TEORIA DEI GIOCHI

Vito Fragnelli

Università del Piemonte Orientale
Dipartimento di Scienze e Tecnologie Avanzate
vito.fragnelli@mfn.unipmn.it

Università di Siena

Dottorato in Ingegneria dell'Informazione

Maggio 2002

CAPITOLO I

UTILITA' E RAPPRESENTAZIONE DI UN GIOCO

I.1 INTRODUZIONE

La Ricerca Operativa classica suppone che le decisioni relative ad un problema siano prese da un unico decisore che può operare in totale autonomia e con completa libertà.

La Teoria dei Giochi tratta le situazioni in cui il risultato dipende dalle scelte fatte da più persone, dette giocatori, che operano perseguendo obiettivi che possono risultare comuni, ma non identici, differenti ed eventualmente contrastanti; possono essere presenti anche aspetti aleatori. Il nome deriva da "Theory of Games and Economic Behavior" di Von Neumann e Morgenstern (1944).

Esempio 1 - Dilemma del prigioniero

I \ II	C	NC
C	-5, -5	-1, -6
NC	-6, -1	-2, -2

E' uno dei problemi più noti della Teoria dei Giochi; è stato introdotto nel 1950 da Dresher e Flood; la "storiellina" seguente è dovuta a Tucker. Due individui I e II sono stati arrestati per lo stesso reato e vengono interrogati separatamente dal giudice; ognuno può scegliere indipendentemente dall'altro di confessare (C) o non confessare (NC). Se entrambi non confessano, vengono condannati per reati minori a due anni ciascuno, se entrambi confessano vengono condannati a cinque anni ciascuno, se uno confessa e l'altro no quello che confessa ha uno sconto di pena e viene condannato a un anno, mentre l'altro ha un'aggravante e viene condannato a sei anni. Le pene sono riportate nella tabella come coppia (I, II).

Ragionevolmente I sceglie C poichè consegue una condanna minore qualunque sia la scelta di II (-5 > -6 ; -1 > -2) e analogamente II sceglie C. La decisione attesa è quindi (C, C) a cui corrisponde una condanna a 5 anni per ciascuno (equilibrio in strategie dominanti), mentre per entrambi sarebbe più vantaggiosa la scelta (NC, NC) con 2 anni per ciascuno. ◊

Esempio 2 - Battaglia dei sessi

I \ II	T	P
T	2, 1	0, 0
P	0, 0	1, 2

Due fidanzati devono scegliere tra andare al teatro (T) o alla partita (P). I preferisce il teatro mentre II preferisce la partita, ma entrambi non hanno interesse a restare da soli, come riportato nella tabella a fianco. In questo caso non esiste una strategia dominante per nessun giocatore (ad esempio per I scegliendo T si ha che 2 > 0 ma 0 < 1). ◊

Esempio 3 - Puro coordinamento

I \ II	A	B
A	1, 1	0, 0
B	0, 0	1, 1

E' una semplice, ma significativa, variante in cui entrambi i

giocatori hanno le stesse preferenze. ◊

Si possono fare alcune considerazioni.
Nell'esempio 2 (e soprattutto nel 3) una comunicazione per conoscere la decisione dell'altro giocatore, o un accordo al 50 per cento, o una strategia correlata possono risolvere facilmente il problema. Nell'esempio 1 invece questo non succede in quanto la possibilità di comunicare renderebbe probabile un accordo per la strategia NC, ma al momento della decisione I risceglierebbe C poichè -1 > -2 e per lo stesso motivo anche II risceglierebbe C.

Secondo la classificazione di Harsanyi (1966) si distinguono due classi di giochi:
<u>Giochi non cooperativi</u> Non sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori.
<u>Giochi cooperativi</u> Sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori.

<u>Osservazioni</u>
- Attualmente si preferisce assumere, più restrittivamente, che in un gioco non cooperativo i giocatori non possano nemmeno comunicare in quanto ciò potrebbe alterare il risultato.
- I giochi cooperativi sono divisi in due sottoclassi: giochi a utilità non trasferibile (NTU) o senza pagamenti laterali, e giochi a utilità trasferibile (TU) o a pagamenti laterali, che costituiscono un caso particolare dei giochi NTU.

<u>I.2 TEORIA DELL'UTILITÀ</u>

I giocatori cercano di massimizzare il loro risultato, cioè la loro utilità, però è necessario definire quale risultato si vuole perseguire poichè devono essere presi in considerazione valori differenti: economico, sentimentale, sociale, ecc. Ad esempio se un decisore deve scegliere se donare una somma di denaro senza ricevere nulla in cambio, considerando solo i valori monetari il risultato sarebbe sempre non donare. Pertanto è necessario precisare per ciascun giocatore quale tra due eventi dati è più "utile" in un senso più ampio.

<u>Definizioni</u>
Dati due eventi A e B si dice che A è preferibile a B per un giocatore se egli cerca di conseguire A invece di B e si indica con A p B.
Dati due eventi A e B si dice che A è indifferente a B per un giocatore se nessuno è preferibile all'altro e si indica con A i B.

<u>Assiomi</u>
1) Dati due eventi A e B allora A p B oppure B p A oppure A i B
2) A i A

3) A i B $\Rightarrow$ B i A

4) A i B, B i C $\Rightarrow$ A i C

5) A p B, B p C $\Rightarrow$ A p C

6) A p B, B i C $\Rightarrow$ A p C

7) A i B, B p C $\Rightarrow$ A p C

La relazione di preferenza è solo qualitativa e non quantitativa, per cui non si adatta a definire quanto si può ottenere in più a fronte di un rischio maggiore. Inoltre qualunque bene non soddisfa alcuna ipotesi di linearità, tranne al più in brevi intervalli.

Gli eventi possono essere certi oppure incerti secondo una probabilità nota; tale situazione viene rappresentata tramite il concetto di lotteria.

<u>Definizione</u>

Dati due eventi A e B si chiama lotteria l'evento $rA + (1 - r)B$, $0 \leq r \leq 1$, in cui A si verifica con probabilità r e l'evento B con probabilità $1 - r$.

<u>Osservazione</u>

- La lotteria non è una combinazione lineare di eventi, in quanto il risultato può essere solo A o B e non qualcosa di intermedio; la lotteria permette di valutare l'evento "esce A o esce B".

<u>Proprietà</u>

- A i C $\Rightarrow$ $\{rA + (1 - r)B\}$ i $\{rC + (1 - r)B\}$ $\quad \forall\, r, \forall\, B$
- A p C $\Rightarrow$ $\{rA + (1 - r)B\}$ p $\{rC + (1 - r)B\}$ $\quad r > 0, \forall\, B$
- A p C p B $\Rightarrow$ $\exists!\, r, 0 < r < 1$ t.c. $\{rA + (1 - r)B\}$ i C

<u>Osservazione</u>

- Se un decisore soddisfa gli assiomi 1) - 7) e le proprietà precedenti viene considerato "razionale".

Esempio - Preferenze

Siano date le lotterie:

$E_1 = \{0, 100 \text{ con } \mathbf{P}(0) = 1/2, \mathbf{P}(100) = 1/2\}$

$E_2 = \{40, 60 \text{ con } \mathbf{P}(40) = 3/4, \mathbf{P}(60) = 1/4\}$

$E_3 = \{0, 100, 40, 60 \text{ con } \mathbf{P}(0) = 1/2, \mathbf{P}(100) = 1/2, \mathbf{P}(40) = 3/4, \mathbf{P}(60) = 1/4\}$

Il guadagno atteso di E_1 è 50, quello di E_2 è 45 e quello di E_3 è 47.5, ma questo non impone una preferenza tra i tre eventi, nel senso che E_1 permette guadagni maggiori, E_2 garantisce rischi minori ed E_3 è intermedio; le uniche relazioni da soddisfare sono:

E_1 i $E_2 \Rightarrow E_1$ i E_3, E_2 i E_3

oppure

E_1 p $E_2 \Rightarrow E_1$ p E_3, E_3 p E_2

oppure

E_2 p $E_1 \Rightarrow E_2$ p E_3, E_3 p E_1 ◊

Una relazione di preferenza può essere rappresentata con una funzione di utilità u : **E** → **R**, dove **E** è lo spazio degli eventi, per cui per ogni coppia di eventi A e B:

A p B $\Leftrightarrow$ u(A) > u(B)

$u(rA + (1 - r)B) = ru(A) + (1 - r)u(B) \qquad 0 \le r \le 1$

La funzione di utilità permette di quantificare le preferenze, riferendole ad un numero reale; inoltre la funzione u è unica a meno di trasformazioni affini, cioè u è una funzione di utilità se e solo se lo è anche:

$\hat{u} = \alpha u + \beta$ con $\alpha > 0$.

Esempio - Funzioni di utilità

Il dilemma del prigioniero può essere rappresentato con una qualunque delle seguenti matrici:

I \ II	C	NC
C	-5, -5	-1, -6
NC	-6, -1	-2, -2

I \ II	C	NC
C	1, 1	5, 0
NC	0, 5	4, 4

I \ II	C	NC
C	-4, 0	0, -10
NC	-5, 40	-1, 30

Le tre matrici sono legate dalle relazioni affini:

$u'_I = u_I + 6 \qquad u''_I = u_I + 1$

$u'_{II} = u_{II} + 6 \qquad u''_{II} = 10u_{II} + 50$ ◊

I.3 RAPPRESENTAZIONE DI UN GIOCO

Un gioco può essere presentato principalmente in tre forme: la forma estesa, introdotta da von Neumann (1928) e formalizzata da Kuhn (1953); la forma strategica, così chiamata da Shubik (1982) ma già definita forma normale da von Neumann e Morgenstern (1944); la forma caratteristica dovuta a von Neumann e Morgenstern (1944), usata per i giochi cooperativi.

Definizioni

Si chiama funzione dei pagamenti (payoff) una funzione f che assegna ad ogni giocatore la sua vincita per ogni possibile terminazione del gioco.

Si chiama strategia del giocatore i una funzione σ_i che assegna al giocatore i le sue possibili mosse per ogni possibile situazione del gioco.

In altre parole la strategia può essere vista come un "piano di azione" che individua in ogni situazione del gioco una "azione" tra le tante possibili.

Forma estesa

E' una descrizione puntuale del gioco, delle mosse e delle relative probabilità, della situazione dopo ogni mossa, delle strategie, degli insiemi di informazione (insiemi di nodi che globalmente rappresentano la situazione di un giocatore), ecc.; risulta molto ricca ma poco maneggevole.

In generale si utilizza una rappresentazione ad albero in cui ad ogni nodo si associa una possibile situazione del gioco, agli archi uscenti da ciascun nodo si associano le possibili mosse del giocatore che è chiamato a muovere in quella situazione e ai nodi terminali si associano i valori delle vincite (payoff) di ciascun giocatore.

Definizione

Un gioco G si dice a informazione imperfetta se esiste almeno un insieme di informazione contenente più di un elemento.

Forma strategica

Se ci sono n giocatori si utilizza una 2n-upla $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dove:

- $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ sono insiemi non vuoti contenenti le possibili strategie o scelte di ogni giocatore.
- $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sono funzioni reali definite sul prodotto cartesiano degli insiemi Σ_i cioè:

$$f_i : \prod_{k=1,\ldots,n} \Sigma_k \rightarrow \mathbf{R}$$

Una possibile interpretazione è che tutti i giocatori scelgono contemporaneamente la loro strategia e la f_i dice quale è il guadagno del giocatore i determinato dalle scelte fatte.

Gli elementi della forma strategica possono essere riassunti in una tabella come negli esempi precedenti.

Se il gioco è a due giocatori si parla anche di gioco a matrice doppia, in quanto i payoff dei giocatori possono essere rappresentati tramite due matrici.

Forma caratteristica

Definizioni

Detto N l'insieme dei giocatori, ogni sottoinsieme S di N è detto coalizione. Se S = N si ha la grande coalizione.

Si dice funzione caratteristica di un gioco cooperativo TU ad n giocatori una funzione $v : \wp(N) \rightarrow \mathbf{R}$ con $v(\emptyset) = 0$

Se per ogni coppia di coalizioni disgiunte S e T si ha $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ la funzione v è detta additiva; se si ha $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ la funzione v è detta superadditiva; se si ha $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$ la funzione v è detta subadditiva.

In altre parole v assegna ad S la massima vincita possibile indipendentemente dal comportamento degli altri giocatori.

<u>Osservazione</u>

- In generale la funzione caratteristica è sufficiente a descrivere il gioco, per cui possono essere identificati.

Un gioco descritto tramite la funzione caratteristica è detto in forma caratteristica. Se la funzione caratteristica è additiva o superadditiva o subadditiva anche il gioco è detto additivo o superadditivo o subadditivo. Se per ogni coalizione S si ha $v(S) + v(N \backslash S) = v(N)$ il gioco è detto a somma costante.

Esempio - Maggioranza semplice

Tre giocatori devono attraversare un fiume; dispongono ciascuno di una tavola di lunghezza minore della larghezza del fiume, ma tale che due tavole unite insieme permettono di attraversare il fiume; si osservi che le tavole possono avere anche lunghezze diverse, purchè soddisfacenti i requisiti precedenti.

La forma caratteristica è data da:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$

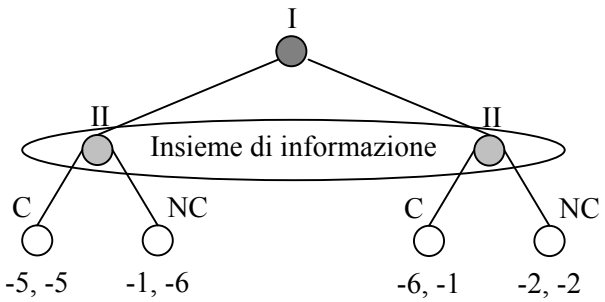
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$

Non è detto come si realizza l'accordo tra i giocatori. ◊

La forma caratteristica costituisce una descrizione molto "povera" del gioco, in quanto non permette di definire la vincita di ogni singolo giocatore della coalizione, ma solo la vincita della coalizione.

Esempio - Rappresentazioni del dilemma del prigioniero

<u>*Forma estesa*</u>



<u>*Forma strategica*</u> $\sum_I = \{C, NC\}$; $\sum_{II} = \{C, NC\}$

$f_I(C, C) = -5$; $f_I(C, NC) = -1$; $f_I(NC, C) = -6$; $f_I(NC, NC) = -2$

$f_{II}(C, C) = -5$; $f_{II}(C, NC) = -6$; $f_{II}(NC, C) = -1$; $f_{II}(NC, NC) = -2$

<u>*Forma caratteristica*</u> $N = \{I, II\}$

$v(\emptyset) = 0$; $v(I) = v(II) = -5$; $v(I, II) = -4$ ◊

I.4 CONCETTO DI SOLUZIONE DI UN GIOCO (SOLUTION CONCEPT)

Una volta detto cosa è un gioco e come lo si può rappresentare è necessario specificare cosa vuol dire risolverlo o determinare una soluzione.

Innanzitutto poichè le variabili decisionali non dipendono da un unico giocatore, non è possibile dare una soluzione in senso classico; risolvere un gioco consiste nel fornire delle indicazioni ad uno o più giocatori, eventualmente tutti, sulle strategie da adottare se il gioco è non cooperativo o cooperativo ad utilità non trasferibile, oppure sulla suddivisione della vincita se il gioco è cooperativo ad utilità trasferibile. Ovviamente tali indicazioni non possono essere assolute in quanto bisogna tenere conto di altri fattori alcuni aleatori, altri legati a preferenze e sensazioni del singolo giocatore.

Nell'esempio della battaglia dei sessi se entrambi sono "egoisti" o "altruisti" l'esito è una serata solitaria per entrambi, quindi è necessario che uno sia "egoista" e l'altro "altruista"; d'altra parte è sufficiente che nelle situazioni precedenti sia stata scelta più volte la partita per far si che sia probabile la scelta teatro (o viceversa), senza quindi coinvolgere "egoismo" e "altruismo", ma solo un sentimento di "parità".

In altre parole il termine "concetto di soluzione" indica quella che secondo alcuni criteri assoluti è una scelta che può risultare accettabile a tutti i giocatori secondo i loro criteri soggettivi.

Esempio - Divisione di una torta tra due giocatori

E' uno dei problemi più significativi, in quanto molto semplice, molto comune e molto complesso. La soluzione più usuale in cui uno taglia e l'altro sceglie in realtà non è assolutamente equa in quanto può favorire chi sceglie se chi taglia non è preciso, o chi taglia se è a conoscenza di qualche preferenza o "punto debole" di chi sceglie. ◊

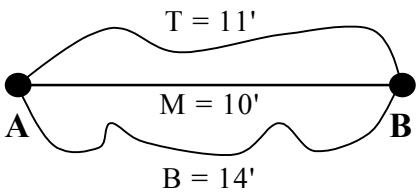
CAPITOLO II

GIOCHI NON COOPERATIVI

II.1 INTRODUZIONE

In questa classe di giochi, introdotta da Von Neumann e Morgenstern (1944), i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti (o comunicare), indipendentemente dal fatto che i loro obiettivi siano contrastanti o comuni e possano quindi avere interesse ad accordarsi.

Esempio - Congestione



Per andare da A a B sono possibili tre strade con differenti tempi di percorrenza, che dipendono dalla lunghezza e da altri fattori, in particolare dal traffico, per cui se più persone scelgono la stessa strada il corrispondente tempo aumenta. Si considerino tre utenti e si supponga che l'aumento sia di due minuti se una strada è scelta da due utenti e di cinque minuti se è scelta dai tre utenti.

Il gioco può essere rappresentato in forma strategica dalle seguenti tabelle:

III = T			
I \ II	T	M	B
T	16,16,16	13,10,13	13,14,13
M	10,13,13	12,12,11	10,14,11
B	14,13,13	14,10,11	16,16,11

III = M			
I \ II	T	M	B
T	13,13,10	11,12,12	11,14,10
M	12,11,12	15,15,15	12,14,12
B	14,11,10	14,12,12	16,16,10

III = B			
I \ II	T	M	B
T	13,13,14	11,10,14	11,16,16
M	10,11,14	12,12,14	10,16,16
B	16,11,16	16,10,16	19,19,19

In questo caso l'obiettivo dei giocatori è comune (ma non è identico, in quanto ognuno vuole minimizzare il proprio tempo di percorrenza), ma la cooperazione, nel caso reale, è resa impossibile dalla difficoltà di accordarsi su chi percorre le strade più lente. ◊

II.2 EQUILIBRIO DI NASH

Il più semplice e importante concetto di soluzione per un gioco non cooperativo è l'equilibrio di Nash (1950).

Definizione

Dato un gioco G si dice che una n-upla di strategie $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ con $\sigma_i^* \in \Sigma_i$, costituisce un equilibrio, o è in equilibrio se nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico che cambia strategia, cioè se:

$$f_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq f_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n^*) \qquad \forall\ \sigma_i \in \Sigma_i, \forall\ i$$

Ovviamente possono esistere differenti strategie per uno o più giocatori a cui corrispondono payoff migliori, come nel caso del dilemma del prigioniero in cui l'equilibrio risulta inefficiente e il

risultato più ovvio per un "supervisore" non è di equilibrio.

Esempio - Pari e dispari modificato

I due giocatori possono lanciare 1, 2, 3; il giocatore I vince se la somma dei numeri è pari, altrimenti vince il giocatore II. Apparentemente il gioco è favorevole al giocatore I che può vincere in 5 casi su 9. D'altra parte il giocatore II potrebbe giocare 2 e quindi avrebbe 2 risultati vincenti su 3; ma a questo punto il giocatore I giocando 2 è "sicuro" di vincere. Analogamente il giocatore I potrebbe giocare 1 (o 3) per avere 2 risultati vincenti su 3 e a questo punto il giocatore II giocando 2 è "sicuro" di vincere. Cercare di aumentare le proprie possibilità di vincere porta alla sconfitta "sicura". ◊

I \ II	1	2	3
1	P	D	P
2	D	P	D
3	P	D	P

<u>Osservazione</u>

- Si possono evidenziare alcuni limiti dell'equilibrio di Nash in strategie pure:
  - inefficienza (dilemma del prigioniero);
  - non unicità (battaglia dei sessi);
  - non esistenza (pari e dispari).

<u>Raffinamenti</u>

Esistono numerosi raffinamenti dell'equilibrio di Nash, tra i quali l'equilibrio perfetto nei sottogiochi, che si ricollega alla programmazione dinamica di Bellman (Selten, 1965), l'equilibrio correlato che incorpora aspetti di comunicazione tra i giocatori (Aumann, 1974) e l'equilibrio perfetto o "della mano tremante" che considera le perturbazioni (Selten, 1975).

Esempio - Strategie correlate

Ad un incrocio due automobilisti possono scegliere se passare (P) o fermarsi (F). Passare se l'altro si ferma permette di guadagnare 5, fermarsi entrambi comporta una perdita 1, ma se passano entrambi la perdita è maggiore … E' facile verificare che esistono due equilibri di Nash (P, F) e (F, P) con valore atteso 5 per chi passa e 0 per chi si ferma (quindi la somma è 5); la scelta di fermarsi comunque è la più sicura ma ha un valore atteso negativo, salvo nel caso improbabile che l'altro passi comunque. Si può allora correlare la strategia ad un evento esterno: il semaforo. Utilizzando un ciclo semaforico che fa passare le auto provenienti dalle due direzioni al 50 per cento, si ottiene un valore atteso 2.5 per entrambi (e la somma è ancora 5) e una notevole sicurezza se i giocatori accettano la strategia correlata, cioè rispettano il codice della strada. ◊

I \ II	P	F
P	-10, -10	5, 0
F	0, 5	-1, -1

Esempio - Mano tremante

Il gioco a lato ha due equilibri di Nash (T, L) e (B, R). Il primo sembrerebbe più vantaggioso, ma è più rischioso in caso di perturbazioni. Nel primo caso un "errore" non danneggia chi lo commette, ma danneggia fortemente l'altro. Nel secondo caso si ha un danno solo nel caso di un proprio errore. ◊

I \ II	L	R
T	10, 10	0, 10
B	10, 0	1, 1

II.3 STRATEGIE MISTE

Definizione

Si chiama strategia mista per un giocatore una distribuzione di probabilità sull'insieme delle sue strategie (pure). Se l'insieme delle strategie pure è formato da n elementi una strategia mista si può indicare con un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \geq 0$ e $\sum_{i=1,\ldots,n} x_i = 1$.

L'insieme delle strategie miste del giocatore I si indica con X e l'insieme delle strategie miste del giocatore II si indica con Y.

Definizione

Un gioco G si dice a somma zero se per ogni terminazione del gioco la somma dei payoff è nulla.

Nel caso più semplice a due giocatori la matrice dei pagamenti può essere espressa indicando la vincita, positiva o negativa, del primo giocatore poichè la vincita del secondo è in ogni caso l'opposto. Si può utilizzare una matrice A in cui la riga i è associata alla strategia σ_i del giocatore I, la colonna j alla strategia σ_j del giocatore II e l'elemento a_{ij} rappresenta quanto il primo giocatore riceve dal secondo se giocano la coppia di strategie(σ_i, σ_j).

Definizione

La rappresentazione tramite la matrice A è detta forma normale.

Definizione

Dato un gioco G a due giocatori a somma zero in forma normale con matrice A è detta vincita attesa se il giocatore I gioca la strategia mista $x \in X$ e il giocatore II gioca la strategia mista $y \in Y$ la quantità:

$$A(x, y) = \sum_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1,\ldots,m} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

E' possibile definire la vincita minima per il giocatore I se sceglie la strategia mista $x \in X$ come:

$$v(x) = \min_{y \in Y} x^T A y = \min_{j} x^T A_{\cdot j}$$

e la perdita massima per il giocatore II se sceglie la strategia mista $y \in Y$ come:

$$v(y) = \max_{x \in X} x^T A y = \max_i A_{i\cdot} y$$

dove $A_{\cdot j}$ e $A_{i\cdot}$ sono la colonna j e la riga i di A e le seconde uguaglianze derivano dal fatto che il minimo e il massimo cercati si ottengono con strategie pure.

L'obiettivo del giocatore I è massimizzare v(x) ottenendo la quantità:

$$v_I = \max_{x \in X} \min_j x^T A_{\cdot j}$$

e quello del giocatore II è minimizzare v(y) ottenendo la quantità:

$$v_{II} = \min_{y \in Y} \max_j A_{i\cdot} y$$

Definizione

La strategia mista x che permette al giocatore I di ottenere v_I è detta maximin; la strategia mista y che permette al giocatore II di ottenere v_{II} è detta minimax.

v_I e v_{II} sono detti valore del gioco per i giocatori I e II.

Teorema del minimax (von Neumann, 1928)

$v_I = v_{II}$.

Osservazione

- Nel caso in cui il gioco non sia a somma zero il precedente teorema non sussiste.

II.4 DOMINANZA

Talvolta le dimensioni del problema, cioè il numero di strategie, possono essere ridotte eliminando alcune strategie.

Definizione

La strategia σ_h domina la strategia σ_k per il giocatore i se $f_i(\sigma_h, \sigma_{-i}) \geq f_i(\sigma_k, \sigma_{-i})$, per ogni (n-1)-upla di strategie $\sigma_{-i} \in \prod_{k \neq i} \Sigma_k$ e $f_i(\sigma_h, \sigma_{-i}) > f_i(\sigma_k, \sigma_{-i})$ per almeno una (n-1)-upla di strategie σ_{-i}.

Teorema

Se una strategia è dominata, esiste una strategia mista ottimale che non utilizza la strategia dominata; inoltre una strategia mista ottimale per il gioco ridotto è ottimale anche per il gioco dato.

Osservazioni

- A volte si distingue tra dominanza debole, quella definita in precedenza, e forte, quando si hanno tutte disuguaglianze strette. Ai fini dell'applicazione del teorema di riduzione del gioco

la distinzione è irrilevante; tale riduzione è possibile anche nel caso in cui si abbiano tutte uguaglianze (indifferenza); se si applicano eliminazioni per dominanza debole o indifferenza si può perdere qualche equilibrio di Nash. Questo fatto è irrilevante se si vuol determinare se esistono equilibri di Nash, o almeno un equilibio di Nash.

- Il concetto di dominanza può essere applicato anche al gioco ridotto, indipendentemente dalle caratteristiche del gioco dato (dominanza iterata).

CAPITOLO III
GIOCHI COOPERATIVI

III.1 INTRODUZIONE

I giocatori di un gioco non devono necessariamente avere interessi contrastanti, ma possono perseguire un fine comune, almeno per la durata del gioco, pertanto è possibile che alcuni di essi tendano ad associarsi per migliorare il proprio risultato.

Per realizzare la cooperazione deve essere possibile innanzitutto comunicare e quindi stipulare accordi (vedi ad esempio regole antitrust) e deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi, nel senso che deve esistere una autorità sufficientemente forte e accettata da tutti i componenti.

Una ulteriore suddivisione dei giochi cooperativi fa riferimento a come i giocatori di una coalizione possono ripartirsi la vincita.

Si distinguono due sottoclassi:

Giochi cooperativi senza pagamenti laterali (NTU - Games)

I giocatori ricevono un payoff preassegnato.

Giochi cooperativi a pagamenti laterali (TU - Games)

I giocatori di una coalizione possono ripartirsi in qualsiasi modo la vincita.

I secondi costituiscono un caso particolare dei primi.

In particolare per avere un gioco TU devono essere soddisfatte tre ipotesi:

- deve essere possibile (da un punto di vista normativo) trasferire l'utilità tra i giocatori;
- deve esistere un mezzo comune di scambio, ad esempio il denaro, con cui trasferire (da un punto di vista materiale) l'utilità;
- le funzioni di utilità dei giocatori devono essere equivalenti, ad esempio funzioni lineari della quantità di denaro.

Esempio - Coalizione semplice

Sono dati tre giocatori I, II, III; se due di loro si accordano, formando una coalizione, il terzo giocatore da ad ognuno di essi una unità, altrimenti nessuno riceve nulla. I payoff sono:

(1, 1, -2)	se I e II si coalizzano
(1, -2, 1)	se I e III si coalizzano
(-2, 1, 1)	se II e III si coalizzano
(0, 0, 0)	altrimenti

Se i payoff relativi alla coalizione (II, III) fossero (-2.0, 1.1, 0.9) la posizione del giocatore II non si

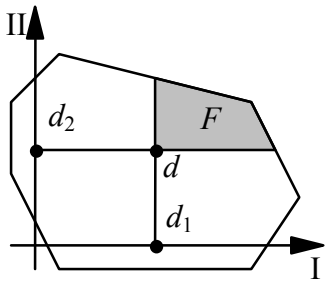
rafforza in quanto il giocatore III ha più interesse a coalizzarsi con I che con II; questa situazione non sussiste nel caso in cui sia possibile per II "trasferire" parte della propria vincita al giocatore III, ritornando alla situazione precedente. ◊

Definizione

Un gioco NTU è una coppia G = (N, V) dove N è l'insieme dei giocatori e V è la funzione che ad ogni coalizione $S \subset N$ associa l'insieme dei payoff ammissibili per i giocatori di S, tale che:

- $V(S) \subset \mathbf{R}^S$
- V(S) è chiuso e non vuoto
- $V(S) = V(S) - \mathbf{R}^S_{\geq}$ (*Comprensiveness*)

III.2 PROBLEMA DI CONTRATTAZIONE A DUE GIOCATORI SENZA PAGAMENTI LATERALI



Un'applicazione interessante dei giochi cooperativi senza pagamenti laterali è data dal problema di contrattazione a due giocatori senza pagamenti laterali (Nash, 1950). Se è giocato cooperativamente i giocatori possono accordarsi per una strategia correlata e possono giocare qualunque elemento dello spazio delle strategie $X \times Y$.

Sotto opportune ipotesi di compattezza dell'insieme delle strategie possibili (ad esempio un simplesso) e di comportamento delle funzioni di utilità (ad esempio lineari) si ha che l'immagine nello spazio delle utilità $I \times II$ è un insieme V convesso e chiuso.

Al giocatore i si assegna un valore di riferimento d_i, ad esempio la soluzione non cooperativa di minimax e si definisce il punto $d = (d_1, d_2)$, quindi si considera il sottoinsieme indicato con $F = V \cap \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq d_1, x_2 \geq d_2\}$ chiuso, convesso, limitato e non vuoto, che costituisce l'insieme dei payoff che i giocatori possono raggiungere contrattando.

Definizione

Un problema di contrattazione a due giocatori è rappresentato dalla coppia (F, d) con $F \subset \mathbf{R}^2$ chiuso, convesso, limitato e non vuoto (feasibility set), $d = (d_1, d_2) \in \mathbf{R}^2$ (disagreement point).

I giocatori sono antagonisti, cioè ad un incremento del payoff per uno corrisponde una diminuzione per l'altro, come si osserva facilmente restringendosi alla frontiera di Pareto (giocatori efficientisti).

Questo problema può essere visto come gioco NTU dove:

- $V(1) = \{x_1 \in \mathbf{R} \mid x_1 \leq d_1\}$
- $V(2) = \{x_2 \in \mathbf{R} \mid x_2 \leq d_2\}$

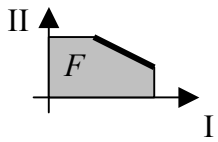
- $V(1, 2) = F - \mathbf{R}^2_{\geq}$

<u>Soluzione assiomatica di Nash (1950)</u>

La soluzione di Nash $\Phi(F, d)$ di un problema di contrattazione a due giocatori $(F, d) \in C$, insieme dei problemi di contrattazione, si determina come funzione $\Phi : C \to \mathbf{R}^2$ tale che $\Phi(F, d) \in F$, imponendo sull'insieme C e su Φ i seguenti requisiti detti assiomi di Nash:

1) <u>Efficienza stretta</u>

   La soluzione appartiene alla frontiera paretiana in senso stretto, cioè non può stare su un punto della frontiera migliorabile per un giocatore.



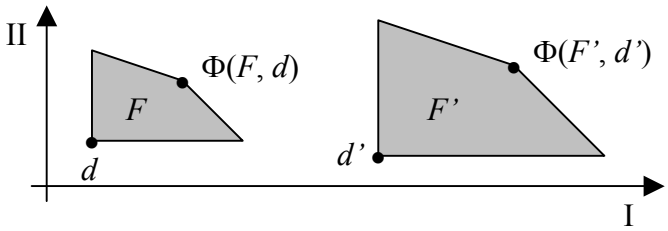
2) <u>Razionalità individuale</u>

   $\Phi(F, d) \geq d$

   con la relazione d'ordine di $\mathbf{R}^2$.

3) <u>Scale covariance</u>

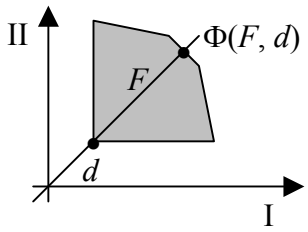
   La covarianza è invariante per cambiamenti di scala, cioè si ottiene lo stesso problema di contrattazione operando un cambiamento per traslazione o per proporzionalità.



4) <u>Simmetria</u>

   Se F è simmetrico per i due giocatori, cioè entrambi possono ottenere gli stessi payoff e $d_1 = d_2$ allora si ha:

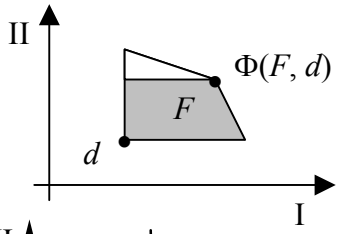
   $\Phi_I(F, d) = \Phi_{II}(F, d)$.



5) <u>Indipendenza dalle alternative irrilevanti</u>

   Assioma controverso. Se si elimina un sottoinsieme di F non contenente $\Phi(F, d)$ la soluzione resta invariata.

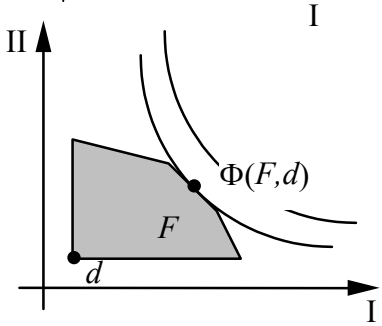
   Nell'esempio in figura il giocatore I può oppure può non ridiscutere la scelta.



<u>Teorema</u>

Esiste un'unica funzione Φ: $C \to \mathbf{R}^2$ che soddisfa gli assiomi di Nash, quella che massimizza il prodotto di Nash:

$$\Phi(F, d) = \text{argmax } \{(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \mid x \in F\} = N_S$$



<u>Osservazione</u>

- Nella trattazione precedente sono state fatte alcune ipotesi non necessariamente verificate:
  a) non è detto che il punto d influenzi nel modo esposto la soluzione;

b) i decisori possono non uniformarsi al modello di von Neumann - Morgenstern.

Ne consegue che dati due problemi di contrattazione a due giocatori identici si può pervenire a risultati diversi (ad esempio un decisore potrebbe essere più rigido in un caso che nell'altro).

Il problema di contrattazione è alla base di numerosi concetti di soluzione tra i quali l'insieme di contrattazione (Bargaining set) di Aumann e Maschler (1964), il Kernel introdotto da Davis e Maschler (1965) e il nucleolo dovuto a Schmeidler (1969).

Data l'importanza del problema di contrattazione sono state proposte altre soluzioni, tra cui:

<u>Soluzione di Kalai-Smorodinsky (1975)</u>

$$K_S = \text{argmax} \left\{ \frac{x_1 - d_1}{a_1 - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{a_2 - d_2} \mid x \in F \right\}$$

dove $a_i = \max \{x_i \mid x \in F\}$

<u>Soluzione Egualitaria</u>

$$E_S = \text{argmax} \{x_1 - d_1 = x_2 - d_2 \mid x \in F\}$$

<u>Soluzione delle Aree uguali</u>

$$A_S \text{ t.c. } \quad A\left(\left\{d + \mathbf{R}^2_{\geq}\right\} \cap \left\{x \in F \mid x_1 \geq (A_S)_1\right\}\right) = A\left(\left\{d + \mathbf{R}^2_{\geq}\right\} \cap \left\{x \in F \mid x_2 \geq (A_S)_2\right\}\right)$$

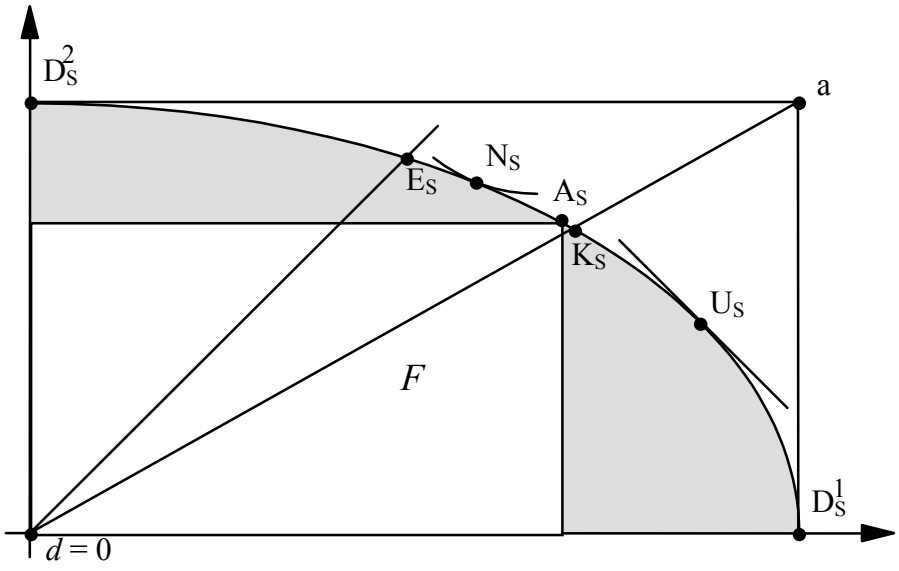
<u>Soluzione Dittatoriale</u>

$$D^i_S = \text{argmax} \{x_i \mid x \in F, x_j = d_j, j \neq i\}$$

<u>Soluzione Utilitaria</u>

$$U_S = \text{argmax} \{x_1 + x_2 \mid x \in F\}$$

La figura seguente rappresenta le differenti soluzioni proposte.



III.2 GIOCHI DI MERCATO

Un altro interessante esempio di gioco NTU è dato dai giochi di mercato, introdotti da Edgeworth

(1881) e rielaborati da Shubik (1959).

Economia di puro scambio

Sia N l'insieme degli agenti (giocatori); ogni agente $i \in N$ ha una "dotazione iniziale", cioè un paniere di beni $w^i \in \mathbf{R}^\ell_\geq$ dove ℓ è il numero di beni considerati, e una relazione di preferenza $\supseteq_i$ definita su $\mathbf{R}^\ell_\geq$; a partire dalla relazione di preferenza si può definire per ogni giocatore i una opportuna funzione di utilità $u_i : \mathbf{R}^\ell_\geq \to \mathbf{R}$ che assegna un valore ai beni del giocatore i.

Gli agenti possono adottare una ridistribuzione $(x^i)_{i\in N} \in \mathbf{R}^\ell_\geq$ del complesso delle dotazioni iniziali, in modo che $\sum_{i\in N} x^i = \sum_{i\in N} w^i$.

Questa è una versione semplificata del modello di Walras di equilibrio economico generale, senza la produzione e i prezzi di equilibrio.

Ad un'economia di puro scambio si può associare un gioco NTU G = (N, V) dove:

- N è l'insieme degli agenti.
- $V(S) = \left\{ (z_i)_{i\in S} \middle| \exists (x^i)_{i\in N}, x^i \in R^\ell_\geq \text{ con } x^j = w^j \text{ se } j \in N \setminus S, \sum_{i\in S} x^i = \sum_{i\in S} w^i, z_i = u_i(x^i) \right\}$

V(S) esprime la possibilità dei giocatori di S di ridistribuire tra di loro solo le proprie dotazioni iniziali.

Si cercano le ridistribuzioni $\bar{x}$ per cui non esiste alcuna coalizione S che possa ridistribuire le proprie dotazioni iniziali in modo che ogni giocatore di S preferisca la nuova distribuzione rispetto a $\bar{x}$, cioè:

$$\forall\, S \text{ e } \forall\, y \in V(S) \text{ t.c. } u_i(y^i) > u_i(\bar{x}^i) \qquad \forall\, i \in S$$

oppure:

$$y^i \supseteq_i \bar{x}^i \qquad \forall\, i \in S$$

con $\sum_{i\in N} y^i = \sum_{i\in N} w^i$.

Osservazione

- Le ridistribuzioni $\bar{x}$ precedenti costituiscono il nucleo del gioco in quanto non possono essere migliorate da un giocatore senza danneggiare qualche altro giocatore.

III.4 GIOCHI COOPERATIVI A PAGAMENTI LATERALI

In questi giochi introdotti da Von Neumann e Morgenstern (1944) i giocatori possono stipulare accordi vincolanti e possono ripartirsi la vincita con un accordo al di fuori delle regole del gioco, la cui validità può estendersi anche oltre la fine del gioco.

Il problema può essere come trasferire la vincita o utilità poichè i giocatori possono avere differenti funzioni di utilità.

Definizione

Un gioco TU è una coppia G = (N, v) dove N è l'insieme dei giocatori e v è la funzione caratteristica, con $v(\emptyset) = 0$.

Se i valori della funzione v sono negativi si ha un gioco di costi (N, c) in cui si pone $c = -v$, in modo da operare con quantità non negative.

Esempio - Gioco dei guanti

Due insiemi di giocatori, L ed R, possiedono dei guanti; i giocatori di L possiedono solo guanti sinistri mentre i giocatori di R possiedono solo guanti destri. Il valore di una coalizione di giocatori è data dal numero di paia di guanti che riescono a formare. In generale ogni giocatore possiede un solo guanto. Nel caso in cui i giocatori di L siano 1 e 2 e i giocatori di R siano 3 e 4 si ha il seguente gioco:

$N = \{1, 2, 3, 4\}$

$v(i) = 0 \qquad \forall\, i$

$v(12) = v(34) = 0$

$v(S) = 1 \qquad$ se $|S| = 2$ e $S \neq \{12\}$, $S \neq \{34\}$ oppure se $|S| = 3$

$v(N) = 2$ ◊

Definizione

Un gioco G = (N, v) si dice coesivo se per ogni partizione di N $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ si ha:

$$\sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq v(N)$$

Questa condizione, più debole della superadditività, esprime la "convenienza" dei giocatori a formare la grande coalizione, piuttosto che riunirsi in sottocoalizioni. L'importanza deriva dal fatto che in generale i concetti di soluzione più comuni costituiscono una ripartizione del valore della grande coalizione.

III.5 SOLUZIONI DI UN GIOCO COOPERATIVO A PAGAMENTI LATERALI

In questo caso risulta predominante il problema della suddivisione della vincita. Esistono due tipi di soluzioni quelle insiemistiche, che assegnano più ripartizioni, e quelle puntuali, che determinano una sola ripartizione e costituiscono l'attuale tendenza in quanto più simili all'idea classica di soluzione di un problema.

Imputazioni

Un'idea per determinare le singole vincite può essere risolvere un sottogioco ristretto ai giocatori di ciascuna coalizione, oppure suddividere in parti uguali la vincita, trascurando il contributo dei singoli giocatori; esistono però altri metodi più complessi che meglio tengono conto del ruolo svolto da ciascun giocatore e che definiscono altri concetti di soluzione.

Definizione

Dato un gioco G = (N, v) si dice imputazione o ripartizione del valore del gioco o soluzione del gioco un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tale che:

$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ ipotesi di efficienza

$x_i \geq v(i)$ $i = 1, \ldots, n$ ipotesi di forza dei giocatori o razionalità individuale

Nel caso di un cost game la razionalità individuale richiede $x_i \leq c(i)$.

L'insieme di tutte le imputazioni si indica con E(v).

Definizione

Se per un gioco G = (N, v) si ha:

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$$

allora E(v) ha come unico elemento $x = (v(1), v(2), \ldots, v(n))$; in questo caso il gioco è detto inessenziale e essenziale altrimenti.

Per la seconda condizione una imputazione deve assegnare ad ogni giocatore almeno quanto egli può ottenere da solo. Pertanto le imputazioni costituiscono un primo passo verso la determinazione della ripartizione delle vincite e ogni concetto di soluzione dovrà soddisfare questa condizione, cioè dovrà essere una imputazione. D'altra parte se il gioco è essenziale esistono più imputazioni possibili e si ripropone il problema di scegliere la "soluzione". Infatti poichè la somma degli elementi delle imputazioni è costante se due imputazioni x e y sono distinte esiste almeno un giocatore k per cui $x_k > y_k$ e almeno un giocatore h per cui $x_h < y_h$.

Definizioni

Date x, y $\in$ E(v) e una coalizione S si dice che x domina y mediante S, $x \succ_S y$, se:

1) $x_i > y_i$ $\forall\, i \in S$
2) $x(S) \leq v(S)$

Date x, y $\in$ E(v) si dice che x domina y, $x \succ y$, se esiste S tale che $x \succ_S y$.

La dominanza non è riflessiva, nè antisimmetrica, nè transitiva, poichè può cambiare S.

Esempio - Non antisimmetria

Sia dato il seguente gioco:

$N = \{1, 2, 3, 4\}$

$v(i) = 0 \qquad \forall\, i$

$v(i, j) = v(i, j, k) = v(N) = 1 \qquad \forall\, i, j, k$

Date le seguenti imputazioni $x = (1/2, 1/2, 0, 0)$ e $y = (0, 0, 1/2, 1/2)$ si ha:

$x \succ_{\{1,2\}} y$ e $y \succ_{\{3,4\}} x$. ◊

III.6 INSIEMI STABILI

Questo concetto di soluzione è stato proposto da Von Neumann - Morgenstern (1944) come la "soluzione" dei giochi TU e privilegia alcune imputazioni rispetto ad altre.

Definizione

Un insieme $V \subset E(v)$ si dice stabile se:

1) dati $x, y \in V$ si ha che x non domina y e viceversa — stabilità interna
2) dato $x \notin V$, $\forall\, y \in V$ per il quale si ha $y \succ x$ — stabilità esterna

Un insieme stabile contiene la soluzione ma la decisione dipende da altre informazioni non espresse dalla forma caratteristica. Un gioco può avere più insiemi stabili. Nel 1968 Lucas ha dato un esempio di gioco senza insiemi stabili, indebolendo questo concetto di soluzione.

III.7 NUCLEO

Probabilmente il concetto di soluzione insiemistico più interessante per numerose classi di giochi è il nucleo; è stato introdotto da Gillies (1953). L'idea di base è quella di considerare il comportamento delle imputazioni rispetto alle coalizioni, richiedendo:

$x(S) \geq v(S) \qquad S \subset N$ — ipotesi di razionalità della coalizione

dove $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Nel caso di un cost game c la razionalità della coalizione richiede $x(S) \leq c(S)$.

Definizione

Si dice nucleo di un gioco, o core, l'insieme $C(v) = \{ x \in E(v) \mid x(S) \geq v(S), S \subset N \}$.

Proprietà

- Le imputazioni non dominate costituiscono il nucleo del gioco.
- Il nucleo può essere vuoto come nel gioco di maggioranza semplice e in generale nei giochi essenziali a somma costante.

Esempio - Produzione (Owen, 1975)

Sia dato il problema di produzione:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{z} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{z} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{z} \geq 0 \end{aligned}$$

e il corrispondente problema duale:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \geq 0 \end{aligned}$$

Ad esso associamo un gioco ad N giocatori, ciascuno dei quali possiede un vettore di risorse $\mathbf{b}^i$, definito in forma caratteristica come:

$$v(S) = \max \{ \mathbf{c}^T\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\mathbf{z} \leq \mathbf{b}^S, \mathbf{z} \geq 0 \} \qquad \forall\, S \subset N$$

dove $\mathbf{b}^S$ rappresenta il vettore delle risorse possedute dai giocatori della coalizione S; ovviamente $\mathbf{b}^N = \mathbf{b}$.

Una imputazione x nel nucleo è ottenibile tramite una soluzione $\mathbf{u}^*$ del problema duale relativo alla grande coalizione N ponendo:

$$x_i = \mathbf{b}^{iT}\mathbf{u}^* \qquad \Diamond$$

<u>Osservazione</u>

- Il risultato precedente può essere esteso a tutti i giochi originati da un problema lineare (Teorema di Owen, 1975).

<u>Bilanciamento</u>

E' interessante poter stabilire se un gioco ha nucleo vuoto o meno, in quanto ciò fornisce indicazioni sulla stabilità della grande coalizione. Si noti che la coesività o la superadditività non danno informazioni; ad esempio il gioco di maggioranza semplice ha nucleo vuoto ma è superadditivo e quindi anche coesivo.

Dalla definizione si ricava che le imputazioni del nucleo possono essere caratterizzate come le soluzioni del problema lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{i \in N} x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \qquad \forall\, S \subset N \end{aligned}$$

per le quali $z^* = v(N)$.

Il duale del problema precedente si può scrivere come:

$$\max \quad w = \sum_{S \subset N} y_S v(S)$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{S|i \in S} y_S = 1 \qquad \forall\, i \in N$$
$$y_S \geq 0 \qquad \forall\, S \subset N$$

Questo permette di stabilire il seguente teorema.

Teorema

Un gioco v ha nucleo non vuoto se e solo se esiste una soluzione del problema primale con $z^* = v(N)$ o equivalentemente (per il primo teorema della dualità) esiste una soluzione del problema duale con $w^* = v(N)$.

Purtroppo l'utilità di questo teorema è molto limitata in quanto la difficoltà di verificare una delle tre condizioni è equivalente. Si può fare un passo avanti introducendo le collezioni bilanciate.

Definizioni

Una collezione $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ di sottoinsiemi di N è detta bilanciata se esistono m numeri non negativi $y_1, y_2, \ldots, y_m$ detti coefficienti di bilanciamento, tali che:

$$\sum_{S|i \in S} y_S = 1 \qquad \forall\, i \in N$$

Una collezione bilanciata è detta minimale se nessuna sottocollezione è bilanciata.

Proprietà

- Ogni collezione bilanciata è unione di collezioni bilanciate minimali.
- Una collezione bilanciata è minimale se e solo se i coefficienti di bilanciamento sono unici.
- Le collezioni bilanciate non dipendono dal gioco, ma solo da N.

Esempi

1) Ogni partizione di N è una collezione bilanciata, con coefficienti unitari.
2) Sia N = {1, 2, 3}; $\mathcal{B}$ = {{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}} è una collezione bilanciata con coefficienti (1/2, 1/2, 1/2). In generale per ogni N la collezione di $\binom{n}{s}$ sottoinsiemi distinti di s elementi è bilanciata con coefficienti $\binom{n-1}{s-1}^{-1}$. ◊

A questo punto si può migliorare la caratterizzazione dei giochi a nucleo non vuoto.

Teorema (Bondareva, 1963 - Shapley, 1967)

Un gioco G = (N, v) ha nucleo non vuoto se e solo se per ogni collezione bilanciata minimale

$\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ con coefficienti di bilanciamento $y_1, y_2, \ldots, y_m$, si ha:

$$\sum_{j=1,\ldots,m} y_j v(S_j) \leq v(N)$$

Osservazioni

- Per un gioco superadditivo il teorema di Bondareva-Shapley è vero per le partizioni di N, quindi è sufficiente verificarlo per le altre collezioni bilanciate minimali.
- Il teorema è particolarmente utile per dimostrare che un gioco ha nucleo vuoto in quanto è sufficiente trovare una collezione bilanciata che non verifica la condizione.
- Un gioco a nucleo non vuoto viene anche detto bilanciato.

Esempi

1) Un gioco a tre giocatori superadditivo è bilanciato se e solo se:

$$v(12) + v(13) + v(23) \leq 2\, v(123)$$

poichè $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ è l'unica collezione bilanciata minimale con coefficienti (1/2, 1/2, 1/2).

2) Sia dato il gioco:

$N = \{1, 2, 3, 4\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(14) = v(24) = 0;\ v(23) = v(34) = 2;$

$v(12) = v(13) = v(123) = 3;\ v(124) = 4;\ v(134) = v(234) = 5 = v(N) = 6$

Il gioco non è bilanciato in quanto $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ è una collezione bilanciata con coefficienti (1/2, 1/2, 1/2) per la quale si ha:

$$1/2\, v(12) + 1/2\, v(134) + 1/2\, v(234) = 13/2 \geq 6 = v(N) \qquad \Diamond$$

III.8 VALORI E INDICI DI POTERE

E' una classe concetti di soluzioni così chiamate perchè legate al contributo che i singoli giocatori danno alle coalizioni e quindi atte a identificare il "valore" o il "potere" di ciascun giocatore all'interno delle coalizioni stesse. Sono soluzioni di tipo puntuale. Il termine "indice di potere" si usa per i giochi semplici, mentre per un gioco qualsiasi si preferisce il termine "valore".

Valore di Shapley (1953)

E' il più noto e usato tra i valori e si basa sul valore che ogni giocatore è in grado di aggiungere alle possibili coalizioni, cioè sul suo contributo marginale.

Definizione

Si chiama valore di Shapley il vettore $\varphi(v)$ la cui componente φ_i è il contributo marginale medio del

giocatore i rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori, cioè:

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi}\left[v(C^{i,\pi} \cup i) - v(C^{i,\pi})\right]$$

dove n = |N|, π è una permutazione di N e $C^{i,\pi}$ è l'insieme dei giocatori che precedono i nella permutazione π.

Il valore di Shapley per un gioco cooperativo esiste ed è unico.
Se il gioco è superadditivo (subadditivo per un cost game) il valore di Shapley è un'imputazione in quanto verifica:

$$\sum_{i\in N}\varphi_i(v) = v(N)$$

$$\varphi_i(v) \geq v(i) \qquad \forall\ i$$

ma non è necessariamente un elemento del nucleo, visto che questo può essere vuoto.

Esempio - Maggioranza semplice

Sia dato il gioco G = (N, v):

N = {1, 2, 3}

$v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(12) = v(13) = v(23) = v(N) = 1$

In questo caso per il giocatore 1 le permutazioni e il contributo marginale sono:

Permutazioni	Contributi marginali in generale	Contributi marginali per il gioco di maggioranza semplice
1 2 3	$v(1) - v(\emptyset)$	0
1 3 2	$v(1) - v(\emptyset)$	0
2 1 3	$v(12) - v(2)$	1
2 3 1	$v(123) - v(23)$	0
3 1 2	$v(13) - v(3)$	1
3 2 1	$v(123) - v(23)$	0

Pertanto si ottiene $\varphi_1(v) = 1/3$ e per simmetria si ha:

$\varphi(v) = (1/3, 1/3, 1/3)$ ◊

<u>Assiomi di Shapley</u>

Il valore di Shapley può essere definito anche in maniera assiomatica come l'unico vettore efficiente φ che soddisfa i seguenti assiomi:

1) Anonimato (o simmetria)

Dato un gioco v e una permutazione dei giocatori π sia u il gioco definito da:

$$u(\pi(S)) = v(S) \qquad \forall\ S$$

Il valore di Shapley del gioco ottenuto permutando i giocatori è dato dalla permutazione

dei valori di Shapley, cioè:

$\varphi_{\pi(i)}(u) = \varphi_i(v)$.

Esempio

Siano dati i giochi a due giocatori:

$v(1) = 1$; $v(2) = 3$; $v(12) = 8$

$u(1) = 3$; $u(2) = 1$; $u(12) = 8$

$\varphi_1(u) = \varphi_2(v) = 5$; $\varphi_2(u) = \varphi_1(v) = 3$ ◊

2) Dummy player

Sia i un giocatore che ad ogni coalizione aggiunge solo il suo valore v(i), cioè:

$v(S \cup i) = v(S) + v(i) \qquad \forall\ S,\ i \notin S$

Il valore di Shapley del giocatore i è il suo valore, cioè:

$\varphi_i(v) = v(i)$.

Esempio

Sia dato il gioco:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = 1$; $v(12) = v(13) = 2$; $v(23) = 4$; $v(N) = 5$

$\varphi(v) = (1, 2, 2)$ ◊

3) Additività o indipendenza (assioma controverso)

Dati due giochi u e v, sia $(u + v)$ il gioco somma definito da:

$(u + v)(S) = u(S) + v(S) \qquad \forall\ S$

Il valore di Shapley del gioco somma è dato dalla somma dei valori di Shapley, cioè:

$\varphi_i(u + v) = \varphi_i(u) + \varphi_i(v)$.

<u>Calcolo del valore di Shapley</u>

Il valore di Shapley risulta molto complesso da calcolare.

Applicando la definizione è necessario determinare i contributi marginali dei giocatori in tutte le possibili coalizioni ordinate, che sono n! nel caso di un gioco ad n giocatori; nel caso di 10 giocatori è necessario considerare per ogni giocatore10! = 3.628.800 permutazioni.

Una piccola semplificazione si può ottenere considerando tutte le possibili coalizioni non vuote, che sono 2^n - 1 nel caso di un gioco ad n giocatori, e per ciascuna considerare tutti i giocatori che ne fanno parte e considerare ciascun giocatore come l'ultimo arrivato e quindi "pesare" il suo contributo marginale con le permutazioni degli altri giocatori della coalizione e dei giocatori non

facenti parte della coalizione; in questo modo si ottiene la seguente espressione per il valore di Shapley:

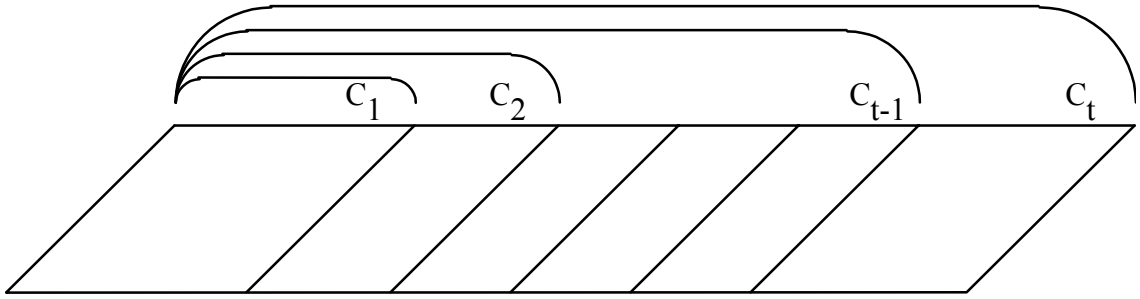
$$\varphi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq N,\, i \in S} (s-1)!(n-s)![v(S) - v(S \setminus i)]$$

Nel caso di 10 giocatori è necessario considerare $2^{10} - 1 = 1.023$ coalizioni.

Per alcuni giochi è possibile determinare il valore di Shapley molto più semplicemente sfruttando alcune caratteristiche del gioco.

Esempio - Gioco dell'aeroporto (Airport game, 1973)

Sia dato un aeroporto in cui atterrano differenti tipi di aereo che richiedono una pista di lunghezza differente a seconda delle loro caratteristiche; si vuole determinare come ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra gli aerei che la utilizzano.



Gli aerei possono essere raggruppati a seconda della lunghezza di pista necessaria in t sottoinsiemi disgiunti $N_1, \ldots, N_t$ in modo che gli aerei del sottoinsieme N_i richiedono una pista di costo C_i con $C_i < C_{i+1}$.

Definendo il gioco assegnando ad ogni coalizione il costo della pista necessaria all'aereo più grosso della coalizione, cioè:

$v(S) = C_{j(S)}$

dove $j(S) = \max \{i \mid S \cap N_i \neq \emptyset\}$

si può dimostrare che il valore di Shapley di ogni aereo corrisponde alla ripartizione dei costi ottenuta nel seguente modo:

Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli aerei, poichè tutti lo utilizzano; il costo del secondo tratto di pista $C_2 - C_1$ è diviso tra gli aerei dei sottoinsiemi $N_2, \ldots, N_t$ che sono quelli che lo utilizzano; si prosegue fino al costo dell'ultimo tratto di pista $C_t - C_{t-1}$ che è diviso tra gli aerei del sottoinsieme N_t che sono gli unici che lo utilizzano.

E' facile vedere che questo criterio è facilmente applicabile anche nel caso di molti aerei.

Sia dato il caso seguente:

$N_1 = \{1, 2, 3\}$; $N_2 = \{4, 5, 6, 7\}$; $N_3 = \{8, 9, 10\}$

$C_1 = 20$; $C_2 = 27$; $C_3 = 33$

$$\varphi_1 = \frac{20}{10} = 2$$
$$\varphi_2 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} = 3$$
$$\varphi_3 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} + \frac{33-27}{3} = 5$$

La dimostrazione utilizza gli assiomi di Shapley.

Si definiscono t giochi $v_1, \ldots, v_t$ con il gioco v_i relativo al tratto di pista i in cui si ha:

$$v_i(S) = \begin{cases} C_i - C_{i-1} & \text{se } i \le j(S) \\ 0 & \text{se } i > j(S) \end{cases}$$

dove $C_0 = 0$

A questo punto si osserva che:

1) gli aerei dei sottoinsiemi $N_1, \ldots, N_{i-1}$ che non utilizzano il tratto di pista i sono dummy per il gioco v_i, per cui il loro valore di Shapley per questo gioco è nullo;
2) gli aerei dei sottoinsiemi $N_i, \ldots, N_t$ che utilizzano il tratto di pista i sono simmetrici per il gioco v_i, per cui il loro valore di Shapley per questo gioco è uguale a $\frac{C_i - C_{i-1}}{|N_i \cup \cdots \cup N_t|}$;
3) il gioco v è dato dalla somma dei giochi v_i, per cui il valore di Shapley di v è dato dalla somma dei valori di Shapley dei giochi v_i. ◊

<u>Indice di Banzhaf-Coleman (1965, 1971)</u>

E' il più noto tra gli indici di potere, anch'esso basato sul concetto di contributo marginale.

<u>Definizioni</u>

Si chiama gioco semplice (0, 1) un gioco G = (N, v) in cui il valore delle coalizioni può essere solo 0 o 1 e v(N) = 1. Nel primo caso la coalizione è detta perdente, nel secondo è detta vincente.
Un gioco G = (N, v) si dice monotono se $S \subset T \Rightarrow v(S) \le v(T)$.
Si chiama indice di Banzhaf-Coleman il vettore $\psi(v)$ la cui componente ψ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili coalizioni a cui appartiene, cioè:

$$\psi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N,\, i \in S} [v(S) - v(S \setminus i)]$$

Questo indice non è un'imputazione poichè non è efficiente.

<u>Indice di Banzhaf-Coleman normalizzato</u>

<u>Definizioni</u>

Si chiama gioco semplice (0, 1) un gioco G = (N, v) in cui il valore delle coalizioni può essere

solo 0 o 1 e $v(N) = 1$. Nel primo caso la coalizione è detta perdente, nel secondo è detta vincente.

Un gioco $G = (N, v)$ si dice monotono se $S \subset T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$.

Si chiama contributo vincente del giocatore i per un gioco semplice monotono v, il numero di casi in cui la sua presenza rende vincente una coalizione, cioè:

$$\vartheta_i(v) = \sum_{S \subseteq N,\, i \in S} v(S) - v(S \setminus i)$$

<u>Definizione</u>

Si chiama indice di Banzhaf-Coleman normalizzato per un gioco semplice monotono v, il vettore $\beta(v)$ la cui componente β_i è il rapporto tra il contributo vincente del giocatore i e la somma dei contributi vincenti di tutti i giocatori, cioè:

$$\beta_i(v) = \frac{\vartheta_i(v)}{\sum_{i \in N} \vartheta_i(v)}$$

L'indice di Banzhaf-Coleman normalizzato è un'imputazione.

Esempi

1) Sia dato il seguente gioco:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = v(13) = 0$; $v(23) = v(N) = 1$

In questo caso si ha:

$\varphi = (0, 1/2, 1/2)$ $\psi = (0, 1/2, 1/2)$ $\beta = (0, 1/2, 1/2)$

cioè gli indici coincidono.

2) Sia dato il seguente gioco:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(12) = v(13) = v(23) = v(N) = 1$

In questo caso si ha:

$\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$ $\psi = (1/2, 1/2, 1/2)$ $\beta = (1/3, 1/3, 1/3)$

cioè gli indici φ eβ coincidono e sono minori dell'indice ψ.

3) Sia dato il seguente gioco:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = v(13) = v(23) = 0$; $v(N) = 1$

In questo caso si ha:

$\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$ $\psi = (1/4, 1/4, 1/4)$ $\beta = (1/3, 1/3, 1/3)$

cioè gli indici φ eβ coincidono e sono maggiori dell'indice ψ.

4) Sia dato il seguente gioco:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = 0$; $v(13) = v(23) = v(N) = 1$

In questo caso si ha:

$\varphi = (1/6, 1/6, 4/6)$ $\psi = (1/4, 1/4, 3/4)$ $\beta = (1/5, 1/5, 3/5)$

cioè non esiste nessuna relazione tra gli indici. ◊

III.9 NUCLEOLO

Un altro concetto di soluzione puntuale è il nucleolo di Schmeidler (1969), che si basa sull'idea di minimizzare il massimo "malcontento".

Definizione

Dato un gioco v, sia S una coalizione e x una possibile ripartizione del valore del gioco; si dice rimpianto o eccesso di S rispetto ad x la quantità:

$e(S, x) = v(S) - x(S)$

Nel caso di un cost game il rimpianto è $x(S) - c(S)$.

Osservazione

- Nella definizione precedente x è una ripartizione del valore del gioco in quanto deve soddisfare solo l'ipotesi di efficienza; in questo caso talvolta si usano i termini preimputazione e prenucleolo per indicare che non si tiene conto della razionalità individuale.

E' allora possibile definire un vettore $\vartheta(x) \in \mathbf{R}^{2^n}$ nel seguente modo:

$\vartheta_1(x) = \max \{e(S, x) \mid S \subset N\} = e(S_1, x)$

$\vartheta_i(x) = \max \{e(S, x) \mid S \subset N, S \neq S_j, j = 1, \ldots, i - 1\} = e(S_i, x)$ $i = 2, \ldots, 2^n$

Le componenti di $\vartheta(x)$ sono i rimpianti generati da x al variare di S, in ordine non crescente.

Esempio

Sia dato il seguente gioco:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(12) = 2$; $v(13) = v(23) = 3$; $v(N) = 5$

Data la ripartizione $x = (3, 1, 1)$ si ha:

$e(1, x) = -3$; $e(2, x) = -1$; $e(3, x) = -1$; $e(12, x) = -2$; $e(13, x) = -1$; $e(23, x) = 1$; $e(N, x) = 0$

e quindi $\vartheta(x) = (1, 0, -1, -1, -1, -2, -3)$ ◊

Definizione

Dato un gioco v si dice nucleolo del gioco il vettore $\nu(X)$ che costituisce il minimo, secondo

l'ordine lessicografico, dei vettori $\vartheta(x)$ al variare di x nell'insieme X delle possibili ripartizioni.

Osservazione

- Il nucleolo è un elemento del nucleo se questo è non vuoto, per cui costituisce un concetto di soluzione per i giochi a nucleo vuoto, ma è anche una soluzione del problema di "scegliere" un elemento del nucleo.

Proprietà

- Se X è non vuoto, compatto e convesso allora $\nu(X)$ esiste ed è unico.

Calcolo del nucleolo

Anche questo concetto di soluzione non è facilmente calcolabile.

Un modo relativamente semplice è dato dal seguente algoritmo.

Algoritmo di Kopelowitz (1967)

L'idea fondamentale su cui si basa questo algoritmo è che il massimo rimpianto delle coalizioni può essere rappresentato da una variabile α, per cui si ha:

$$v(S) - x(S) \leq \alpha \qquad S \subset N$$

Poichè il nucleolo minimizza il massimo rimpianto è sufficiente cercare il minimo di α.

La grande coalizione viene esclusa poichè il suo rimpianto è sempre nullo; la variabile α non è vincolata in segno in quanto il massimo rimpianto può essere sia positivo che negativo.

Si ottiene quindi il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} &\min \quad \alpha \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ &\qquad \sum_{i \in S} x_i + \alpha \geq v(S) \qquad S \subset N \end{aligned}$$

Non è sufficente risolvere il problema precedente in quanto la soluzione potrebbe non essere unica. Per avere l'unicità è necessario iterare l'algoritmo, conservando il massimo rimpianto ottenuto. Per fare questo si considera l'insieme S_0 delle coalizioni leganti, cioè quelle per cui il rimpianto è uguale al valore α_0 ottenuto; la nuova ripartizione deve minimizzare il massimo rimpianto per le altre coalizioni, ma non deve incrementare il rimpianto per le coalizioni di S_0.

A tal fine è sufficiente riscrivere i vincoli corrispondenti nella forma:

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S) - \alpha_0 \qquad S \in S_0$$

Il nuovo problema fornisce un nuovo valore α_1 e un nuovo insieme S_1 di coalizioni leganti; nel caso in cui la soluzione non sia unica è sufficiente riscrivere i vincoli corrispondenti nella forma:

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S) - \alpha_1 \qquad S \in S_1$$

Dopo al più n iterazioni la soluzione è unica e costituisce il nucleolo del gioco.

Esempio

Sia dato il seguente gioco:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(12) = 2$; $v(13) = 3$; $v(23) = 5$; $v(N) = 6$

La soluzione è $x = (1/2, 5/2, 3)$ con $\alpha_0 = -1/2$e $S_0 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$; poichè la soluzione non è unica si itera riscrivendo i vincoli u_4 e u_5 come:

$v_4 : x_2 + x_3 = v(23) - \alpha_0$

$v_5 : x_1 = v(1) - \alpha_0$

La soluzione è $x = (1/2, 9/4, 13/4)$ con $\alpha_1 = -3/4$ e $S_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$; poichè la soluzione è unica la ripartizione trovata costituisce il nucleolo. ◊

CAPITOLO IV
ALLOCAZIONE DI COSTI

IV.1 TENNESSEE VALLEY AUTHORITY

Il problema dell'allocazione di costi costituisce una delle prime applicazioni della Teoria dei Giochi. I primi esempi di allocazione di costi risalgono agli anni '30 (Tennessee Valley Authority).

Il problema nasce quando è necessario determinare una ripartizione dei costi di un progetto tra i diversi utenti, tenendo conto del diverso ruolo e dei differenti interessi.

Esiste ovviamente il problema corrispondente di allocazione di profitti, per il quale valgono analoghe considerazioni.

I concetti di soluzione precedentemente esposti, in particolare valore di Shapley e nucleolo, costituiscono differenti possibili soluzioni del problema, ma esiste una serie di concetti di soluzione o metodi di allocazione che hanno una validità generale, che sono stati sviluppati per questo problema e si basano sui costi separabili.

Per incorraggiare l'economia fu programmata la costruzione di dighe e bacini con tre obiettivi:

- fornire acqua per generare ennergia;
- controllare il regime;
- migliorare la navigazione.

I tre obiettivi si sarebbero "divisi la spesa" secondo i seguenti criteri di equità:

Stand-alone cost test: nessun $S \subseteq N$ dovrebbe pagare più che per un proprio progetto, $\sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$

Incremetal cost test: nessun $S \subseteq N$ dovrebbe pagare meno del contributo marginale rispetto agli altri, $\sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \setminus S)$

Se x è efficiente le due regole sono equivalenti.

IV.2 METODI DEI COSTI SEPARABILI

Definizioni

Dato un gioco di costi o cost game *c* si chiama costo separabile del giocatore i il suo contributo marginale o costo marginale:

$$m_i = c(N) - c(N \setminus i)$$

Se la somma dei costi separabili dei giocatori è minore del costo del gioco si chiama costo non separabile del gioco la differenza tra i due valori, cioè:

$$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} m_i$$

I vari metodi si differenziano per come viene ripartito il costo non separabile.

Equa ripartizione (ECA)

Il costo non separabile viene ripartito in parti uguali tra i giocatori. In questo modo il giocatore i deve pagare il costo:

$$x_i = m_i + g(N)\ \frac{1}{n}$$

Costi di alternativa risparmiati (ACA)

Il costo non separabile viene ripartito tra i giocatori proporzionalmente al risparmio ottenuto da ciascuno per aver pagato il proprio costo separabile invece del costo che avrebbe pagato da solo; in altre parole definendo il risparmio del giocatore i come:

$$r_i = c(i) - m_i$$

si ha:

$$x_i = m_i + g(N)\ \frac{r_i}{\sum_{i \in N} r_i}$$

Cost Gap (CGA)

Il costo non separabile viene ripartito tra i giocatori proporzionalmente al migliore (minimo) massimo contributo che ciascuno è disposto a pagare facendo parte di una coalizione, cioè definendo il costo non separabile di una coalizione S come:

$$g(S) = c(S) - \sum_{i \in S} m_i$$

si ha che il giocatore i è disposto a pagare al più tutto il minimo costo non separabile delle coalizioni di cui può far parte, per cui ponendo $g_i = \min \{g(S) \mid i \in S\}$ si ha:

$$x_i = m_i + g(N)\ \frac{g_i}{\sum_{i \in N} g_i}$$

Osservazione

- Nel caso di un gioco di profitto esiste un concetto di soluzione equivalente al CGA, il valore τ, introdotto da Tijs nel 1981, che si basa su principi differenti; questo fatto rafforza reciprocamente i due concetti di soluzione. Posto $M_i = \min \left\{ c(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} m_j \right\}$ si ha:

  $$\tau = \alpha M + (1 - \alpha)\, m$$

  dove α è l'unico valore per cui $\sum_{i \in N} \tau_i = c(N)$. Il valore τ esiste solo se il gioco è quasi-bilanciato, cioè $M_i \geq m_i$, $\forall\ i \in N$ e $\sum_{i \in N} M_i \geq c(N) \geq \sum_{i \in N} m_i$.

Esempio

Sia dato il seguente gioco <N, *c*>:

$N = \{1, 2, 3\}$;

$c(1) = 50$; $c(2) = 60$; $c(3) = 100$; $c(12) = 91$; $c(13) = 110$; $c(23) = 130$; $c(N) = 150$.

Applicando le definizioni precedenti si hanno:

Costi separabili

$m_1 = c(N) - c(N\backslash 1) = 150 - 130 = 20$

$m_2 = c(N) - c(N\backslash 2) = 150 - 110 = 40$

$m_3 = c(N) - c(N\backslash 3) = 150 - 91 = 59$

Costo non separabile

$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} m_i = 150 - (20 + 40 + 59) = 31$

Risparmi

$r_1 = c(1) - m_1 = 50 - 20 = 30$

$r_2 = c(2) - m_2 = 60 - 40 = 20$

$r_3 = c(3) - m_3 = 100 - 59 = 41$

Costi non separabili delle coalizioni

$g(1) = c(1) - m_1 = 50 - 20 = 30$

$g(2) = c(2) - m_2 = 60 - 40 = 20$

$g(3) = c(3) - m_3 = 100 - 59 = 41$

$g(12) = c(12) - (m_1 + m_2) = 91 - (20 + 40) = 31$

$g(13) = c(13) - (m_1 + m_3) = 110 - (20 + 59) = 31$

$g(23) = c(23) - (m_2 + m_3) = 130 - (40 + 59) = 31$

Minimi costi non separabili

$g_1 = \min \{g(1), g(12), g(13), g(N)\} = \min \{30, 31, 31, 31\} = 30$

$g_2 = \min \{g(2), g(12), g(23), g(N)\} = \min \{20, 31, 31, 31\} = 20$

$g_3 = \min \{g(3), g(13), g(23), g(N)\} = \min \{40, 31, 31, 31\} = 31$

I differenti criteri forniscono:

ECA $x_1 = m_1 + g(N)\ \frac{1}{n} = 20 + (1/3)31 = 30.333$

$x_2 = m_2 + g(N)\ \frac{1}{n} = 40 + (1/3)31 = 50.333$

$x_3 = m_3 + g(N)\ \frac{1}{n} = 59 + (1/3)31 = 69.333$

ACA $x_1 = m_1 + g(N)\ \frac{r_1}{r_1 + r_2 + r_3} = 20 + (30/91)31 = 30.220$

$x_2 = m_2 + g(N)\ \frac{r_2}{r_1 + r_2 + r_3} = 40 + (20/91)31 = 46.813$

$x_3 = m_3 + g(N)\ \frac{r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = 59 + (41/91)31 = 72.967$

CGA $x_1 = m_1 + g(N)\ \frac{g_1}{g_1 + g_2 + g_3} = 20 + (30/81)31 = 31.481$

$x_2 = m_2 + g(N)\ \frac{g_2}{g_1 + g_2 + g_3} = 40 + (20/81)31 = 47.654$

$x_3 = m_3 + g(N)\ \frac{g_3}{g_1 + g_2 + g_3} = 59 + (31/81)31 = 70.864$

Per completare l'esempio si possono calcolare le altre allocazioni viste, valore di Shapley e

Nucleolo. Gli indici di Banzhaf-Coleman non vengono considerati poichè il gioco non è semplice.

Valore di Shapley

Permutazioni	Contributi marginali		
1 2 3	50	41	59
1 3 2	50	40	60
2 1 3	31	60	59
2 3 1	20	60	70
3 1 2	10	40	100
3 2 1	20	30	100
Valore di Shapley	30.167	45.167	74.667

Nucleolo

La prima soluzione è x = (31, 50, 69) con α_0 = -10 e S_0 = {{1, 3}, {2}}; poichè la soluzione non è unica si itera riscrivendo i vincoli u_3 e u_6 come:

$v_3 : x_1 + x_3 = c(13) - \alpha_0$

$v_6 : x_2 = c(2) - \alpha_0$

La seconda soluzione è x = (30.5, 50.0, 69.5) con α_1 = -10.5 e S_1 = {{1, 2}, {2, 3}}; poichè la soluzione è unica la ripartizione trovata costituisce il nucleolo.

Le allocazioni proposte appartengono tutte al nucleo.

I risultati dell'esempio sono ricapitolati nella tabella seguente:

Criterio	Allocazioni		
	x_1	x_2	x_3
ECA	30.333	50.333	**69.333**
ACA	30.220	46.813	72.967
CGA	31.481	47.654	70.864
Valore di Shapley (φ)	**30.166**	**45.166**	74.666
Nucleolo (ν)	30.500	50.000	69.500

◊

CAPITOLO V
CLASSI DI GIOCHI

V.1 INTRODUZIONE

Per concludere si possono esaminare brevemente alcune classi di giochi che sono state definite per meglio rappresentare varie situazioni reali; di seguito viene dato un elenco che non ha alcuna pretesa di completezza ed esaustività:

- Voting games
  - Weighted Majority games
- Bankruptcy games
- Operations Research games
  - Production and Linear Transformation games
  - Network games
    - Flow games
    - Connection games (Minimum Cost Spanning Tree games, Forest games, Extension games, Fixed tree games)
    - Shortest Path games
    - Travelling Salesman games
    - PERT games
  - Sequencing, Assignment and Permutation games
  - Inventory games
  - Location games
  - Transportation games

Nei paragrafi successivi verranno esaminati brevemente alcune di queste classi.

V.2 WEIGHTED MAJORITY GAMES

Sono giochi semplici che si prestano a rappresentare le situazioni di voto che si possono avere in un consiglio di amministrazione più che in un parlamento. Nel secondo caso infatti le unioni tra i partiti sono meno elastiche che nel primo caso, in quanto sono presenti situazioni di incompatibilità; ad esempio un partito di estrema destra e un partito di estrema sinistra ben difficilmente potranno dare vita ad una coalizione di governo. In generale in un gioco di maggioranza pesata ad ogni giocatore è associato un numero positivo w_i, $i \in N$ che esprime il suo "peso", ad esempio il numero di azioni; si definisce poi un valore positivo $q \leq \sum_{i \in N} w_i$ che indica la quota necessaria per approvare un provvedimento. Il gioco v si indica con $(q; w_1, w_2, ..., w_n)$ ed è definito come:

$$v(\mathrm{S}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{N}} w_\mathrm{i} > q \\ 0 & \text{se} \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{N}} w_\mathrm{i} \le q \end{cases} \qquad \forall\ \mathrm{S} \subseteq \mathrm{N}$$

Il gioco risulta monotono e spesso si suppone anche $q > \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{N}} w_\mathrm{i}$ in modo che se S è vincente N\S sia perdente.

V.3 BANKRUPTCY GAMES

Sono giochi che possono essere applicati a tutte le situazioni di allocazione di una risorsa insufficiente. Un problema di bancarotta può essere visto come un insieme di agenti ciascuno dei quali ha una richiesta $d_\mathrm{i} > 0$, $\mathrm{i} \in \mathrm{N}$ su un capitale E, con $E < \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{N}} d_\mathrm{i}$; lo scopo del problema è trovare una divisione ammissibile $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$, cioè tale che $0 \le \mathrm{x}_\mathrm{i} \le d_\mathrm{i}$, $\mathrm{i} \in \mathrm{N}$ e $\sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{N}} \mathrm{x}_\mathrm{i} = E$.

Le tre soluzioni più comuni sono:

- PROP (Proportional)

  Ciascun giocatore riceve una quota proporzionale alla sua richiesta:

  $$\mathrm{PROP}_\mathrm{i} = E\,\frac{d_\mathrm{i}}{\sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{N}} d_\mathrm{i}} \qquad \forall\ \mathrm{i} \in \mathrm{N}$$

- CEA (Constrained Equal Award)

  Ciascun giocatore riceve un'eguale quantità, con il limite della sua richiesta:

  $$\mathrm{CEA}_\mathrm{i} = \min\ \{\alpha, d_\mathrm{i}\} \qquad \forall\ \mathrm{i} \in \mathrm{N}$$

  con α tale che $\sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{N}} \mathrm{CEA}_\mathrm{i} = E$.

- CEL (Constrained Equal Loss)

  Ciascun giocatore riceve la sua richiesta, decurtata di un'eguale quantità, salvo che il risultato sia negativo, nel qual caso riceve 0:

  $$\mathrm{CEL}_\mathrm{i} = \max\ \{0, d_\mathrm{i} - \beta\} \qquad \forall\ \mathrm{i} \in \mathrm{N}$$

  con β tale che $\sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{N}} \mathrm{CEL}_\mathrm{i} = E$.

Dal punto di vista della Teoria dei Giochi è possibile definire un gioco (pessimistico) definito da:

$$v(\mathrm{S}) = \max\ \left\{0, E - \sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{N}\setminus\mathrm{S}} d_\mathrm{i}\right\} \qquad \forall\ \mathrm{S} \subseteq \mathrm{N}$$

La caratteristica più importante di questo gioco è che il nucleo coincide con l'insieme delle divisioni ammissibili; inoltre tutte le soluzioni proprie della Teoria dei Giochi che stanno nel nucleo diventano possibili divisioni.

V.4 OPERATIONS RESEARCH GAMES

Questi giochi risultano estremamente interessanti da un punto di vista strutturale e computazionale in quanto "ereditano" dal corrispondente problema di Ricerca Operativa alcune caratteristiche che permettono di semplificare alcuni aspetti complessi della Teoria dei Giochi, primo fra tutti il significato, oltre che il valore, da attribuire alla funzione caratteristica. I giochi di produzione, già

visti a proposito del nucleo, sono un ottimo esempio di questo aspetto di questa classe di giochi. Infatti per costruire la funzione caratteristica è sufficiente risolvere alcuni problemi di programmazione lineare ed è facile caratterizzare alcune soluzioni del nucleo.

V.4.1 NETWORK GAMES

Una sottoclasse molto ampia è costituita dai giochi su reti. Si distinguono due tipi di giochi su reti:

Giochi sugli archi: I giocatori controllano gli archi.

Giochi sui nodi: I giocatori controllano i nodi.

Il controllo non è necessariamente biunivoco, nel senso che un giocatore può controllare più elementi oppure un elemento può essere controllato da più giocatori (comitato) oppure possono esistere elementi non controllati da alcun giocatore (pubblici).

Flow Games

Ogni giocatore può controllare più archi e ogni arco è controllato da un solo giocatore; non ci sono archi pubblici. Il valore di una coalizione è dato dal valore del flusso massimo dalla sorgente al pozzo, utilizzando la sottorete che contiene solo archi controllati dai giocatori della coalizione.

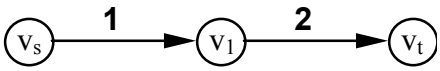
Questi giochi sono bilanciati e una allocazione nel nucleo si può ottenere assegnando ai giocatori che controllano gli archi di un taglio di capacità minima le capacità degli archi del taglio, in accordo col risultato di Owen.

Le allocazioni corrispondenti ai tagli di capacità minima non rispettano alcun criterio di equità.

Esempio

Si consideri il seguente problema di flusso da $\mathbf{v}_s$ a $\mathbf{v}_t$, dove il giocatore I controlla il primo arco e II controlla il secondo. La funzione caratteristica del gioco è:

$v(\mathrm{I}) = v(\mathrm{II}) = 0$; $v(\mathrm{I}, \mathrm{II}) = 1$.



Applicando il risultato esposto si ottiene l'allocazione x = (1, 0) corrispondente al taglio contenente l'arco da $\mathbf{v}_s$ a $\mathbf{v}_1$. Tale allocazione sta nel nucleo, ma tratta in modo diverso i giocatori che sono simmetrici rispetto al gioco, mentre il giocatore II "contribuisce" anche maggiormente alla rete, fornendo un arco di capacità superiore. ◊

Shortest Path Games

Ogni giocatore può controllare più nodi e ogni nodo è controllato da un solo giocatore; non ci sono nodi pubblici; alcuni nodi sono detti sorgenti, altri pozzi.

Il valore di una coalizione è dato dalla differenza tra il ricavo ottenuto trasportando un bene da una qualsiasi sorgente ad un qualsiasi pozzo tra quelli controllati dai giocatori della coalizione e il costo del cammino minimo che attraversa solo nodi posseduti dai giocatori della coalizione; se la

differenza è negativa il valore della coalizione è nullo.

Poichè il nucleo può essere vuoto si può utilizzare il valore di Shapley come regola di ripartizione dei profitti; è possibile dare la seguente caratterizzazione (principi di equità):

- efficienza;
- irrilevanza (i giocatori che controllano nodi isolati ricevono un payoff nullo);
- adiacenza (i giocatori che controllano gli estremi di un arco hanno la stessa variazione di payoff se si elimina l'arco);
- non collegamento (due giocatori che non sono connessi hanno la stessa variazione di payoff se si elimina l'altro giocatore).

Minimum Cost Spanning Tree Games

Ogni giocatore controlla un solo nodo e ogni nodo è controllato da un solo giocatore; non ci sono nodi pubblici, eccetto la sorgente, alla quale tutti vogliono essere collegati. Il problema richiede che il grafo sia non orientato e completo (clique). Il valore di una coalizione è dato dal valore dell'albero ricoprente di costo minimo che unisce i nodi corrispondenti ai giocatori della coalizione con la sorgente, attraversando solo nodi posseduti dai giocatori della coalizione.

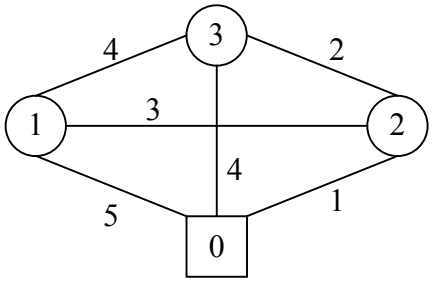
Eliminando la restrizione sui nodi si ottiene un gioco monotono, cioè un gioco in cui il valore della coalizione non decresce se si aggiungono altri giocatori.

Esempio

Sia N = {1, 2, 3} con la rete a lato. Il gioco non monotono è:

$v(1) = 5$; $v(2) = 1$; $v(3) = 4$

$v(12) = 4$; $v(13) = 8$; $v(23) = 3$; $v(123) = 6$



Il gioco monotono è:

$v(1) = 4$; $v(2) = 1$; $v(3) = 3$

$v(12) = 4$; $v(13) = 6$; $v(23) = 3$; $v(123) = 6$

Questi giochi sono bilanciati e una allocazione nel nucleo si ottiene assegnando ad ogni giocatore il costo dell'ultimo arco dell'unico cammino non orientato che nell'albero di costo minimo collega il nodo corrispondente alla radice: anche in questo caso la soluzione non è equa in quanto favorisce i giocatori più "lontani" dalla sorgente.

V.4.2 SEQUENCING GAMES

Questi giochi, come anche i giochi di assegnazione e di permutazione, modellano le situazioni in cui i giocatori possono trarre vantaggio da uno scambio di ruolo o di posizione, come in questo caso. I giocatori attendono un servizio, ad esempio ad uno sportello, e che ogni giocatore conosca il proprio tempo di servizio t_i, $i \in N$ e il costo per unità di tempo c_i, $i \in N$. Il valore di una coalizione

è dato dalla somma dei risparmi ottenuti dallo scambio tra giocatori adiacenti.

Una interessante soluzione che sta nel nucleo del gioco e risulta computazionalmente semplice è la Equal Gain Splitting Rule (EGS) che divide in parti uguali tra due giocatori i e j il guadagno g_{ij} dovuto al loro scambio, cioè $g_{ij} = (t_i\, c_j - t_j\, c_i)_+$.

Esempio

Sia N = {I, II, III} e siano t = (5, 3, 4) c = (5, 9, 8); secondo un risultato di Smith (1956) l'ordine ottimale dipende solo dall'urgenza, cioè dal rapporto tra il costo e il tempo che in questo caso è u = (1, 3, 2) per cui l'ordine ottimale è II, III, I. Il gioco associato è:

v(I) = v(II) = v(III) = 0	un giocatore non può scambiarsi
v(I, II) = 30	$(5x9 - 3x5)_+$
v(I, III) = 0	i giocatori I e III non sono adiacenti; si noti che il giocatore II accetterebbe lo scambio tra I e III
v(II, III) = 0	$(3x8 - 9x4)_+$
v(I, II, III) = 50	$(5x9 - 3x5)_+ + (5x8 - 4x5)_+$

ECG = (25, 15, 10) ◊

BIBLIOGRAFIA

TESTI DI BASE

Aumann RJ, Hart S (1992) *Handbook of Game Theory* (Vol. 1), Elsevier, Amsterdam, The Netherlands

Aumann RJ, Hart S (1994) *Handbook of Game Theory* (Vol. 2), Elsevier, Amsterdam, The Netherlands

Costa G, Mori PA (1994) *Introduzione alla Teoria dei Giochi*, Il Mulino, Italia

Gibbons R (1994) Primo *Corso di Teoria dei Giochi*, Il Mulino, Italia

Myerson RB (1991) *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge, USA

Osborne MJ, Rubinstein A (1994) *A Course in Game Theory* - MIT Press, USA

Owen G (1995) *Game Theory (III ed)* Academic Press, San Diego, CA, USA

von Neumann J, Morgenstern O (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, USA

TESTI DI APPROFONDIMENTO

Aumann RJ (1974) *Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies*, Journal of Mathematical Economics 1: 67-96

Aumann RJ, Maschler M (1964) *The Bargaining Set for Cooperative Games*, in Advances in Game Theory (Annals of Mathematics Studies, 52) (Dresher M, Shapley LS, Tucker AW eds.), Princeton: Princeton University Press : 443-476

Aumann RJ, Maschler M (1985) *Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud*, J Economic Theory 36 : 195-213

Aumann RJ, Peleg B (1960) Von Neumann - Morgenstern Solutions to Cooperative Games without Side Payments, Bullettin of the American Mathematical Society 66: 173-179

Banzhaf JF (1965) Weighted Voting doesn't Work: A Mathematical Analysis, Rutgers Law Review 19 : 317-343

Bjørndal E, Koster M, Tijs S (1999) *Weighted Allocation Rules for Standard Fixed Tree Games*, CentER Discussion Paper 9979

Bondareva ON (1963) *Certain Applications of the Methods of Linear Programming to the Theory of Cooperative Games*, Problemy Kibernetiki 10 : 119-139

Borm P, Hamers H, Hendrickx R (2001) *Operations Research Games: A Survey*, TOP 9 : 139-216

Brams SJ, Taylor AD (1996) *Fair-Division*, Cambridge University Press, New York, USA

Brams SJ, Taylor AD (1999) *The Win-Win Solution*, W.W.Norton & Company, London, UK

Branzei R, Ferrari G, Fragnelli V, Tijs S (2002) *Two Approaches to the Problem of Sharing Delay Costs in Joint Projects*, accettato su Annals of Operations Research

Coleman JS (1971) *Control of Collectivities and Power of a Collectivity to Act*, in Social Choice (Lieberman B ed.), Gordon and Breach, London : 269-300

Curiel I, Maschler M, Tijs S (1987) *Bankruptcy Games*, Zeitschrift für Operations Research Series A 31 : 143-159

Curiel I, Pederzoli G, Tijs S (1989) *Sequencing Games*, EJOR 40 : 344-351

Curiel I (1997) *Cooperative Game Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands

Davis M, Maschler M (1965) *The Kernel of a Cooperative Game*, Naval Research Logistics Quarterly 12: 223-259

Deegan J, Packel EW (1978) *A New Index of Power for Simple n-Person Games*, Int J Game Theory 7 : 113-

123

Feltkamp V, Tijs S, Muto S (1994) *Minimum Cost Spanning Extension Problems: The Proportional Rule and the Decentralized Rule*, CentER Discussion Paper 9496

Flood MA (1958) *Some Experimental Games*, Management Science 5: 5-26

Fragnelli V, Garcia-Jurado I, Mendez-Naya L (2000) *On Shortest Path Games*, Math Meth Op Res 52 : 139-216

Gillies DB (1953), *Some Theorems on n-person Games*, PhD Thesis, Princeton: Princeton University Press

Gillies DB (1959) *Solutions to General Non-Zero-Sum Games*, pp. 47-85 in Contributions to the Theory of Games, Volume IV (Annals of Mathematics Studies, 40) (Tucker AW, Luce RD eds.), Princeton: Princeton University Press.

Granot D, Huberman G (1981) *Minimum Cost Spanning Tree Games*, Math Prog 21 : 1-18

Harsanyi JC (1966), *A General Theory of Rational Behavior in Game Situations*, Econometrica 34: 613-634.

Harsanyi JC (1967-68) *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, Parts I, II and III*, Management Science 14: 159-182, 320-334 and 486-502

Herrero C, Villar A (2001) *The Three Musketeers: Four Classical Solutions to Bankruptcy Problems*, Math Soc Sci 42 : 307-328

Kalai E, Smorodinsky M (1975) *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*, Econometrica 43: 513-518

Kalai E, Zemel E (1982) *Totally Balanced Games and Games of Flow*, Math Op Res 7 : 476-478

Kuhn HW (1953) *Extensive Games and the Problem of Information*, pp. 193-216 in Contributions to the Theory of Games, Volume II (Annals of Mathematics Studies, 28) (Kuhn HW, Tucker AW eds.), Princeton: Princeton University Press

Littlechild SC, Owen G (1973) *A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case*, Management Science 20 : 370-372

Littlechild SC, Thompson GF (1977) *Aircraft Landing Fees: A Game Theory Approach*, Bell Journal of Economics 8 : 186-204

Lucas WF (1968), *A Game with No Solution*, Bulletin of the American Mathematical Society 74: 237-239.

Maschler M, Perles M (1981) *The Superadditive Solution for the Nash Bargaining Game*, International Journal of Game Theory 10: 163-193

Maynard Smith J (1972) *Game Theory and the Evolution of Fighting*, pp.8-28 in On Evolution (Maynard Smith J), Edinburgh: Edinburgh University Press

Meca A, Timmer J, García-Jurado I, Borm P (1999) *Inventory Games*, CentER Discussion Paper 9953

Nash JF (1950a) *Equilibrium Points in N-Person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36: 48-49

Nash JF (1950b) *The Bargaining Problem*, Econometrica 18: 155-162

Nash JF (1953) *Two Person Cooperative Games*, Econometrica 21: 128-140

Owen G (1975) *On the Core of Linear Production Games*, Math Prog 9 : 358-370

Owen G (1977) *Values of Games with a Priori Unions*, Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems 141 : 76-88

Ransmeier JS (1942) *The Tennessee Valley Authority: A Case Study in the Economics of Multiple Purpouse Stream Planning*. Nashville: The Vanderbilt University Press

Sanchez-Soriano J, Lopez MA, Garcia-Jurado I (2001) *On the Core of Transportation Games*, Math Soc Sci 41 : 215-225

Schmeidler D (1969) *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*, SIAM Journal of Applied Mathematics 17: 1163-1170

Selten R (1965) *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit*, Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft 121: 301-324 and 667-689

Shapley LS (1953), *A Value for n-Person Games*, in Contributions to the Theory of Games, Vol II (Annals of Mathematics Studies 28) (Kuhn HW, Tucker AW eds.), Princeton, Princeton University Press : 307-317

Shapley LS, Shubik M (1954), *A Method for Evaluating The Distribution of Power in a Committee System*, American Political Science Review 48 : 787-792

Shapley LS, Shubik M (1972), *The Assignment Game I: The Core*, Int. J. Game Theory 1 : 111-130

Shubik M (1959), *Strategy and Market Structure: Competition, Oligopoly, and the Theory of Games*. New York: Wiley.

Shubik M (1982), *Game Theory in Social Science: Concepts and Solutions*. Cambridge: MIT Press.

Straffin PD, Heaney JP (1986) *Game Theory and the Tennessee Valley Authority*, Management Science 32 : 1015-1028

Tijs S, Parthasarathy T, Potters J, Prasad R (1984) *Permutation Games: Another Class of Totally Balanced Games*, OR Spektrum 6 : 119-123

Tijs SH (1981), *Bounds for the Core and the t-Value*, in Game Theory and Mathematical Economies (Moeschlin O, Pallaschke D eds.), Amsterdam, North Holland : 123-132

Tijs SH, Driessen TSH (1986) *Game Theory and Cost Allocation Problems*, Management Science 32 : 1015-1028

Timmer J, Borm P, Suijs J (2000) *Linear Transformation of Products: Games and Economies*, JOTA 105 : 677-706

Tucker AW (1950) *Memorandum on The Prisoner's Dilemma*

von Neumann J (1928) *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen 100 : 295-320

Young HP (1994) *Cost Allocation*, in Handbook of Game Theory (Aumann RJ, Hart S eds.) Vol. 2, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands : 1193-1235