u>Giochi non cooperativi</u> | Non sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori |
| <u>Giochi cooperativi</u> | Sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori<br>▪ giochi NTU (a utilità non trasferibile o senza pagamenti laterali)<br>▪ giochi TU (a utilità trasferibile o con pagamenti laterali) |

# GIOCHI NON COOPERATIVI

I giocatori non possono stipulare accordi vincolanti (anche normativamente), indipendentemente dal fatto che i loro obiettivi siano:

- contrastanti (conflitto)
- comuni (interesse ad accordarsi)

Soluzione

Quale strategia è consigliabile per ciascun giocatore

dove la strategia è un "piano di azione" che permette di individuare, in ogni situazione del gioco, una "azione" tra le tante possibili

Equilibrio di Nash

esiste un insieme di strategie, una per ciascun giocatore, rispetto al quale nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico a cambiare

$$\pi_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq \pi_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n^*) \quad \forall\ \sigma_i \in \sum_i, \forall\ i$$

$\sum_i$ è l'insieme delle strategie del giocatore $i$

$\pi_i$ è il payoff (vincita) del giocatore $i$

Limiti dell'equilibrio di Nash

- inefficienza
- molteplicità

Raffinamenti

- equilibrio perfetto nei sottogiochi
- equilibrio correlato

# GIOCHI COOPERATIVI

Se i giocatori perseguono un fine comune, almeno per la durata del gioco, alcuni di essi possono tendere ad associarsi per migliorare il proprio payoff

Garanzia = accordi vincolanti

## Giochi cooperativi senza pagamenti laterali

- Problema di contrattazione (Nash, Kalai - Smorodinsky, ecc.)
- giochi di mercato = economia di puro scambio (Shubik)

Soluzione

Strategia concertata con altri giocatori, eventualmente tutti

## Giochi cooperativi a pagamenti laterali

Trasferimento dell'utilità (deve esistere un mezzo, denaro o altro)

Soluzione

Suddivisione della vincita = ruolo svolto da ciascun giocatore

Imputazione, o ripartizione del valore del gioco:

vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tale che:

$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ condizione di efficienza

ripartire tutto il valore del gioco

$x_i \geq v(i)$ $i = 1, \ldots n$ condizione di razionalità individuale

assegnare ad ogni giocatore almeno quanto può ottenere da solo

$v(N)$ = payoff che possono ottenere i giocatori cooperando

$v(i)$ = payoff che può ottenere i giocatore $i$ da solo

## Soluzioni insiemistiche

Nucleo

$x(S) \geq v(S) \quad S \subset N$ condizione di razionalità della coalizione

$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$

$v(S)$ = payoff che possono ottenere i giocatori di $S$, senza la collaborazione degli altri giocatori

E' la soluzione più importante per numerose classi di giochi

Una imputazione che non sta nel nucleo è particolarmente instabile (defezione)

Il nucleo può essere vuoto:

**Esempio - Maggioranza semplice**

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(\emptyset) = 0$; $v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(N) = 1$

Altri concetti di soluzioni

- Insiemi stabili (von Neumann e Morgenstern)
- Bargaining set (Aumann e Maschler)
- Kernel (Davis e Maschler)

**Soluzioni puntuali**

Propongono una e una sola ripartizione delle vincita

Indici di potere, legati al contributo (potere) dei singoli giocatori all'interno delle coalizioni

Valore di Shapley

Si basa sul valore che ogni giocatore è in grado di aggiungere alle possibili coalizioni (contributo marginale medio del giocatore *i* rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori):

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi}\left[v\left(C^{i,\pi} \cup \{ i \}\right) - v\left(C^{i,\pi}\right)\right]$$

$C^{i,\pi}$ = giocatori che precedono $i$ nella permutazione $\pi$

Il valore di Shapley per un gioco cooperativo esiste sempre ed è unico

Nucleolo

Data una coalizione $S$ e una possibile ripartizione del valore del gioco $x$ si dice rimpianto o eccesso di $S$ rispetto ad $x$:

$$e(S, x) = v(S) - x(S)$$

Il nucleolo è quella ripartizione $x$ per cui è minimo il massimo dei rimpianti delle coalizioni

Se ci sono più soluzioni la scelta è fatta ordinando lessicograficamente gli eccessi

Il nucleolo esiste sempre ed è un elemento del nucleo se questo è non vuoto:

- soluzione per i giochi a nucleo vuoto
- soluzione del problema di "scegliere" un elemento del nucleo