Teoria dei Giochi

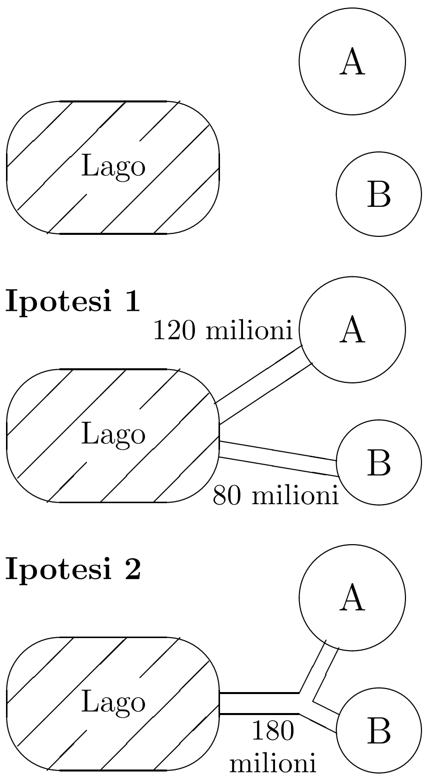
Vito Fragnelli

A.A. 2010-11

Capitolo 1

Teoria dei giochi e utilità

1.1 Esempio preliminare (da Young, 1994)



Due paesi A e B, aventi rispettivamente 3.600 e 1.200 abitanti, vogliono costruire un acquedotto attingendo allo stesso lago. Il problema può essere risolto utilizzando i metodi della programmazione matematica, tramite un modello del tipo seguente:

min *Spesa di costruzione*
s.t. *Collegare A al lago*
Rispettare le specifiche di A
Collegare B al lago
Rispettare le specifiche di B

Le soluzioni ammissibili possono essere raggruppate in due sottoinsiemi che corrispondono alle ipotesi 1 e 2 raffigurate a lato. La soluzione ottimale è:

x^* = *ipotesi 2*
z^* = *180 milioni*

Affinchè la soluzione sia attuabile deve esserci la disponibilità dei paesi ad accordarsi per una realizzazione in comune.

Se questa disponibilità esiste è necessario stabilire con quale criterio ripartire la spesa. Alcuni dei criteri possibili e i relativi costi per i due paesi sono i seguenti:

	Criterio	*A*	*B*
1	*Uguale divisione dei costi tra i paesi*	*90*	*90*
2	*Uguale divisione dei costi tra gli abitanti*	*135*	*45*
3	*Uguale divisione del risparmio tra i paesi*	*110*	*70*
4	*Uguale divisione del risparmio tra gli abitanti*	*105*	*75*
5	*Divisione dei costi (e del risparmio) in proporzione all'acquedotto singolo*	*108*	*72*

Si può osservare che il criterio 1 è il più vantaggioso per il paese A ma è rifiutato dal paese B, il criterio 2 è il più vantaggioso per il paese B ma è rifiutato dal paese A mentre gli altri criteri risultano più o meno vantaggiosi per i due paesi ma nessuno dei due può rifiutarne a priori qualcuno, anche se il paese A preferisce il criterio 4 e il paese B preferisce il criterio 3.

Serve quindi una metodologia di scelta. In altre parole la programmazione matematica risulta insufficiente a descrivere, e quindi risolvere, il problema dato.

La Teoria dei Giochi fornisce gli strumenti matematici per analizzare il problema e non fornisce "la" soluzione, ma propone una soluzione (*solution concept*).

1.2 Introduzione

La Ricerca Operativa classica suppone che le decisioni relative ad un problema siano prese da un unico decisore che può operare in totale autonomia e con completa libertà.

La Teoria dei Giochi tratta le situazioni in cui il risultato dipende dalle scelte fatte da più persone, dette *giocatori*, che operano perseguendo obiettivi che possono risultare comuni, ma non identici, differenti ed eventualmente contrastanti; possono essere presenti anche aspetti aleatori.

Il nome deriva dal libro *Theory of Games and Economic Behavior* di von Neumann e Morgenstern (1944).

Esempio 1.2.1 (Dilemma del prigioniero) *È uno dei problemi più noti della Teoria dei Giochi; è stato introdotto nel 1950 da Dresher e Flood (Flood, 1958); la "storiellina" seguente è dovuta a Tucker (1953). Due individui I e II sono stati arrestati per lo stesso reato e vengono interrogati separatamente dal giudice; ognuno può scegliere indipendentemente dall'altro di confessare (C) o non confessare (NC).*

Se entrambi non confessano vengono condannati per reati minori a due anni ciascuno; se entrambi confessano vengono condannati a cinque anni ciascuno; se uno confessa e l'altro no quello che confessa ha uno sconto di pena e viene condannato a un anno, mentre l'altro ha un'aggravante e viene condannato a sei anni. Le pene sono riportate nella tabella come coppia (I, II).

I/II	C	NC
C	$-5,-5$	$-1,-6$
NC	$-6,-1$	$-2,-2$

Ragionevolmente I sceglie C poichè consegue una condanna minore qualunque sia la scelta di II ($-5 > -6; -1 > -2$) *e analogamente II sceglie C. La decisione attesa è quindi (C, C), con una condanna a 5 anni per ciascuno (equilibrio in strategie dominanti), mentre per entrambi sarebbe più vantaggiosa la scelta (NC, NC) con 2 anni per ciascuno.* ♢

Esempio 1.2.2 (Battaglia dei sessi) *Due fidanzati devono scegliere tra andare al teatro (T) o alla partita (P). Lei (I) preferisce il teatro mentre lui (II) preferisce la partita, ma entrambi non hanno interesse a restare da soli, come riportato nella tabella. In questo caso non esiste una strategia dominante per nessun giocatore (ad esempio per I scegliendo T si ha che* $2 > 0$ *ma* $0 < 1$*).*

I/II	T	P
T	$2, 1$	$0, 0$
P	$0, 0$	$1, 2$

◊

Esempio 1.2.3 (Puro coordinamento) *È una significativa variante in cui entrambi i giocatori hanno le stesse preferenze.*

I/II	T	P
T	$1, 1$	$0, 0$
P	$0, 0$	$1, 1$

◊

Si possono fare alcune considerazioni.

Nell'Esempio 1.2.2 (e soprattutto nel 1.2.3) una telefonata per conoscere la decisione dell'altro giocatore, o un accordo al 50 per cento, o una strategia correlata possono risolvere facilmente il problema. Nell'Esempio 1.2.1 invece questo non succede in quanto la possibilità di comunicare renderebbe probabile un accordo per la strategia NC, ma al momento della decisione sia I che II risceglierebbero C, poichè $-1 > -2$.

Secondo la classificazione di Harsanyi (1966) si distinguono due classi di giochi:

Giochi non cooperativi	Non sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori.
Giochi cooperativi	Sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori.

Osservazione 1.2.1

- *Attualmente si preferisce assumere, più restrittivamente, che in un gioco non cooperativo i giocatori non possano nemmeno comunicare in quanto ciò potrebbe alterare il risultato.*

- *I giochi cooperativi sono divisi in due sottoclassi: giochi a utilità non trasferibile (NTU) o senza pagamenti laterali, e giochi a utilità trasferibile (TU) o a pagamenti laterali, che costituiscono un caso particolare dei giochi NTU.*

1.3 Rappresentazione di un gioco

Un gioco può essere presentato principalmente in tre forme: la forma estesa, introdotta da von Neumann (1928) e formalizzata da Kuhn (1953); la forma strategica, così chiamata da Shubik (1982), ma già definita forma normale da von Neumann e Morgenstern (1944); la forma caratteristica dovuta a von Neumann e Morgenstern (1944), usata per i giochi cooperativi.

Definizione 1.3.1

- *Si chiama funzione dei pagamenti (payoff) una funzione f che assegna ad ogni giocatore la sua vincita per ogni possibile terminazione del gioco.*
- *Si chiama strategia del giocatore i una funzione σ_i che assegna al giocatore i una mossa per ogni possibile situazione del gioco.*

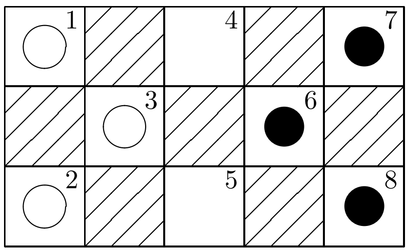
In altre parole la strategia può essere vista come un "piano di azione" che individua in ogni situazione del gioco una "azione" tra le tante possibili.

1.3.1 Forma estesa

È una descrizione puntuale del gioco, delle mosse e delle relative probabilità, della situazione dopo ogni mossa, delle strategie, degli insiemi di informazione (insiemi di nodi che globalmente rappresentano la situazione di un giocatore), ecc.; risulta molto ricca ma poco maneggevole.

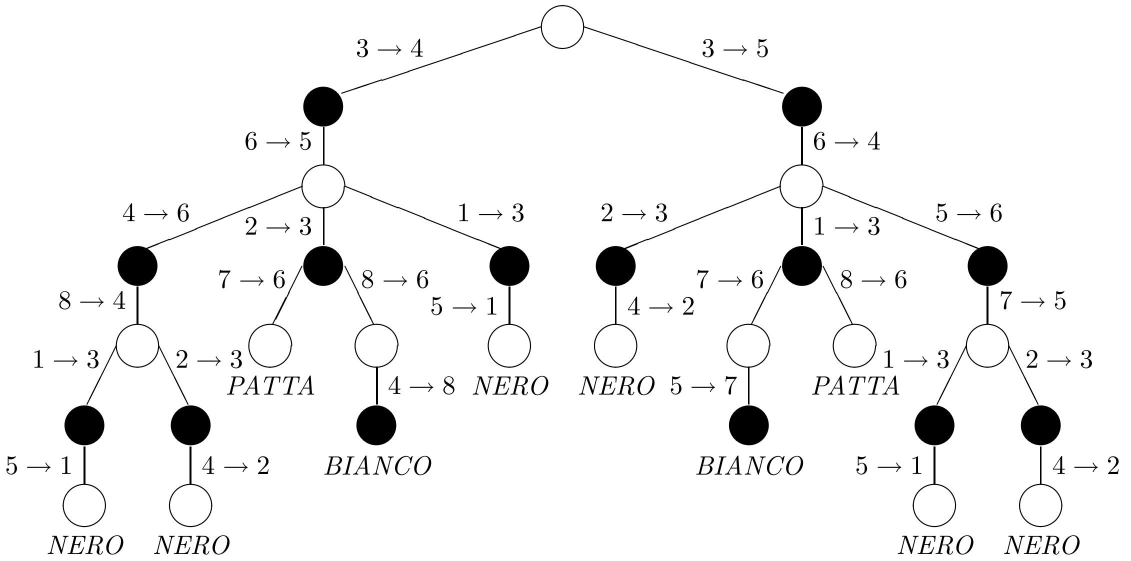
In generale si utilizza una rappresentazione ad albero in cui ad ogni nodo si associa una possibile situazione del gioco, agli archi uscenti da ciascun nodo si associano le possibili mosse del giocatore che è chiamato a muovere in quella situazione e ai nodi terminali si associano i valori delle vincite (payoff) di ciascun giocatore.

Esempio 1.3.1 (Dama semplificata) *Si consideri una dama giocata su una scacchiera costituita da 15 caselle (3 × 5) 8 bianche e 7 nere.*
Ogni giocatore ha tre pedine che muove sulle caselle bianche numerate da 1 a 8 (il bianco muove verso destra e il nero verso sinistra); se può "mangiare" una pedina dell'avversario deve farlo.



La partita termina con la vittoria del giocatore che riesce a portare per primo una sua pedina sull'ultima colonna, o viene considerata conclusa in parità se un giocatore non può muovere.

In questo caso non sono assegnate probabilità alle mosse, le strategie sono le sequenze di mosse (una per ogni possibile nodo), i payoff sono espressi come risultato della partita e gli insiemi di informazione contengono un solo nodo.
Il gioco può essere rappresentato in forma estesa dal seguente albero:



◇

1.3.2 Forma strategica

Se ci sono n giocatori si utilizza una $2n$-upla $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dove:

- $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ sono insiemi non vuoti contenenti le possibili strategie o scelte di ogni giocatore.

- $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sono funzioni reali definite sul prodotto cartesiano degli insiemi Σ_i cioè:

$$f_i : \prod_{k=1,\ldots,n} \Sigma_k \rightarrow \mathbb{R} \qquad i = 1, .., n$$

Una possibile interpretazione è che tutti i giocatori scelgono contemporaneamente la loro strategia e la f_i dice quale è il guadagno del giocatore i determinato dalle scelte fatte.

Definizione 1.3.2 *Una n-upla* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \prod_{k=1,\ldots,n} \Sigma_k$ *è detta* profilo di strategie.

Da quanto detto a proposito di strategie nella forma estesa, si può intuire la possibilità (e il modo) di passare dalla forma estesa a quella strategica (il passaggio inverso risulta più complesso).

Gli elementi della forma strategica possono essere riassunti in una tabella come negli esempi precedenti.

Se il gioco è a due giocatori si parla anche di *gioco a matrice doppia*, o *bimatrice*, in quanto i payoff dei giocatori possono essere rappresentati tramite due matrici.

1.3.3 Forma caratteristica

Questa forma può essere usata solo per i giochi cooperativi in quanto fa riferimento alla nozione di *coalizione*.

Definizione 1.3.3

- *Detto N l'insieme dei giocatori, ogni sottoinsieme S di N è detto coalizione. Se $S = N$ si ha la grande coalizione.*
- *Si dice funzione caratteristica di un gioco ad n giocatori una funzione indicata con v (se il gioco è senza pagamenti laterali si usa V ed è più complessa) per cui si ha:*

$$v : \wp(N) \to \mathbb{R} \text{ con } v(\emptyset) = 0$$

- *Se per ogni coppia di coalizioni disgiunte S e T si ha $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ la funzione v è detta additiva; se si ha $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ la funzione v è detta superadditiva; se si ha $v(S \cup T) \leq v(s) + v(T)$ la funzione v è detta subadditiva.*

In altre parole v assegna ad S la massima vincita possibile indipendentemente dal comportamento degli altri giocatori.

Osservazione 1.3.1

- *In generale la funzione caratteristica è sufficiente a descrivere il gioco, per cui possono essere identificati.*

Un gioco descritto tramite la funzione caratteristica è detto in *forma caratteristica* o *coalizionale*. Se la funzione caratteristica è additiva o superadditiva o subadditiva anche il gioco è detto *additivo* o *superadditivo* o *subadditivo*. Se per ogni coalizione S si ha $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$ il gioco è detto *a somma costante*.

Esempio 1.3.2 (Maggioranza semplice) *Tre giocatori vogliono conseguire un risultato; se almeno due di essi si uniscono raggiungono il loro obiettivo. Questa situazione può essere rappresentata dal seguente gioco:*

$N = \{1, 2, 3\}$

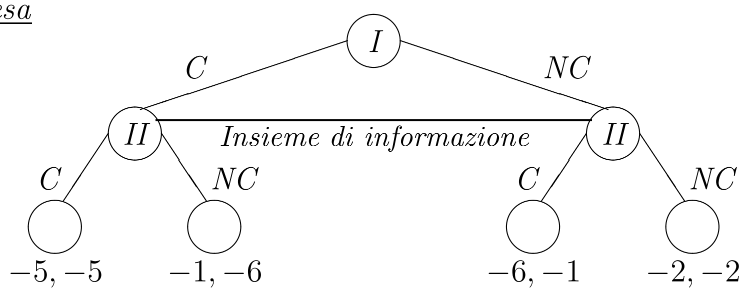
$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$

Il modello è molto semplice, ma anche limitato (ad esempio non è detto come si realizza l'accordo tra i giocatori). ♢

La forma caratteristica costituisce una descrizione molto "povera" del gioco, in quanto non permette di definire la vincita di ogni singolo giocatore della coalizione, ma solo la vincita complessiva.

Esempio 1.3.3 (Rappresentazioni del dilemma del prigioniero)

Forma estesa



Forma strategica

$\Sigma_I = \{C, NC\}; \Sigma_{II} = \{C, NC\}$
$f_I(C, C) = -5; f_I(C, NC) = -1; f_I(NC, C) = -6; f_I(NC, NC) = -2$
$f_{II}(C, C) = -5; f_{II}(C, NC) = -6; f_{II}(NC, C) = -1; f_{II}(NC, NC) = -2$

Forma caratteristica

$N = \{I, II\}$
$v(\emptyset) = 0; v(I) = v(II) = -5; v(I, II) = -4$ ♢

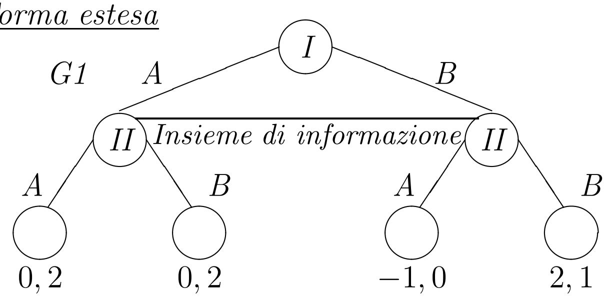
In generale la forma estesa contiene più informazione sul gioco rispetto alla forma strategica, che risulta comunque sufficiente a rappresentare un gioco.

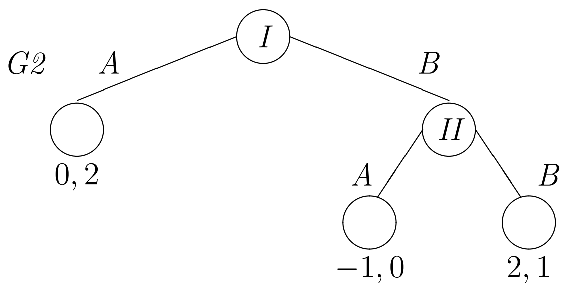
Esempio 1.3.4 (Rappresentazioni in forma estesa e in forma strategica) *Si considerino i due seguenti giochi:*

G1 Due giocatori I e II scelgono contemporaneamente tra due possibili strategie A e B; se giocano (A, A) oppure (A, B) i payoff sono $(0, 2)$, se giocano (B, A) i payoff sono $(-1, 0)$, se giocano (B, B) i payoff sono $(2, 1)$.

G2 Due giocatori I e II scelgono successivamente tra due possibili strategie A e B; se il giocatore I gioca A il gioco termina con payoff $(0, 2)$, se gioca B il turno passa al giocatore II; se II gioca A il gioco termina con payoff $(-1, 0)$, se gioca B il gioco termina con payoff $(2, 1)$.

Forma estesa





Forma strategica

G1 - G2

I/II	A	B
A	$0, 2$	$0, 2$
B	$-1, 0$	$2, 1$

La forma strategica è la stessa, ma ovviamente è sufficiente a descrivere i giochi in quanto non esiste una differenza sostanziale. ♢

1.4 Teoria dell'utilità

Negli esempi fatti era ovvio quale potesse essere lo scopo dei giocatori, ma in generale è necessario essere più precisi. In questo paragrafo si definiscono i concetti di *preferenza* e di *utilità di von Neumann-Morgenstern* che permettono di assegnare e interpretare i valori numerici utilizzati nelle rappresentazioni dei giochi.
I giocatori cercano di adottare una strategia che permetta loro di giungere al risultato che preferiscono, cioè vogliono massimizzare la loro utilità; al fine di identificare quale risultato si vuole perseguire è necessario prendere in considerazione valori differenti: economico, sentimentale, sociale, ecc. Ad esempio se un giocatore deve decidere se donare una somma di denaro senza ricevere nulla in cambio, considerando solo i valori monetari la decisione sarebbe sempre non donare.

Definizione 1.4.1

- *Dati due eventi A e B si dice che A è preferibile a B per un giocatore se egli cerca di conseguire A invece di B e si indica con $A \succ B$.*
- *Dati due eventi A e B si dice che A è indifferente a B per un giocatore se nessuno è preferibile all'altro e si indica con $A \equiv B$.*

Assiomi

A1 *Dati due eventi A e B allora $A \succ B$ oppure $B \succ A$ oppure $A \equiv B$.*
A2 $A \equiv A$.
A3 $A \equiv B \Rightarrow B \equiv A$.
A4 $A \equiv B, B \equiv C \Rightarrow A \equiv C$.
A5 $A \succ B, B \succ C \Rightarrow A \succ C$.
A6 $A \succ B, B \equiv C \Rightarrow A \succ C$.
A7 $A \equiv B, B \succ C \Rightarrow A \succ C$.

Osservazione 1.4.1

- *L'assioma* **A1** *è detto di* completezza delle preferenze *o* legge di tricotomia*; gli assiomi* **A2**, **A3** *e* **A4** *sono detti rispettivamente di* riflessività dell'indifferenza, *di* simmetria dell'indifferenza *e di* transitività dell'indifferenza, *conseguentemente l'indifferenza è una* relazione di equivalenza*; l'assioma* **A5** *è detto di* transitività della preferenza*; gli assiomi* **A6** *e* **A7** *sono detti di* transitività della preferenza sull'indifferenza *(cfr. Owen, 1994).*

- *La relazione di preferenza è solo qualitativa e non quantitativa, per cui non si adatta a definire quanto si può ottenere in più a fronte di un rischio maggiore. Inoltre nessun bene soddisfa l'ipotesi di linearità, tranne al più in brevi intervalli.*

Gli eventi possono essere certi oppure incerti secondo una probabilità nota; tale situazione viene rappresentata tramite il concetto di lotteria.

Definizione 1.4.2 *Dati due eventi A e B si chiama lotteria l'evento $rA + (1 - r)B, 0 \leq r \leq 1$, in cui A si verifica con probabilità r e l'evento B con probabilità $1 - r$.*

Osservazione 1.4.2

- *La lotteria non è una combinazione lineare di eventi, in quanto il risultato può essere solo A o B e non qualcosa di intermedio; la lotteria permette di valutare l'evento "esce A o esce B".*

Proprietà

P1 $A \equiv C \Rightarrow \{rA + (1 - r)B\} \equiv \{rC + (1 - r)B\} \quad \forall r,\ \forall B$

P2 $A \succ C \Rightarrow \{rA + (1 - r)B\} \succ \{rC + (1 - r)B\} \quad r > 0, \forall B$

P3 $A \succ C \succ B \Rightarrow \exists! r,\ 0 < r < 1$ *t.c.* $\{rA + (1 - r)B\} \equiv C$

Osservazione 1.4.3

- *Se un decisore soddisfa gli assiomi* **A1** - **A7** *e le proprietà* **P1** - **P3** *viene considerato "razionale".*

Esempio 1.4.1 (Preferenze) *Siano date le lotterie:*

$$\begin{aligned} E_1 &= \{0, 100 \text{ con } \mathbb{P}(0) = 1/2, \mathbb{P}(100) = 1/2\} \\ E_2 &= \{40, 60 \text{ con } \mathbb{P}(40) = 3/4, \mathbb{P}(60) = 1/4\} \\ E_3 &= \{0, 100, 40, 60 \text{ con } \mathbb{P}(0) = 1/4, \mathbb{P}(100) = 1/4, \mathbb{P}(40) = 3/8, \mathbb{P}(60) = 1/8\} \end{aligned}$$

Il guadagno atteso di E_1 è 50, quello di E_2 è 45 e quello di E_3 è 47.5, ma questo non impone una preferenza tra i tre eventi, nel senso che E_1 permette guadagni maggiori, E_2 garantisce rischi minori ed E_3 è intermedio; le uniche relazioni da soddisfare sono:

$$\begin{array}{l} E_1 \equiv E_2 \Rightarrow E_1 \equiv E_3, E_2 \equiv E_3 \\ \textit{oppure} \\ E_1 \succ E_2 \Rightarrow E_1 \succ E_3, E_3 \succ E_2 \\ \textit{oppure} \\ E_2 \succ E_1 \Rightarrow E_2 \succ E_3, E_3 \succ E_1 \end{array}$$

$\diamondsuit$

Dato un insieme di eventi E, una relazione di preferenza su E può essere rappresentata con una funzione di utilità $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni coppia di eventi $E_1, E_2 \in E$ si ha:

$$\begin{array}{l} E_1 \succ E_2 \Leftrightarrow u(E_1) > u(E_2) \\ u(rE_1 + (1 - r)E_2) = ru(E_1) + (1 - r)u(E_2) \end{array}$$

Osservazione 1.4.4

- *La funzione di utilità permette di quantificare le preferenze.*
- *L'utilità di von Neumann-Morgenstern impone la linearità sulle lotterie.*

La funzione u è unica a meno di trasformazioni affini, cioè u è una funzione di utilità se e solo se lo è anche:

$$\hat{u} = \alpha u + \beta \text{ con } \alpha > 0$$

Esempio 1.4.2 (Funzioni di utilità) *Il dilemma del prigioniero può essere rappresentato con una qualunque delle seguenti matrici:*

I/II	C	NC
C	$-5,-5$	$-1,-6$
NC	$-6,-1$	$-2,-2$

I/II	C	NC
C	$1,1$	$5,0$
NC	$0,5$	$4,4$

I/II	C	NC
C	$-4,0$	$0,-10$
NC	$-5,40$	$-1,30$

Le tre matrici sono legate dalle relazioni affini:

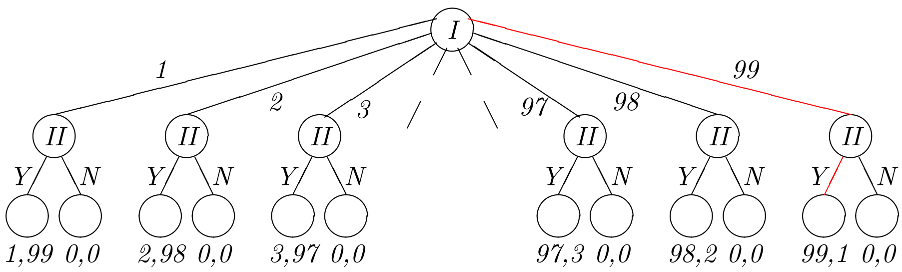
$$\begin{array}{ll} u'_I = u_I + 6 & u''_I = u_I + 1 \\ u'_{II} = u_{II} + 6 & u''_{II} = 10u_{II} + 50 \end{array} \qquad \diamondsuit$$

Per evidenziare la differenza tra guadagno e utilità può essere interessante il seguente esempio.

Esempio 1.4.3 (Ultimatum game) *Due persone devono dividersi la cifra di 100 euro con le seguenti regole:*

- *I propone una divisione (numeri interi, lasciando almeno 1 euro a ciascuno)*
- *se II accetta la divisione proposta, la divisione ha luogo*
- *se II non accetta la divisione proposta, non si assegna alcuna cifra*
- *entrambe le persone non sanno e non sapranno mai chi è l'altra.*

Quale cifra conviene proporre a I?
La scelta ottimale del secondo giocatore è accettare sempre. In conseguenza la scelta ottimale del primo giocatore è proporre il massimo.



Nelle sperimentazioni, questa soluzione non si realizza quasi mai, poichè l'utilità reale dei giocatori tiene conto di altri fattori, ad esempio l'equità, e quindi una funzione di utilità che dipende solo dalla quantità di denaro non rappresenta le preferenze dei giocatori. $\diamondsuit$

1.5 Game Form

E' possibile evidenziare esplicitamente la differenza tra le *regole del gioco* e le *preferenze* dei giocatori facendo riferimento alla *game form.*

Esempio 1.5.1 (Decisore) *Si consideri la situazione in cui si deve decidere se uscire con o senza l'ombrello in una giornata con tempo variabile.*

strategia / stato del mondo	*piove*	*non piove*
prendo l'ombrello	*non mi bagno*	*non mi bagno (ho l'ombrello)*
non prendo l'ombrello	*mi bagno*	*non mi bagno (non ho l'ombrello)*

Un decisore prudente prende sempre l'ombrello, ma in generale è necessario tenere conto delle preferenze del decisore, eventualmente aggiungendo ulteriori informazioni (distanza da percorrere, caratteristiche dell'ombrello, etc.). ♢

Si consideri un gioco a n giocatori in forma strategica $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, f_1, f_2, \ldots, f_n)$. La game form è data da $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, E, h)$ dove E è l'insieme degli eventi finali (o esiti) e $h : \prod_{i=1,\ldots,n} \Sigma_i \to E$ è una funzione che permette di individuare a quale esito si perviene per ogni profilo di strategie.

Per studiare il comportamento dei giocatori e quindi risolvere il gioco è necessario conoscere le preferenze dei giocatori sui possibili esiti, eventualmente rappresentate da una funzione di utilità

$$u_i : E \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$$

da cui si ottengono le funzioni di utilità indotte:

$$f_i = u_i \circ h,\ f_i : \prod_{k=1,\ldots,n} \Sigma_k \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$$

pervenendo alla rappresentazione in forma strategica.

1.6 Soluzione di un gioco (Solution concept)

Una volta detto cosa è un gioco e come lo si può rappresentare è necessario specificare cosa vuol dire risolverlo o determinare una soluzione.

Innanzitutto poichè le variabili decisionali non dipendono da un unico giocatore, non è possibile dare una soluzione nel senso della ricerca operativa classica; risolvere un gioco consiste nel fornire delle indicazioni ad uno o più giocatori, eventualmente tutti, sulle strategie da adottare se il gioco è non cooperativo o cooperativo ad utilità non trasferibile, oppure sulla suddivisione della vincita se il gioco è cooperativo ad utilità trasferibile.

Ovviamente tali indicazioni non possono essere assolute in quanto bisogna tenere conto di altri fattori alcuni aleatori, altri legati a preferenze e sensazioni del singolo giocatore.

Nell'esempio della battaglia dei sessi se entrambi sono "egoisti" o "altruisti" l'esito è una serata solitaria per entrambi, quindi è necessario che uno sia "egoista" e l'altro "altruista"; d'altra parte è sufficiente che nelle situazioni precedenti sia stata scelta più volte la partita per far si che sia probabile la scelta teatro (o viceversa), senza quindi coinvolgere "egoismo" e "altruismo", ma solo un sentimento di "parità".

In altre parole il termine "concetto di soluzione" indica quella che secondo alcuni criteri assoluti è una scelta che può risultare accettabile a tutti i giocatori secondo i loro criteri soggettivi.

Esempio 1.6.1 (Divisione di una torta tra due giocatori) *È uno dei problemi più significativi, in quanto molto semplice, molto comune e molto complesso. La soluzione più usuale in cui uno taglia e l'altro sceglie in realtà non è assolutamente equa in quanto può favorire chi sceglie se chi taglia non è preciso, o chi taglia se è a conoscenza di qualche preferenza o "punto debole" di chi sceglie.* ♢

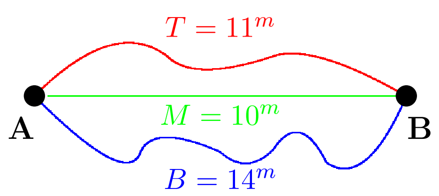
Capitolo 2

Giochi non cooperativi

2.1 Introduzione

In questa classe di giochi, introdotta da von Neumann e Morgenstern (1944), i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti (o comunicare), indipendentemente dal fatto che i loro obiettivi siano contrastanti o comuni e possano quindi avere interesse ad accordarsi.

Esempio 2.1.1 (Congestione) *Per andare da* **A** *a* **B** *sono possibili tre strade con differenti tempi di percorrenza, che dipendono dalla lunghezza e da altri fattori, in particolare dal traffico, per cui se più persone scelgono la stessa strada il corrispondente tempo aumenta.*
Si considerino tre utenti e si supponga che l'aumento sia di due minuti se una strada è scelta da due utenti e di cinque minuti se è scelta dai tre utenti. Il gioco può essere rappresentato in forma strategica dalle tabelle seguenti.



III = T			
I/II	*T*	*M*	*B*
T	16, 16, 16	13, 10, 13	13, 14, 13
M	10, 13, 13	12, 12, 11	10, 14, 11
B	14, 13, 13	14, 10, 11	16, 16, 11

III = M			
I/II	*T*	*M*	*B*
T	13, 13, 10	11, 12, 12	11, 14, 10
M	12, 11, 12	15, 15, 15	12, 14, 12
B	14, 11, 10	14, 12, 12	16, 16, 10

III = B			
I/II	*T*	*M*	*B*
T	13, 13, 14	11, 10, 14	11, 16, 16
M	10, 11, 14	12, 12, 14	10, 16, 16
B	16, 11, 16	16, 10, 16	19, 19, 19

In questo caso l'obiettivo dei giocatori è comune (ma non è identico, in quanto ognuno vuole minimizzare il proprio tempo di percorrenza), ma la cooperazione, nella realtà, è impossibile per la difficoltà di accordarsi su chi percorre le strade più lente. $\diamondsuit$

2.2 Equilibrio di Nash

Il più semplice e importante concetto di soluzione per un gioco non cooperativo è l'equilibrio di Nash (1950a).

Definizione 2.2.1 *Dato un gioco G si dice che la n-upla di strategie* $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ *con* $\sigma_i^* \in \Sigma_i$ *costituisce un equilibrio, o è in equilibrio, se nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico che cambia strategia, cioè se:*

$$f_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq f_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n^*), \qquad \forall\ \sigma_i \in \Sigma_i, \forall\ i \in N$$

Ovviamente possono esistere differenti strategie per uno o più giocatori a cui corrispondono payoff migliori, come nel caso del dilemma del prigioniero in cui l'equilibrio risulta inefficiente e il risultato più ovvio per un "supervisore" non è di equilibrio.

Un gioco può avere più equilibri come nell'Esempio 1.2.2 in cui le soluzioni (T, T) e (P, P) sono di equilibrio.

2.3 Giochi a somma zero

Definizione 2.3.1 *Un gioco G si dice a somma zero se per ogni terminazione del gioco la somma dei payoff è nulla.*

In altre parole tutto quello che viene guadagnato da qualche giocatore viene perso da qualche altro giocatore.

Nel caso più semplice a due giocatori la matrice dei pagamenti può essere espressa indicando la vincita, positiva o negativa, del primo giocatore poichè la vincita del secondo è in ogni caso l'opposto. Si può utilizzare una matrice A in cui la riga i è associata alla strategia σ_i del giocatore I, la colonna j alla strategia σ_j del giocatore II e l'elemento a_{ij} rappresenta quanto il primo giocatore riceve dal secondo se giocano la coppia di strategie (σ_i, σ_j).

Definizione 2.3.2 *La rappresentazione tramite la matrice A è detta forma normale.*

2.3.1 Gioco a due giocatori a somma zero in forma normale

Un equilibrio di Nash è rappresentato da una coppia di strategie $\sigma_i \in \Sigma_1$ e $\sigma_j \in \Sigma_2$ tali che l'elemento a_{ij} risulta essere il più grande della colonna j e il più piccolo della riga i; l'equilibrio viene detto anche *punto di sella.*

Esempio 2.3.1 (Punto di sella)
Nel gioco in forma normale rappresentato a lato la strategia (σ_1, σ_2) *costituisce un equilibrio anche se entrambi i giocatori hanno a disposizione dei payoff migliori.*

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \diamondsuit$$

L'esistenza di un punto di sella o equilibrio di Nash non impone ai giocatori la scelta delle corrispondenti strategie; nell'esempio precedente il giocatore I sa di poter ottenere payoff superiori a 3 unità e il giocatore II sa di poter pagare payoff inferiori a 3 unità; d'altra parte il giocatore I sa che scegliendo la terza strategia può ottenere 7 unità ma può pagarne 1 se il giocatore II sceglie la seconda strategia e il giocatore II sa che scegliendo la terza strategia può ottenere 2 unità ma può pagarne 4 se il giocatore I sceglie la prima strategia.

Teorema 2.3.1 *In un gioco a due persone a somma zero se* (σ_i, σ_j) *e* (σ_h, σ_k) *sono equilibri di Nash, allora lo sono anche* (σ_i, σ_k) *e* (σ_h, σ_j).

Esempio 2.3.2 (Equilibri multipli)
Nel gioco in forma normale rappresentato a lato le strategie (σ_1, σ_2) *e* (σ_2, σ_3) *sono equilibri di Nash e lo sono anche* (σ_1, σ_3) *e* (σ_2, σ_2).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \diamondsuit$$

Osservazione 2.3.1

- *Nel caso in cui il gioco non sia a somma zero il precedente teorema non sussiste, come nel caso della battaglia dei sessi.*

L'obiettivo dei giocatori è massimizzare il proprio payoff, cioè massimizzare la vincita o minimizzare la perdita; se i giocatori scelgono σ_i e σ_j, con payoff a_{ij} il giocatore I cerca di massimizzarlo intervenendo solo sulla scelta di σ_i e il giocatore II cerca di minimizzarlo intervenendo solo sulla scelta di σ_j. La non conoscenza della strategia scelta dall'altro giocatore impedisce di poter raggiungere con certezza l'obiettivo, ma l'esistenza di un punto di sella fa si che ragionevolmente entrambi scelgano quella coppia di strategie.

2.3.2 Gioco a due giocatori a somma zero senza equilibri di Nash

La maggior parte dei giochi non ha punti di sella, come il gioco a lato; in questo caso il primo giocatore con la prima strategia si garantisce una vincita minima 2 (*gain-floor*) e il secondo giocatore con la seconda strategia si garantisce una perdita massima 3 (*loss-ceiling*).

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La vincita minima per il giocatore I si indica con v'_I e si ha:

$$v'_I = \max_i \ \min_j \quad \{a_{ij}\}$$

La perdita massima per il giocatore II si indica con v'_{II} e si ha:

$$v'_{II} = \min_j \ \max_i \quad \{a_{ij}\}$$

È facile verificare che $v'_I \leq v'_{II}$; se $v'_I = v'_{II}$ allora esiste un punto di sella.

In generale un comportamento "razionale" fa si che il giocatore I vinca almeno v'_I e il giocatore II perda al più v'_{II} e il risultato è il peggiore se l'altro giocatore può sfruttare la "razionalità" e prevedere la mossa. Pertanto per migliorare il risultato è necessario non giocare "razionalmente", cioè non giocare solo la strategia di vincita minima o di perdita massima.

Esempio 2.3.3 (Pari e dispari modificato) *I due giocatori possono lanciare 1, 2, 3; il giocatore I vince se la somma dei numeri è pari, altrimenti vince il giocatore II.*

I/II	*1*	*2*	*3*
1	*P*	*D*	*P*
2	*D*	*P*	*D*
3	*P*	*D*	*P*

Apparentemente il gioco è favorevole al giocatore I che può vincere in 5 casi su 9. D'altra parte il giocatore II potrebbe giocare 2 e quindi avrebbe 2 risultati vincenti su 3; ma a questo punto il giocatore I giocando 2 è "sicuro" di vincere. Analogamente il giocatore I potrebbe giocare 1 (o 3) per avere 2 risultati vincenti su 3 e a questo punto il giocatore II giocando 2 è "sicuro" di vincere. ♢

Cercare di aumentare le proprie possibilità di vincere porta alla sconfitta "sicura".

Osservazione 2.3.2

- *Si possono evidenziare alcuni limiti dell'equilibrio di Nash (in strategie pure):*
  - *inefficienza (dilemma del prigioniero);*
  - *non unicità (battaglia dei sessi);*
  - *non esistenza (pari e dispari).*

2.4 Strategie miste

Definizione 2.4.1 *Si chiama strategia mista per un giocatore una distribuzione di probabilità sull'insieme delle sue strategie pure.*

Nell'Esempio 2.3.3 il giocatore II che parte svantaggiato può riequilibrare le sue possibilità giocando a caso, con probabilità 0.5 sia 1 che 2 (o altre strategie equivalenti); in questo modo il primo giocatore non può in alcun modo avere maggiori probabilità di vincere.

Se l'insieme delle strategie pure è formato da n elementi una strategia mista si può indicare con un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \geq 0$ e $\sum_{i=1,\ldots,n} x_i = 1$.

L'insieme delle strategie miste del giocatore I si indica con X e l'insieme delle strategie miste del giocatore II si indica con Y.

Definizione 2.4.2 *Dato un gioco G a due giocatori a somma zero in forma normale con matrice A è detta vincita attesa se il giocatore I gioca la strategia mista $x \in X$ e il giocatore II gioca la strategia mista $y \in Y$ la quantità:*

$$A(x, y) = \sum_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1,\ldots,m} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

È possibile definire la vincita minima per il giocatore I se sceglie la strategia mista $x \in X$ come:

$$v(x) = \min_{y \in Y} \quad \{x^T A y\} = \min_{j} \quad \{x^T A_{.j}\}$$

e la perdita massima per il giocatore II se sceglie la strategia mista $y \in Y$ come:

$$v(y) = \max_{x \in X} \quad \{x^T A y\} = \max_{i} \quad \{A_{i.} y\}$$

dove $A_{.j}$ e $A_{i}.$ sono la colonna j e la riga i di A e le seconde uguaglianze derivano dal fatto che il minimo e il massimo cercati si ottengono con strategie pure.

L'obiettivo del giocatore I è massimizzare $v(x)$ ottenendo la quantità:

$$v_I = \max_{x \in X} \min_{j} \quad \{x^T A_{.j}\}$$

e quello del giocatore II è minimizzare $v(y)$ ottenendo la quantità:

$$v_{II} = \min_{y \in Y} \max_{i} \quad \{A_{i.} y\}$$

Definizione 2.4.3 *La strategia mista x che permette al giocatore I di ottenere v_I è detta maximin; la strategia mista y che permette al giocatore II di ottenere v_{II} è detta minimax.*

v_I e v_{II} sono detti *valore del gioco per i giocatori I e II*, rispettivamente.

Teorema 2.4.1 (Teorema del minmax (von Neumann, 1928))
$v_I = v_{II}$.

Osservazione 2.4.1

- *Il valore $v_I = v_{II}$ viene detto* valore del gioco.
- *Nel caso in cui il gioco non sia a somma zero il precedente teorema non sussiste.*

2.5 Dominanza

Talvolta le dimensioni del problema, cioè il numero di strategie, possono essere ridotte eliminando alcune strategie.

Definizione 2.5.1 *Dato un gioco G a due giocatori a somma zero in forma normale, con matrice A, si dice che la strategia σ_i domina la strategia σ_h per il giocatore I se $a_{ij} \geq a_{hj}$, $j = 1, \dots, m$ e $a_{ij} > a_{hj}$ per almeno un indice j e la strategia σ_j domina la strategia σ_k per il giocatore II se $a_{ij} \leq a_{ik}, i = 1, \dots, n$ e $a_{ij} < a_{ik}$ per almeno un indice i.*

Teorema 2.5.1 *Se una strategia è dominata, esiste una strategia mista ottimale che non utilizza la strategia dominata; inoltre una strategia mista ottimale per il gioco senza la riga (o colonna) i è ottimale anche per il gioco dato.*

La definizione e il teorema precedenti si possono estendere al caso di giochi a più giocatori non a somma zero.

Definizione 2.5.2 *La strategia σ_h domina la strategia σ_k per il giocatore i se $f_i(\sigma_h, \sigma_{-i}) \geq f_i(\sigma_k, \sigma_{-i})$, per ogni $(n-1)$-upla di strategie $\sigma_{-i} \in \prod_{k \neq i} \Sigma_k$ e $f_i(\sigma_h, \sigma_{-i}) > f_i(\sigma_k, \sigma{-i})$ per almeno una $(n-1)$-upla di strategie σ_{-i}.*

Osservazione 2.5.1

- *A volte si distingue tra dominanza debole, quelle che sono state definite in precedenza e forte, quando si hanno tutte disuguaglianze strette. Ai fini dell'applicazione del teorema di riduzione del gioco la distinzione è irrilevante; tale riduzione è possibile anche nel caso in cui si abbiano tutte uguaglianze (indifferenza).*

- *Il concetto di dominanza può essere applicato anche al gioco ridotto, indipendentemente dalle caratteristiche del gioco dato (dominanza iterata). In questo caso se si applicano eliminazioni per dominanza debole o indifferenza si può perdere qualche equilibrio di Nash. Questo fatto è irrilevante se si vuol determinare se esistono equilibri di Nash, o almeno un equilibio di Nash.*

2.6 Inefficienza dell'equilibrio di Nash e instabilità

L'esempio seguente mostra un semplice caso teorico in cui l'aumento delle strategie dei giocatori può generare soluzioni instabili ed equilibri inefficienti. Si consideri il gioco in forma strategica:

I/II	L	C
T	$2,2$	$0,0$
M	$0,0$	$-1,-1$

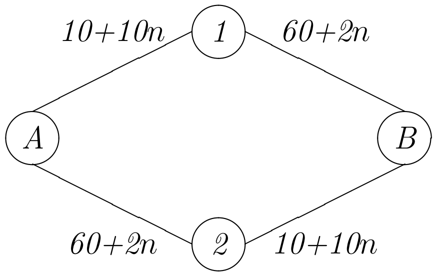
(T, L) è l'unico equilibrio di Nash ed è efficiente, ma se si aggiungono le strategie B e R, rispettivamente, con opportuni payoff si ha:

I/II	L	C	R
T	$2,2$	$0,0$	$0,3$
M	$0,0$	$-1,-1$	$0,1$
B	$3,0$	$1,0$	$1,1$

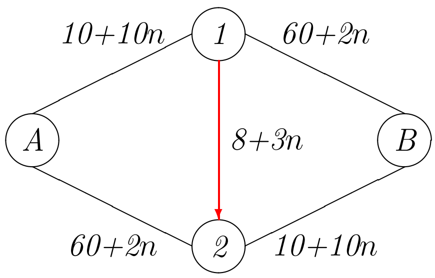
In questo caso (B, R) è l'unico equilibrio di Nash ma è inefficiente.

Un altro semplice caso deriva da una situazione di traffico.

Esempio 2.6.1 (Paradosso di Braess, 1968) *Si considerino 6 utenti che devono spostarsi da A a B e possono utilizzare due strade, rappresentate dai percorsi $A-1-B$ e $A-2-B$. I tratti $1-B$ e $A-2$, essendo lunghi e ampi, hanno un tempo di percorrenza elevato ma risentono poco della congestione; ad esempio c'è un tempo fisso 60 e un fattore di congestione $2n$ dove n è il numero di utenti che percorre la strada. I tratti $A-1$ e $2-B$ sono brevi e stretti, per cui il tempo di percorrenza è basso ma risente molto della congestione; ad esempio c'è un tempo fisso 10 e un fattore di congestione $10n$.*



In queste condizioni è facile verificare che la soluzione ottimale si ottiene quando ogni strada è percorsa da tre utenti, ciascuno con un tempo di percorrenza dato da $10 + 10 \times 3 + 60 + 2 \times 3 = 106$. Questa soluzione è anche un equilibrio di Nash, cioè è stabile. Successivamente viene costruita una strada a senso unico che collega 1 e 2, il cui tempo fisso è 8 e il fattore di congestione è $3n$.



In questa nuova situazione un utente del percorso $A-1-B$ ha interesse a passare sul percorso $A-1-2-B$ poichè il suo tempo diventa $10+10\times3+8+3\times1+10+10\times4 = 101$. Si noti che i due utenti sul percorso $A-1-B$ impiegano $10+10\times3+60+2\times2 = 104$, mentre i tre sul percorso $A-2-B$ impiegano $60 + 2 \times 3 + 10 + 10 \times 4 = 116$. Se un

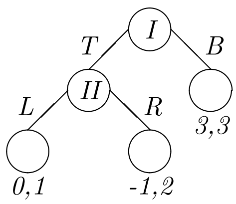
utente del percorso $A-2-B$ *passa sul percorso* $A-1-2-B$ *il suo tempo diventa* $10+10\times4+8+3\times2+10+10\times4=114$, *che è il tempo che impiegano tutti, che è peggiore del tempo ottenuto senza utilizzare la strada* $1-2$. *La nuova soluzione è ancora un equilibrio di Nash, cioè è stabile.*
Ovviamente gli utenti potrebbero tornare alla configurazione precedente, che però adesso risulta instabile. ♢

2.7 Raffinamenti dell'equilibrio di Nash

Come si è detto uno dei limiti dell'equilibrio di Nash è la non unicità. Per ovviare a questo sono stati proposti numerosi raffinamenti dell'equilibrio di Nash, tra i quali l'*equilibrio perfetto nei sottogiochi* (applicabile alla forma estesa, in cui si definisce sottogioco un qualunque sottoalbero), che si ricollega alla programmazione dinamica di Bellman (Selten, 1965), l'*equilibrio correlato* che incorpora aspetti di comunicazione tra i giocatori (Aumann, 1974) e l'*equilibrio perfetto* o "della mano tremante" che considera le perturbazioni (Selten, 1975). Nessuno di questi ha risolto il problema, né da un punto di vista quantitativo (unicità), né da quello qualitativo (scelta di un "buon" equilibrio).

Esempio 2.7.1 (Equilibrio perfetto nei sottogiochi) *Il gioco seguente ha due equilibri di Nash (B, L) e (B, R), tra loro indifferenti.*

I/II	L	R
T	$0,1$	$-1,2$
B	$3,3$	$3,3$



Se il gioco dovesse iniziare dalla mossa di II la scelta R è preferibile alla scelta L (per il giocatore II), per cui l'equilibrio (B, R) è perfetto nei sottogiochi. ♢

Esempio 2.7.2 (Equilibrio perfetto) *Il gioco rappresentato dalla tabella seguente ha due equilibri di Nash (T, L) e (B, R). Il primo sembrerebbe più vantaggioso, ma è più rischioso in caso di perturbazioni. Nel primo caso un "errore" non danneggia chi lo commette, ma danneggia fortemente l'altro. Nel secondo caso si ha un danno solo nel caso di un proprio errore.*

I/II	L	R
T	$10,10$	$0,10$
B	$10,0$	$1,1$

♢

2.7.1 Strategie correlate

In precedenza si è accennato alle strategie correlate. Il seguente esempio permette di chiarire qualche aspetto.

Esempio 2.7.3 (Gioco dell'incrocio) *Due automobilisti ad un incrocio possono scegliere se passare (P) o fermarsi (F). Passare se l'altro si ferma permette di guadagnare 5, fermarsi entrambi comporta una perdita 1, ma se passano entrambi la perdita è maggiore ...*

I/II	P	F
P	$-10,-10$	$5,0$
F	$0,5$	$-1,-1$

È facile verificare che esistono due equilibri di Nash in strategie pure (P,F) e (F,P) e un equilibrio in strategie miste $((\frac{3}{8},\frac{5}{8}),(\frac{3}{8},\frac{5}{8}))$. Le soluzioni di Nash in strategie pure hanno un valore atteso 5 per chi passa e 0 per chi si ferma (quindi la somma è 5), mentre la soluzione di Nash in strategie miste ha un valore atteso negativo per entrambi $-\frac{5}{8}$ ma soprattutto non garantiscono di evitare l'incidente; la scelta di fermarsi comunque è la più sicura ma ha un valore atteso negativo, salvo nel caso improbabile che l'altro passi comunque. Si può allora correlare la strategia ad un evento esterno: il semaforo. Utilizzando un ciclo semaforico che fa passare le auto provenienti dalle due direzioni al 50 per cento, si ottiene un valore atteso 2.5 per entrambi (e la somma è ancora 5) e una notevole sicurezza se i giocatori accettano la strategia correlata, cioè rispettano il codice della strada. $\diamondsuit$

2.7.2 Equilibrio correlato

Il risultato precedente può essere interpretato come miglior risposta e quindi generalizzato come equilibrio correlato.

Definizione 2.7.1

- *Si dice strategia mista correlata per un gioco a due giocatori, una distribuzione di probabilità sul prodotto cartesiano di strategie, cioè una matrice P tale che:*

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,m} p_{ij} = 1 & \\ p_{ij} \geq 0 & \forall i, \forall j \end{array}$$

- *Si dice equilibrio correlato per un gioco a due giocatori a matrice doppia (A,B) una strategia mista correlata P tale che per ogni strategia σ_i del primo giocatore:*

$$\frac{\sum_{j=1,\dots,m} a_{ij} p_{ij}}{\sum_{j=1,\dots,m} p_{ij}} \geq \frac{\sum_{j=1,\dots,m} a_{hj} p_{ij}}{\sum_{j=1,\dots,m} p_{ij}} \qquad h = 1,\dots,n$$

  e per ogni strategia σ_j del secondo giocatore:

$$\frac{\sum_{i=1,\dots,n} b_{ij} p_{ij}}{\sum_{i=1,\dots,n} p_{ij}} \geq \frac{\sum_{i=1,\dots,n} b_{ik} p_{ij}}{\sum_{i=1,\dots,n} p_{ij}} \qquad k = 1,\dots,m$$

dove $\frac{\sum\limits_{j=1,\dots,m} a_{sj}p_{ij}}{\sum\limits_{j=1,\dots,m} p_{ij}}$ *è l'utilità attesa dal primo giocatore se gioca la strategia* σ_s *quando gli viene "indicata" la strategia* σ_i *e il secondo giocatore "accetta" l'indicazione e analogamente* $\frac{\sum\limits_{i=1,\dots,n} b_{it}p_{ij}}{\sum\limits_{i=1,\dots,n} p_{ij}}$ *è l'utilità attesa dal secondo giocatore se gioca la strategia* σ_t *quando gli viene "indicata" la strategia* σ_j *e il primo giocatore "accetta" l'indicazione.*

In altre parole P suggerisce in ogni situazione le strategie σ_i e σ_j da utilizzare e ogni altra strategia σ_h e σ_k è non migliore di quella suggerita se l'altro giocatore "accetta" il suggerimento.

Capitolo 3

Soluzione numerica di un gioco non cooperativo

3.1 Calcolo dell'equilibrio di Nash in strategie pure

Gli equilibri di Nash in strategie pure non vengono calcolati applicando la definizione, ma il concetto di *miglior risposta*, cioè si analizza quale strategia massimizza il payoff di un giocatore, per ogni insieme fissato di strategie degli altri giocatori (la miglior risposta può non essere unica). Le n-uple di strategie formate solo da reciproche migliori risposte sono equilibri di Nash.

3.2 Calcolo dell'equilibrio di Nash in strategie miste

Nel caso di un gioco a due giocatori esiste un modo relativamente semplice per determinare gli equilibri di Nash in strategie miste.

Si consideri l'Esempio 1.2.2. Se il giocatore I gioca la strategia mista $(p, 1-p)$ e il giocatore II gioca la strategia mista $(q, 1-q)$ la vincita attesa del giocatore I è data da:

$$v_I(p) = 2pq + 0(1-p)q + 0p(1-q) + 1(1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1 = (3q-1)p - (q-1)$$

Il secondo termine non dipende da p, cioè dal giocatore I; si hanno quindi tre casi:

$3q - 1 > 0 \Rightarrow p = 1$ (strategia pura)
$3q - 1 = 0 \Rightarrow p$ (qualsiasi)
$3q - 1 < 0 \Rightarrow p = 0$ (strategia pura)

Analogamente la vincita attesa del giocatore II è data da:

$$v_{II}(q) = 1pq + 0(1-p)q + 0p(1-q) + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 2 = (3p-2)q - 2(p-1)$$

a cui corrispondono i tre casi:

$$\begin{array}{ll} 3p-2>0 \Rightarrow q=1 & \text{(strategia pura)} \\ 3p-2=0 \Rightarrow q & \text{(qualsiasi)} \\ 3p-2<0 \Rightarrow q=0 & \text{(strategia pura)} \end{array}$$

Quindi, oltre agli equilibri di Nash in strategie pure (T,T) e (P,P), si ha un equilibrio in strategie miste se:

$$\begin{array}{l} 3q-1=0 \Rightarrow q=\frac{1}{3} \\ 3p-2=0 \Rightarrow p=\frac{2}{3} \end{array}$$

cioè $\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right)$.

Osservazione 3.2.1

- *La vincita attesa è* $v_I = v_{II} = \frac{2}{3}$*, cioè inferiore alla vincita minima derivante da un accordo (non vincolante) per una strategia pura.*

3.3 Soluzione per dominanza

Esempio 3.3.1 (Gioco a due giocatori a somma zero) *Sia dato il gioco in forma normale:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La prima colonna è dominata (debolmente) dalla terza:

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 1 & 0 \\ - & 0 & 1 & -1 \\ - & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A questo punto la seconda riga è dominata (debolmente) dalla prima (e dalla terza):

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ - & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A questo punto la seconda colonna è dominata (fortemente) dalla terza:

$$\begin{pmatrix} - & - & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A questo punto la prima riga è dominata (debolmente) dalla terza:

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Infine poichè la quarta colonna è dominata (fortemente) dalla terza:

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & - \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è (3, 3). Si può osservare che la soluzione è un punto di sella. ♢

Esempio 3.3.2 (Gioco a tre giocatori) *Sia dato il gioco in forma strategica:*

III = S		
I/II	L	R
T	$1,0,1$	$2,1,5$
B	$-1,1,1$	$3,0,1$

III = D		
I/II	L	R
T	$-3,0,4$	$2,1,5$
B	$-1,1,1$	$3,1,2$

Per il giocatore III la strategia D domina (debolmente) la strategia S, per cui si ha:

III = D		
I/II	L	R
T	$-3,0,4$	$2,1,5$
B	$-1,1,1$	$3,1,2$

Per il giocatore I la strategia B domina (fortemente) la strategia T, per cui si ha:

III = D		
I/II	L	R
B	$-1,1,1$	$3,1,2$

A questo punto per il giocatore II le strategie L ed R sono indifferenti, per cui si hanno due equilibri di Nash (B, L, D) e (B, R, D). $\diamondsuit$

Osservazione 3.3.1

- *Si noti che alla seconda iterazione si poteva applicare la dominanza (debole) della strategia R rispetto alla strategia L per il giocatore II e successivamente la dominanza (forte) della strategia B rispetto alla strategia T, ottenendo solo l'equilibrio (B, R, D).*

3.4 Soluzione con la programmazione lineare

Un gioco a due giocatori a somma zero senza punti di sella può essere risolto tramite la programmazione lineare.

Supponendo che il giocatore I utilizzi la strategia $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ricordando che:

$$v(x) = \min_j \{x^T A_{.j}\}$$

si ha:

$$v(x) \leq \sum_{i=1,\ldots,n} a_{ij} x_i \qquad j = 1, \ldots, m$$

Poichè il valore del gioco è:

$$v_I = \max_{x \in X} v(x)$$

si ha il programma lineare:

$$\begin{array}{lll} max & v_I & \\ s.t. & \sum\limits_{i=1,\dots,n} a_{ij}x_i - v_I \geq 0 & j = 1,\dots,m \\ & \sum\limits_{i=1,\dots,n} x_i = 1 & \\ & x_i \geq 0 & i = 1,\dots,n \end{array}$$

In modo analogo per il giocatore II si ha il programma lineare:

$$\begin{array}{lll} min & v_{II} & \\ s.t. & \sum\limits_{j=1,\dots,m} a_{ij}y_j - v_{II} \leq 0 & i = 1,\dots,n \\ & \sum\limits_{j=1,\dots,m} y_j = 1 & \\ & y_i \geq 0 & j = 1,\dots,m \end{array}$$

I due programmi risultano tra loro duali e quindi è facile determinare le strategie miste ottimali e il valore del gioco.

Osservazione 3.4.1

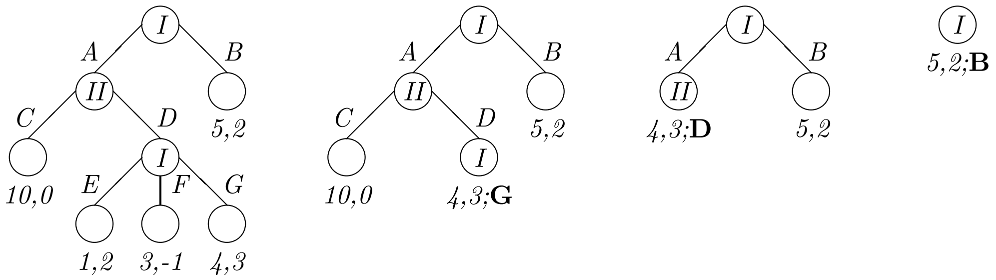
- *In realtà la soluzione tramite un problema lineare è possibile anche nel caso di un gioco non a somma zero, ma in questo caso il risultato è meno elegante in quanto non sussiste la relazione di dualità.*

3.5 Soluzione a ritroso (Backward Induction)

Sia G un gioco non cooperativo finito, rappresentato in forma estesa. Per semplificare la trattazione si può supporre che il gioco sia ad informazione perfetta. Se tutti i giocatori hanno preferenze razionali, cioè preferiscono un payoff non minore, allora è possibile determinare una soluzione del gioco, cioè una strategia ottimale dei giocatori, applicando una semplice metodologia, detta *induzione a ritroso*. L'idea di base è che la razionalità dei giocatori permette di "prevedere" il loro comportamento, per cui è possibile decidere la scelta di un giocatore sulla base delle scelte dei suoi successori e quindi iniziare l'analisi del gioco dalla fine, cioè dalle ultime mosse fino alla prima.

Formalmente si considerano le situazioni in cui le mosse disponibili portano comunque alla conclusione del gioco, dette *nodi pre-terminali* (se il gioco è finito esiste certamente almeno una tale situazione); in questo caso il giocatore sceglierà "certamente" la mossa che gli assicura il miglior payoff. Questo permette di dire che tutte le volte che il gioco giunge in quella situazione, allora anche la terminazione è "decisa" e quindi si può sostituire il nodo pre-terminale con un nodo terminale al quale si associa il vettore payoff corrispondente alla mossa fatta. Procedendo a ritroso in questo modo tutti i nodi diventano (prima o poi) nodi terminali e l'insieme delle mosse fatte identificano un profilo di strategie per i giocatori.

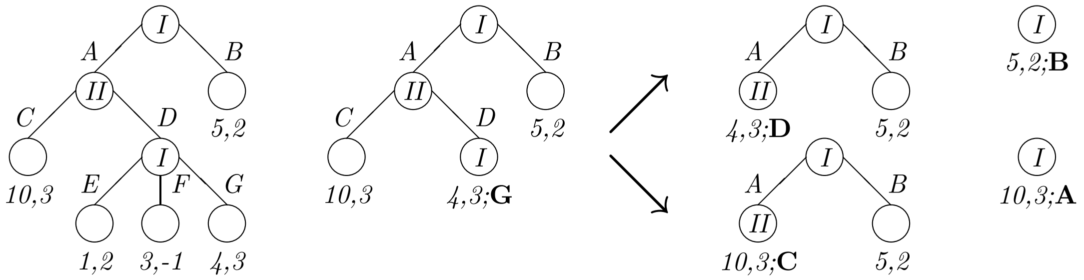
Esempio 3.5.1 (Payoff distinti) *Applicando l'induzione a ritroso al seguente gioco il forma estesa si ha:*



La procedura identifica il profilo di strategie ((B, G), D) con payoff (5, 2). ♢

La procedura è più complessa se ad una determinata situazione corrispondono più nodi terminali con lo stesso payoff per il giocatore chiamato a muovere, ma differenti per gli altri. In questo caso a seconda della scelta fatta l'iterazione successiva può avere risultati molto diversi. Operativamente si considera una continuazione del procedimento per ogni scelta massimizzante possibile, applicando successivamente altre considerazioni risolutive (giochi ad informazione incompleta).

Esempio 3.5.2 (Payoff non distinti) *Modificando il payoff del giocatore II in corrispondenza della sua scelta C come indicato si ottiene:*



La procedura identifica due terminazioni:

- *il profilo di strategie ((A, G), C) con payoff (10, 3)*
- *il profilo di strategie ((B, G), D) con payoff (5, 2)*

ma trascura il profilo di strategie ((A, G), D) con payoff (4, 3). La scelta dipende dal modello decisionale adottato. ♢

Osservazione 3.5.1

- *La procedura può dare risultati discutibili se il gioco non è ad informazione perfetta.*
- *Se il giocatore II scegliesse D invece di C, danneggiando il giocatore I, questo potrebbe scegliere F invece di G, con una piccola perdita per sé, danneggiando il giocatore II (strategia di minaccia).*

Se ad un gioco in forma estesa ad informazione perfetta si associa la corrispondente forma strategica questa può essere risolta per dominanza (debole) iterata eliminando iterativamente le strategie "scartate" in ciascuna iterazione dell'eliminazione a ritroso.

Esempio 3.5.3 (Induzione a ritroso e dominanza iterata) *Riprendendo l'Esempio 3.5.1 si ha:*

I/II	C	D
AE	$10,0$	$1,2$
AF	$10,0$	$3,-1$
AG	$10,0$	$4,3$
BE	$5,2$	$5,2$
BF	$5,2$	$5,2$
BG	$5,2$	$5,2$

La strategia AG domina (debolmente) le strategie AE e AF e la strategia BG domina (debolmente) le strategie BE e BF:

I/II	C	D
AG	$10,0$	$4,3$
BG	$5,2$	$5,2$

La strategia D domina (debolmente) la strategia C:

I/II	D
AG	$4,3$
BG	$5,2$

Infine la strategia BG domina (fortemente) la strategia AG; quindi si ottiene la stessa soluzione trovata in precedenza, cioè il profilo (BG, D) con payoff (5, 2). ♢

3.6 Soluzione di Maxmin

Se il gioco è rappresentato in forma strategica potrebbe non essere applicabile la soluzione per dominanza e potrebbe non essere facile risalire alla forma estesa. In questi casi una buona soluzione può essere la ricerca della *strategia di maxmin*, cioè quella strategia che garantisce il miglior risultato qualsiasi sia la scelta degli altri giocatori. Questo approccio è valido per i giocatori avversi al rischio.

Si analizza quale è il peggior payoff che il giocatore può conseguire una volta fissata la sua strategia, cioè supponendo che gli altri giocatori giochino "contro" di lui (minimo payoff). A questo punto il giocatore sceglie la strategia per lui più vantaggiosa (massimo dei minimi payoff).

Esempio 3.6.1 (Maxmin) *Si consideri il seguente gioco in forma strategica:*

I/II	L	C	R
T	$1, 4$	$3, 2$	$-2, -1$
M	$-2, -2$	$1, 3$	$0, 4$
B	$2, 3$	$-1, 4$	$4, 2$

Non esistono relazioni di dominanza tra le strategie di entrambi i giocatori, per cui ha senso cercare la strategia di maxmin.
Se il giocatore I sceglie T il minimo payoff è -2; se sceglie M il minimo payoff è -2; se sceglie B il minimo payoff è -1; quindi la sua strategia di maxmin è B. Se il giocatore II sceglie L il minimo payoff è -2; se sceglie C il minimo payoff è 2; se sceglie R il minimo payoff è -1; quindi la sua strategia di maxmin è C. Il payoff corrispondente al profilo di strategie di maxmin (B, C) è (-1, 4), cioè il giocatore I consegue il risultato minimo atteso, mentre il giocatore II riceve un payoff superiore. $\diamondsuit$

La soluzione di maxmin è un concetto di soluzione generale, a differenza di altri. Parte dall'ipotesi che gli altri giocatori trascurino completamente il loro payoff e giochino solo per danneggiare il giocatore in oggetto, che è vera solo nel caso di giochi ad interessi contrastanti, ad esempio i giochi a somma nulla.

Capitolo 4

Informazione

4.1 Informazione perfetta e imperfetta

La Teoria dei Giochi suppone, generalmente, che tutte le informazioni siano *conoscenza comune*, cioè siano note a tutti i giocatori; in questo caso il gioco è detto a *informazione perfetta e completa*. Per evidenziare l'importanza della conoscenza comune si può fare l'esempio seguente:

Esempio 4.1.1 (Gioco della posta elettronica) *Due persone A e B devono incontrarsi, ma a causa dei numerosi impegni A invia una e-mail per essere certo della presenza di B; ma anche B è molto impegnato per cui oltre a rassicurare A della sua presenza, richiede una conferma della ricezione del messaggio. A questo punto anche A chiede una nuova conferma e così via.* $\diamondsuit$

Chiaramente questa ipotesi non è verificata in numerose situazioni, che verranno analizzate in questo capitolo.

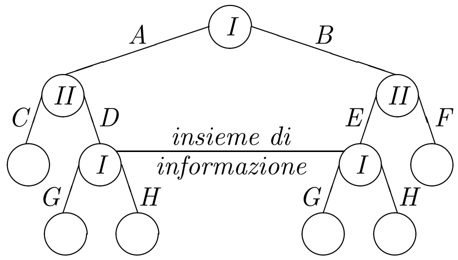
Definizione 4.1.1 *Un gioco G si dice a informazione imperfetta se esiste almeno un insieme di informazione contenente più di un elemento.*

Affinchè ci sia una reale situazione di informazione imperfetta è necessario che nei nodi facenti parte dello stesso insieme di informazione il giocatore chiamato a giocare sia nella stessa identica situazione; in altre parole non deve succedere che le possibili mosse del giocatore siano differenti e tanto più che siano in numero differente.

Nei seguenti esempi viene presentata una situazione leggermente diversa, detta *a ricordo imperfetto*.

Esempio 4.1.2 (Ricordo imperfetto) *Si consideri il seguente gioco in forma estesa in cui l'esistenza di un insieme di informazione non banale dipende dal fatto che il giocatore*

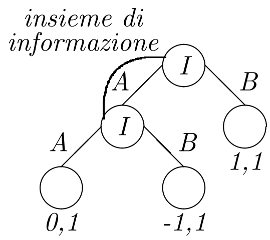
I non solo non conosce la mossa del giocatore II, cioè se quest'ultimo ha scelto D oppure E, ma anche dal fatto che non ricorda se lui ha scelto A oppure B.
Infatti se lui ricordasse la sua mossa precedente potrebbe dedurre con certezza anche la mossa del giocatore II.



◇

Esempio 4.1.3 (Ricordo imperfetto non standard) *Si consideri il seguente gioco in forma estesa in cui l'insieme di informazione comprende due nodi posti a differenti livelli, in contrasto con la definizione.*

In altre parole il giocatore I "immediatamente" dopo aver scelto non ricorda più né la sua mossa né se ha mosso; questo modello si può applicare a quei casi in cui in realtà i tempi della decisione sono sufficientemente lunghi.



I payoff sono stati scelti in modo da creare una situazione di indecisione; se invece il payoff del giocatore I dopo la seconda mossa A fosse 2*, il problema non sarebbe effettivo, in quanto la strategia migliore sarebbe di scegliere sempre A.* ◇

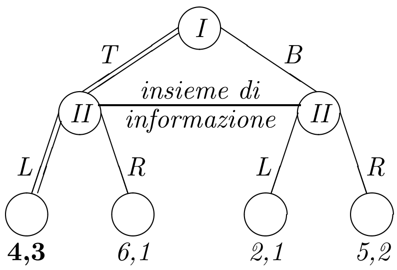
Ovviamente se un gioco è a ricordo imperfetto è anche a informazione imperfetta, mentre il viceversa non è vero.

L'informazione può essere anche indiretta, come mostra il seguente esempio.

Esempio 4.1.4 (Ruolo dell'informazione) *Si considerino le due situazioni seguenti:*

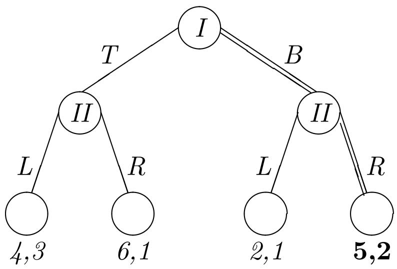
II gioca senza conoscere la scelta di I

T è la migliore strategia per I, qualunque sia la scelta di II (strategia dominante).
Quindi I gioca T e II gioca L; la vincita è 4 per I e 3 per II.



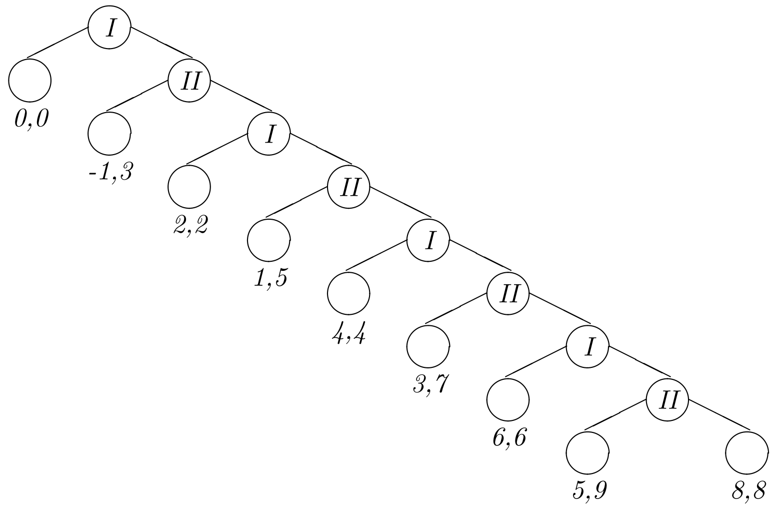
II gioca conoscendo la scelta di I

Se I gioca T II sceglie L con esito (4, 3).
Se I gioca B II sceglie R con esito (5, 2).
Quindi I gioca B e II gioca R; la vincita è 5 per I e 2 per II.
In realtà l'aumento di informazione è per entrambi e I lo può sfruttare meglio di II.



◇

Esempio 4.1.5 (Centipede Game (Gioco del Millepiedi)) *Si consideri il seguente gioco in forma estesa:*



Apparentemente il gioco dovrebbe terminare immediatamente con payoff (0, 0); d'altra parte "raggiungere" una determinata situazione, contiene una informazione di disponibilità a collaborare. ♢

4.2 Informazione incompleta

Un caso differente è quello in cui qualche giocatore non è a conoscenza di altri elementi del gioco.

Esempio 4.2.1 (Tipi di giocatori) *Si consideri un gioco a due giocatori in cui il giocatore I ha la possibilità di giocare contro due differenti tipi di avversari (giocatore II di tipo A o di tipo B) indicati come II_A e II_B i quali vengono selezionati, ad esempio, tramite un sorteggio del cui esito viene informata la coppia di giocatori II_A e II_B, ma non il giocatore I; tutti gli altri elementi sono invece noti a entrambi i giocatori.*
E' possibile rappresentare questa situazione in forma strategica tramite due differenti matrici di payoff. In altre parole esiste un'incertezza del giocatore I relativamente ai payoff, ma non sarebbe corretto dire che i payoff sono completamente ignoti al giocatore I.

I / II_A	L_A	R_A
T	$a,\ b$	$c,\ d$
B	$e,\ f$	$g,\ h$

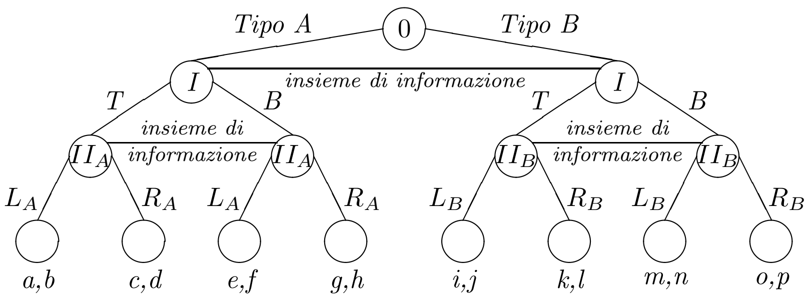
I / II_B	L_B	R_B
T	$i,\ j$	k,l
B	m,n	o,p

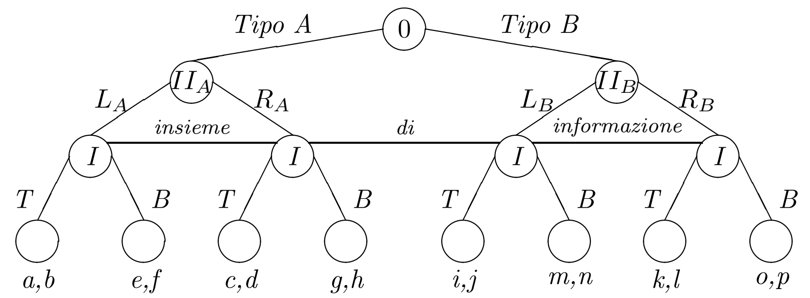
♢

A questa situazione, introdotta da Harsanyi (1967-68) come *giochi bayesiani*, possono essere ricondotte altre situazioni di informazione incompleta, quali la non conoscenza dei payoff, delle strategie, ecc.

Ovviamente questo approccio richiede la conoscenza della probabilità associata al tipo di giocatore, o corrispondentemente ai payoff, alle strategie, ecc. In un certo senso si può ipotizzare l'esistenza di un terzo giocatore (il caso), indicato con 0 che sceglie quale matrice utilizzare (o di quale tipo è il giocatore II) secondo una preassegnata probabilità e da questo punto in avanti il gioco continua in maniera usuale salvo il fatto che si è in presenza di un gioco a informazione imperfetta poichè il giocatore I non è a conoscenza di quale mossa è stata fatta dal caso, cioè quale matrice è stata scelta (si noti anche che l'imperfezione dell'informazione si può estendere alla non conoscenza delle mosse effettuate dall'altro giocatore. L'importanza dell'approccio di Harsanyi è legata alla semplicità della soluzione proposta.

La nuova situazione può essere rappresentata in forma estesa indifferentemente da uno dei due seguenti alberi:





Formalmente un gioco bayesiano può essere rappresentato come una quintupla:

$$G^b = (N, \{C_i\}_{i\in N}, \{T_i\}_{i\in N}, \{p_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$$

dove N è l'insieme dei giocatori;
C_i è l'insieme delle azioni possibili del giocatore i;
T_i è l'insieme dei tipi del giocatore i;
p_i sono le probabilità che il giocatore i assegna al tipo degli altri giocatori;
$u_i : \prod_{j\in N} C_j \times \prod_{j\in N} T_j \to \mathbb{R}$ è la funzione di utilità del giocatore i.

Gli elementi di C_i sono detti *azioni* e non strategie perchè le strategie devono tenere conto di ogni possibile tipo del giocatore i, quindi una strategia pura per il giocatore i è una funzione:

$$s^i_k : T_i \to C_i, \qquad s^i_k \in \Sigma_i$$

dove Σ_i è l'insieme delle strategie pure del giocatore i e una strategia mista è una funzione:

$$\sigma^i : C_i \times T_i \to [0,1],\ con \sum_{c\in C_i} \sigma^i(c,t) = 1, \forall\ t \in T_i$$

La soluzione del gioco, detta *equilibrio bayesiano* o *equilibrio Nash-bayesiano*, viene determinata come un normale equilibrio di Nash, tenendo conto che le mosse del caso non sono note a tutti i giocatori.

Esempio 4.2.2 (da Fudenberg - Tirole, 1991) *Un'impresa (giocatore I), già operante sul mercato, deve decidere se costruire una nuova fabbrica (C, NC); un'altra (giocatore II) deve decidere se entrare sul mercato (E, NE). Il giocatore II non sa se la costruzione della nuova fabbrica per I avrà costo 3 oppure 0 e assegna ai due eventi probabilità* p *e* $1-p$, *rispettivamente; il costo è invece noto a I; i payoff sono riportati nelle seguenti tabelle:*

I_3/II	E	NE
C	$0,-1$	$2,0$
NC	$2,1$	$3,0$

I_0/II	E	NE
C	$3,-1$	$5,0$
NC	$2,1$	$3,0$

Il gioco bayesiano è rappresentato dalla quintupla:

$$
\begin{array}{ll}
N=\{I,II\} & \\
C_I=\{C,NC\};C_{II}=\{E,NE\} & \\
T_I=\{I_3,I_0\};T_{II}=\{II\} & \\
p_{I_3}(II)=p_{I_0}(II)=1;p_{II}(I_3)=p,p_{II}(I_0)=1-p & \\
u_I((C,E),(I_3,II))=0 & u_{II}((C,E),(I_3,II))=-1\\
u_I((NC,E),(I_3,II))=2 & u_{II}((NC,E),(I_3,II))=1\\
u_I((C,NE),(I_3,II))=2 & u_{II}((C,NE),(I_3,II))=0\\
u_I((NC,NE),(I_3,II))=3 & u_{II}((NC,NE),(I_3,II))=0\\
u_I((C,E),(I_0,II))=3 & u_{II}((C,E),(I_0,II))=-1\\
u_I((NC,E),(I_0,II))=2 & u_{II}((NC,E),(I_0,II))=1\\
u_I((C,NE),(I_0,II))=5 & u_{II}((C,NE),(I_0,II))=0\\
u_I((NC,NE),(I_0,II))=3 & u_{II}((NC,NE),(I_0,II))=0
\end{array}
$$

Le strategie pure sono:

$$
\begin{array}{lll}
\Sigma_I=\{s_1^I,s_2^I,s_3^I,s_4^I\} \text{ con } & s_1^I(I_3)=C & s_1^I(I_0)=C\\
& s_2^I(I_3)=C & s_2^I(I_0)=NC\\
& s_3^I(I_3)=NC & s_3^I(I_0)=C\\
& s_4^I(I_3)=NC & s_4^I(I_0)=NC\\
\Sigma_{II}=\{s_1^{II},s_2^{II}\} \text{ con } & s_1^{II}(II)=E & \\
& s_2^{II}(II)=NE &
\end{array}
$$

Si può osservare che l'azione NC è dominante per il giocatore I se il costo è 3 e quindi il giocatore II sceglierà E, mentre se il costo è 0 l'azione C è dominante per il giocatore I e quindi il giocatore II sceglierà NE. Quindi la strategia s_3^I *è dominante. Si può allora dire che il giocatore II sceglierà E se* $p>0.5$ *e sceglierà NE se* $p<0.5$. *Se* $p=0.5$ *il payoff atteso del giocatore II è nullo, qualunque sia la sua strategia.*
Se i possibili costi di costruzione fossero 3 e 1.5; i nuovi payoff dei giocatori sono riportati nelle seguenti tabelle:

I_3/II	E	NE
C	$0,-1$	$2,0$
NC	$2,1$	$3,0$

$I_{1.5}/II$	E	NE
C	$1.5,-1$	$3.5,0$
NC	$2,1$	$3,0$

Se il costo del giocatore I è 3, l'azione NC è ancora dominante per I.
Se il costo del giocatore I è 1.5 non ci sono azioni/strategie dominanti per nessun giocatore.

Sia $(y, 1-y)$ la strategia mista di II; il giocatore $I_{1.5}$ confronta i payoff attesi delle strategie C e NC che sono rispettivamente $1.5y + 3.5(1-y) = 3.5 - 2y$ e $2y + 3(1-y) = 3 - y$, per cui sceglierà C se $3.5 - 2y > 3 - y$, cioè se $y < 0.5$.
La strategia di II dipende dalla strategia e dal tipo di I; sia $(x, 1-x)$ la strategia mista di $I_{1.5}$ (I_3 sceglie NC); il payoff atteso di II se gioca NE è 0, mentre il payoff atteso di II se gioca E è dato da $1(p) - 1(1-p)(x) + 1(1-p)(1-x) = 1 - 2(1-p)x$. Il payoff atteso di E supera il payoff atteso di NE se $1 - 2(1-p)x > 0$, cioè se

$$x < \frac{1}{2(1-p)}$$

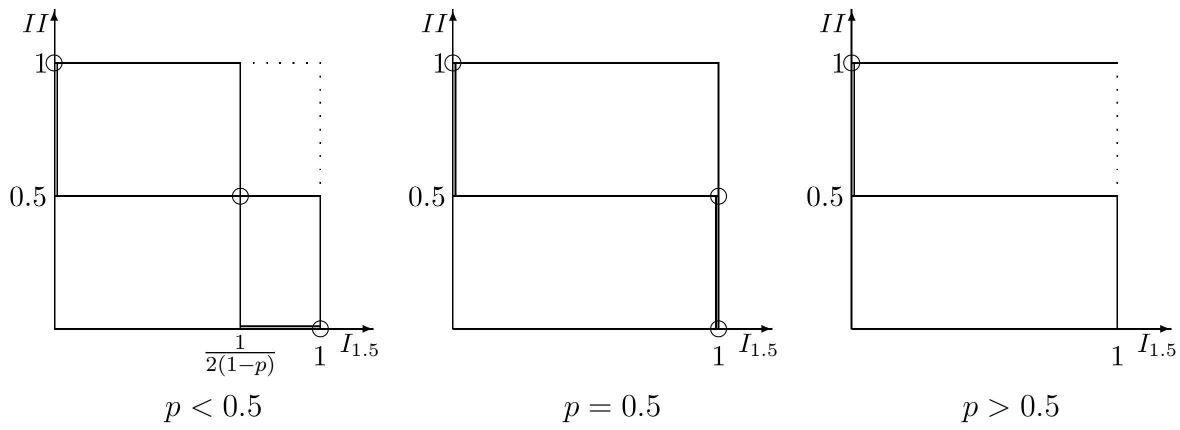
Riassumendo le migliori risposte di $I_{1.5}$ sono:

giocare C $(x = 1)$	*se* $y < 0.5$
indifferente	*se* $y = 0.5$
giocare NC $(x = 0)$	*se* $y > 0.5$

mentre le migliori risposte di II sono:

giocare E $(y = 1)$	*se* $x < \frac{1}{2(1-p)}$	
indifferente	*se* $x = \frac{1}{2(1-p)}$	$p \leq 0.5$
giocare NE $(y = 0)$	*se* $x > \frac{1}{2(1-p)}$	$p \leq 0.5$

Può essere utile tracciare il grafico della multiapplicazione che associa a ciascuna strategia mista di un giocatore la miglior risposta dell'altro.



- $x = 0, y = 1$ *costituisce un equilibrio qualunque sia p*
  infatti se II gioca E ($y = 1$) la miglior risposta di I è NC ($x = 0$, perchè $y > 0.5$) e viceversa se I gioca NC ($x = 0$) la miglior risposta di II è giocare E ($y = 1$, perchè $x < \frac{1}{2(1-p)}$);

- $x = 1, y = 0$ *costituisce un equilibrio se* $p \leq 0.5$
  infatti se II gioca NE ($y = 0$) la miglior risposta di I è C ($x = 1$, perchè $y < 0.5$)

e viceversa se I gioca C ($x = 1$) la miglior risposta di II è giocare NE ($y = 0$) solo quando $p \leq 0.5$ perchè $x > \dfrac{1}{2(1-p)}$, altrimenti quando $p > 0.5$, $\dfrac{1}{2(1-p)} > 1$ e quindi non è possibile $x > 1$;

- $x = \dfrac{1}{2(1-p)}, y = 0.5$ *costituisce un equilibrio in strategie miste se* $p \leq 0.5$

  infatti se II gioca $y = 0.5$ la risposta di I $x = \dfrac{1}{2(1-p)}$ è ottima (qualunque risposta di I è ottima) e se I gioca $x = \dfrac{1}{2(1-p)}$ la risposta di II $y = 0.5$ è ottima (qualunque risposta di II è ottima). ♢

4.2.1 Consistenza

Nel caso in cui tutti i giocatori possono essere selezionati tra differenti tipi la trattazione è identica a quella vista negli esempi, salvo che si possono ipotizzare più mosse del caso, corrispondenti alla scelta di ciascun giocatore, o un'unica mossa in cui vengono scelti direttamente tutti i giocatori effettivi. In altre parole si può avere una situazione in cui i giocatori vengono selezionati tra distinte popolazioni tramite differenti distribuzioni di probabilità, una per ogni giocatore, oppure tramite un'unica probabilità definita sul prodotto cartesiano $\prod_{i \in N} T_i$.

Le probabilità che ciascun giocatore assegna al tipo degli altri giocatori prendono il nome di $belief$ (to belief = ritenere).

Le due ipotesi precedenti non sono equivalenti, nel senso che data una probabilità sul prodotto $\prod_{i \in N} T_i$ si possono ricavare sempre le probabilità di ogni giocatore, ma non è sempre vero il viceversa; se è possibile si dice che i belief sono *consistenti*.

Esempio 4.2.3 (Belief inconsistenti) *Siano dati due tipi di giocatori sia per il giocatore I che per il giocatore II, cioè I_A, I_B, II_A, II_B. Le probabilità riferite a ciascun giocatore sono:*

I_A ritiene di giocare contro II_A con probabilità 1 e contro II_B con probabilità 0
I_B ritiene di giocare contro II_A con probabilità 0 e contro II_B con probabilità 1
II_A ritiene di giocare contro I_A con probabilità 0 e contro I_B con probabilità 1
II_B ritiene di giocare contro I_A con probabilità 1 e contro I_B con probabilità 0

Si ha la consistenza se esistono 4 numeri non negativi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tali che $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$, che costituiscono la probabilità definita sul prodotto e che rappresentano rispettivamente:

$$\alpha = \mathbf{P}(I_A \text{ contro } II_A)$$
$$\beta = \mathbf{P}(I_A \text{ contro } II_B)$$
$$\gamma = \mathbf{P}(I_B \text{ contro } II_A)$$
$$\delta = \mathbf{P}(I_B \text{ contro } II_B)$$

D'altra parte devono valere:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{I_A}(I_A \text{ contro } II_A) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = 1 \\ \mathbf{P}^{I_A}(I_A \text{ contro } II_B) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{P}^{I_B}(I_B \text{ contro } II_A) = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} = 0 \\ \mathbf{P}^{I_B}(I_B \text{ contro } II_B) = \frac{\delta}{\gamma+\delta} = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava $\beta = 0, \gamma = 0$.
Analogamente si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{II_A}(II_A \text{ contro } I_A) = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} = 0 \\ \mathbf{P}^{II_A}(II_A \text{ contro } I_B) = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{P}^{II_B}(II_B \text{ contro } I_A) = \frac{\beta}{\beta+\delta} = 1 \\ \mathbf{P}^{II_B}(II_B \text{ contro } I_B) = \frac{\delta}{\beta+\delta} = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $\alpha = 0, \delta = 0$. $\diamondsuit$

Capitolo 5

Giochi cooperativi

5.1 Introduzione

I giocatori di un gioco non devono necessariamente avere interessi contrastanti, ma possono perseguire un fine comune, almeno per la durata del gioco, pertanto è possibile che alcuni di essi tendano ad associarsi per migliorare il proprio risultato.

Per realizzare la cooperazione:

- deve essere possibile stipulare accordi (ad esempio non devono esserci regole antitrust o difficoltà di comunicazione);
- deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi, nel senso che deve esistere una autorità sufficientemente forte e accettata da tutti i componenti.

Una ulteriore suddivisione dei giochi cooperativi fa riferimento a come i giocatori di una coalizione possono ripartirsi la vincita. Si distinguono due sottoclassi:

- Giochi cooperativi senza pagamenti laterali (NTU-Games): i giocatori ricevono un payoff preassegnato.
- Giochi cooperativi a pagamenti laterali (TU-Games): i giocatori di una coalizione possono ripartirsi in qualsiasi modo la vincita.

I secondi costituiscono un caso particolare dei primi.
In particolare per avere un gioco TU devono essere soddisfatte tre ipotesi:

- deve essere possibile trasferire l'utilità (da un punto di vista normativo);
- deve esistere un mezzo comune di scambio, ad esempio il denaro, con cui trasferire l'utilità (da un punto di vista materiale);
- le funzioni di utilità dei giocatori devono essere equivalenti, ad esempio funzioni lineari della quantità di denaro.

Esempio 5.1.1 (Coalizione semplice) *Sono dati tre giocatori I, II, III; se due di loro si accordano, formando una coalizione, il terzo giocatore da ad ognuno di essi una moneta, altrimenti nessuno riceve nulla. I payoff sono:*

$(1, 1, -2)$	*se I e II si coalizzano*
$(1, -2, 1)$	*se I e III si coalizzano*
$(-2, 1, 1)$	*se II e III si coalizzano*
$(0, 0, 0)$	*altrimenti*

Se i payoff relativi alla coalizione (II, III) fossero $(-2.0, 1.1, 0.9)$ *la posizione del giocatore II non si rafforza in quanto il giocatore III ha più interesse a coalizzarsi con I che con II; questa situazione non sussiste nel caso in cui sia possibile per II "trasferire" parte della propria vincita al giocatore III, ritornando alla situazione precedente.* ♢

5.1.1 Funzione caratteristica per un gioco TU

La funzione caratteristica di un gioco TU può essere costruita a partire dalla forma strategica del gioco a due persone tra le coalizioni S ed $N \setminus S$:

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} \quad \text{(von Neumann-Morgenstern)}$$
$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\}$$

Ovviamente i due risultati possono non coincidere, in particolare il secondo è non inferiore al primo. Ma questa osservazione è assolutamente trascurabile al fine di assegnare correttamente il valore di $v(S)$.

Esempio 5.1.2 (Costruzione della funzione caratteristica - I) *Si consideri il seguente gioco a tre giocatori:*

3 = S		
1 / 2	*L*	*R*
T	$1, 0, 4$	$1, 0, -2$
B	$1, 2, -3$	$0, -1, -5$

3 = C		
1 / 2	*L*	*R*
T	$1, -3, -3$	$2, 0, -4$
B	$0, 1, 4$	$0, -1, -2$

3 = D		
1 / 2	*L*	*R*
T	$1, 4, 3$	$2, -3, 4$
B	$2, 2, 3$	$0, 1, 5$

Volendo determinare il valore di v si può costruire il gioco tra $S = \{1, 2\}$ *e* $N \setminus S = \{3\}$*:*

S / $N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$1, 4$	$-2, -3$	$5, 3$
S_2	$1, -2$	$2, -4$	$-1, 4$
S_3	$3, -3$	$1, 4$	$4, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

dove $S_1 = (T, L)$, $S_2 = (T, R)$, $S_3 = (B, L)$, $S_4 = (B, R)$ *e* $N_1 = S$, $N_2 = C$, $N_3 = D$.
È facile a questo punto determinare i valori di $v(\{1, 2\})$ *associati alle precedenti definizioni:*

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} = \max\{-2, -1, 1, -1\} = 1$$
$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} = \min\{3, 2, 5\} = 2$$

Il secondo risultato è preferibile al primo, ma in questo caso non si tratta di "preferire" un risultato ma di rappresentare una situazione.
Si può osservare che il valore $v'(S)$ corrisponde alla strategia S_3 ed in effetti la coalizione S giocando $S_3 = (B, L)$ può garantirsi un payoff non inferiore a 1, mentre il valore $v''(S)$ corrisponde alla strategia S_2, ma la coalizione S giocando $S_2 = (T, R)$ non può garantirsi un payoff non inferiore a 2, anzi probabilmente il suo payoff risulterà inferiore.
In realtà entrambe le interpretazioni difettano di realismo poichè lo scopo della coalizione $N \setminus S$ è quello di massimizzare il proprio payoff e non di minimizzare il payoff di S. Quindi la validità delle formule precedenti è limitata dal fatto di non considerare le utilità di $N \setminus S$: in questo caso è facile osservare che $N \setminus S$ considera "rischiose" le strategie N_1 ed N_2, in corrispondenza delle quali si hanno i valori $v'(S)$ e $v''(S)$. ♢

Inoltre esiste un altro punto fondamentale dato dalle funzioni di utilità dei giocatori. La base di partenza sono le preferenze dei giocatori di cui le funzioni di utilità sono solo rappresentazioni, pertanto la scelta delle strategie dei giocatori di S dovrebbe avvenire non sulle funzioni di utilità, ma sulle preferenze, mentre si può osservare nell'esempio precedente che triplicando le utilità del giocatore 1 si ottiene:

S / $N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$3, 4$	$0, -3$	$7, 3$
S_2	$3, -2$	$6, -4$	$3, 4$
S_3	$5, -3$	$1, 4$	$8, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

e quindi:

$$v'(S) = max\{0, 3, 1, -1\} = 3$$
$$v''(S) = min\{5, 6, 8\} = 5$$

Come prevedibile i valori risultano differenti, ma soprattutto si ottengono in corrispondenza di differenti strategie per la coalizione S, in particolare $v'(S)$ si ottiene per S_2 e $v''(S)$ per S_3. Questo dipende dall'aver dato alle funzioni di utilità un significato quantitativo che non necessariamente hanno. Sempre con riferimento alle funzioni di utilità si può evidenziare che non necessariamente sono additive, quindi non si può definire l'utilità della coalizione come la somma delle utilità.

La funzione caratteristica assegna ad ogni coalizione l'utilità che i giocatori possono ottenere "indipendentemente" dagli altri, ma questo termine merita qualche approfondimento; il significato di "qualunque sia la strategia" degli altri giocatori e di "escludendo" gli altri giocatori possono non definire correttamente il valore della coalizione; si può allora utilizzare il significato di "senza la collaborazione" degli altri giocatori.

Esempio 5.1.3 (Costruzione della funzione caratteristica - II) *Due fratelli, I e II, devono dividersi un'eredità costituita da 4 oggetti A, B, C, D ai quali assegnano valutazioni* *differenti, riportate nella seguente tabella:*

	A	B	C	D
I	12	10	9	6
II	2	3	1	5

L'esecutore testamentario dice ai due fratelli che in mancanza di un accordo provvederà ad assegnare 2 oggetti a ciascuno, a sua discrezione. In questo caso i due fratelli sanno che nel peggiore dei casi potrebbero ottenere i due oggetti che essi valutano meno, cioè C e D per I e A e C per II, e quindi hanno entrambi interesse ad un accordo che eviti questa situazione. Assegnando al giocatore I il valore $v(\{I\}) = 15$ *corrispondente agli oggetti C e D che lui giudica di minor valore si sottintende che il giocatore II voglia tenersi gli oggetti A e B, ma questo è improbabile, visto che lascerebbe l'oggetto D che per lui ha valore massimo; analogamente il valore* $v(\{I\}) = 22$ *corrispondente ai due oggetti A e B che lui giudica di maggior valore non è adeguato in quanto implica che il giocatore II accetti di prendere l'oggetto C che per lui ha valore minimo; invece il giocatore I è certamente in grado di garantirsi il valore* $v(\{I\}) = 21$ *corrispondente a prendere gli oggetti A e C e a lasciare al giocatore II gli oggetti B e D che quest'ultimo giudica di maggior valore.*
In maniera analoga il valore che il giocatore II può ottenere "senza la collaborazione" del giocatore I è $v(\{II\}) = 6$ *corrispondente a prendere gli oggetti C e D e a lasciare al giocatore I gli oggetti A e B che quest'ultimo giudica di maggior valore.*
La grande coalizione ha valore $v(\{I, II\}) = 37$*, in quanto, avendo la possibilità di trasferire l'utilità, la scelta più vantaggiosa corrisponde a dare tutti gli oggetti al giocatore I, che dà a tutti gli oggetti un valore maggiore rispetto al giocatore II, salvo poi ripartire adeguatamente questo valore tra i due giocatori.* ♢

Osservazione 5.1.1

- *Se il gioco fosse stato ad utilità non trasferibile la funzione caratteristica avrebbe assegnato alla grande coalizione tutte le coppie di valori che i due giocatori possono ottenere, ad esempio* $(12, 9)$ *corrispondente a dare l'oggetto A al giocatore I e gli altri tre oggetti al giocatore II, oppure* $(18, 4)$ *corrispondente a dare al giocatore I gli oggetti A e D e al giocatore II gli oggetti B e C, oppure* $(0, 11)$ *corrispondente a dare i quattro oggetti al giocatore II e così via.*

Sono state proposte altre definizioni per $v(S)$, ad esempio il valore ottenuto in corrispondenza delle strategie che massimizzano la differenza tra il payoff di S e di $N \setminus S$, ma nessuna supera le questioni poste, a meno di oppurtune ipotesi sulle funzioni di utilità, ad esempio supporre che siano additive e uguali per tutti i giocatori.

5.2 Giochi cooperativi senza pagamenti laterali

In questi giochi introdotti da Aumann e Peleg (1960) ogni giocatore utilizza le proprie strategie in accordo con gli altri giocatori con cui ha formato una coalizione, ma consegue una sua propria vincita indipendentemente dagli altri.

Definizione 5.2.1 *Un gioco NTU è una coppia $G = (N, V)$ dove N è l'insieme dei giocatori e V è la funzione che ad ogni coalizione $S \subset N$ associa l'insieme dei payoff ammissibili per i giocatori di S, tale che:*

- $V(S) \subset \mathbb{R}^S$
- $V(S)$ *è chiuso e non vuoto*
- $V(S) = V(S) - \mathbb{R}^S_{\geq}$ (comprehensiveness)

Esempio 5.2.1 (Dilemma del prigioniero senza pagamenti laterali)

I/II	C	NC
C	$1,1$	$5,0$
NC	$0,5$	$4,4$

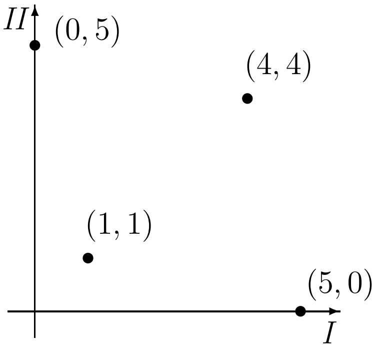
Dalla tabella si ricava che se il giocatore I gioca C si garantisce una vincita di un'unità, mentre se gioca NC si garantisce una vincita nulla per cui la funzione caratteristica è:

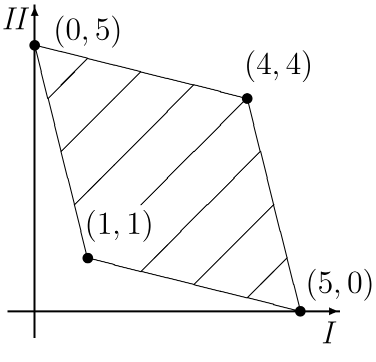
$$V(\{I\}) = V(I) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$$

e analogamente per il giocatore II:

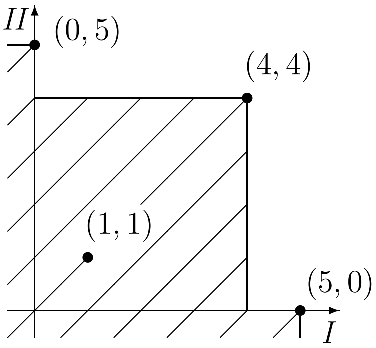
$$V(\{II\}) = V(II) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$$

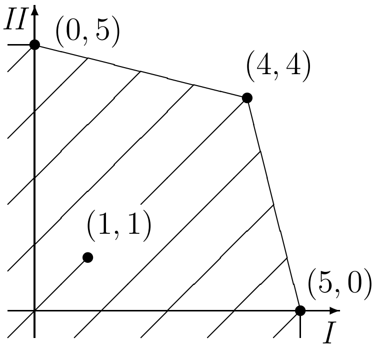
Per la coalizione $\{I, II\} = N$ si possono avere differenti valori per $V(N)$; se sono ammesse solo strategie pure si ha $V_p(N) = \{(1,1), (5,0), (0,5), (4,4)\}$; se sono ammesse strategie correlate si ha $V_c(N) = coV_p(N)$ = involucro convesso di $V(N)$.





Inoltre i giocatori hanno la possibilità di "bruciare" tutto il payoff che vogliono (free disposal), per cui si ha rispettivamente:



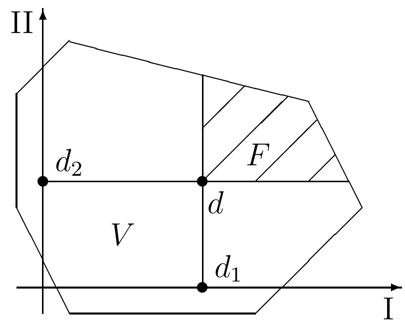


◇

5.3 Problema di contrattazione a due giocatori senza pagamenti laterali

Un'applicazione interessante dei giochi cooperativi senza pagamenti laterali è data dal problema di contrattazione a due giocatori senza pagamenti laterali (Nash, 1950b).

Se è giocato cooperativamente i giocatori possono accordarsi per una strategia correlata e possono giocare qualunque elemento dello spazio delle strategie $X \times Y$.



Sotto opportune ipotesi di compattezza dell'insieme delle strategie possibili (ad esempio un simplesso) e di comportamento delle funzioni di utilità (ad esempio lineari), l'immagine nello spazio delle utilità $I \times II$ è un insieme V convesso e chiuso.
Al giocatore i si assegna un valore di riferimento d_i, ad esempio la soluzione non cooperativa di maxmin, quella di Nash o altro, e si definisce il punto $d = (d_1, d_2)$, che costituisce il payoff dei giocatori nel caso non raggiungano un accordo; quindi si considera il sottoinsieme indicato con $F = V \cap \{(x_1, x_2)|x_1 \geq d_1, x_2 \geq d_2\}$ chiuso, convesso, limitato e non vuoto, che costituisce l'insieme dei payoff che i giocatori possono raggiungere contrattando.

Definizione 5.3.1 *Un problema di contrattazione a due giocatori è rappresentato dalla coppia (F, d) con $F \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, convesso, limitato e non vuoto (*feasibility set*), $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ (*disagreement point*).*

Il caso più interessante si ha quando i giocatori sono antagonisti, nel senso che ad un incremento del payoff per uno corrisponde una diminuzione per l'altro, come accade restringendosi alla frontiera di Pareto (giocatori efficientisti).

Questo problema può essere visto come gioco NTU dove:

- $V(1) = \{x_1 \in \mathbb{R} | x_1 \leq d_1\}$
- $V(2) = \{x_2 \in \mathbb{R} | x_2 \leq d_2\}$
- $V(1,2) = F - \mathbb{R}^2_{\geq}$

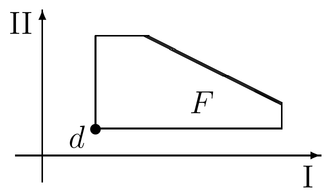
5.3.1 Soluzione assiomatica di Nash (1950b)

Una soluzione $\Phi(F, d)$ di un problema di contrattazione a due giocatori $(F, d) \in C$, insieme dei problemi di contrattazione, si determina come funzione $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ tale che $\Phi(F, d) \in F$ e che soddisfa i seguenti requisiti detti *assiomi di Nash*:

1. Efficienza stretta

La soluzione appartiene alla frontiera paretiana stretta, cioè non può essere migliorabile per un giocatore:

$$x \in F, x \geq \Phi(F, d) \Rightarrow x = \Phi(F, d)$$



2. Razionalità individuale

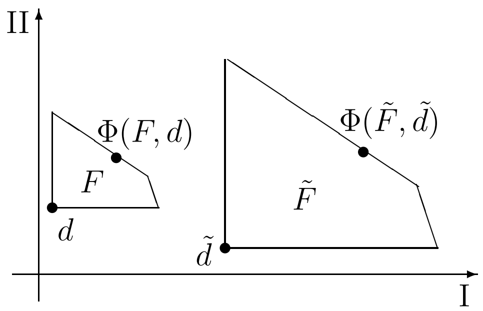
$$\Phi(F, d) \geq d$$

con la relazione d'ordine di $\mathbb{R}^2$.

3. Scale covariance

La soluzione è invariante per trasformazioni lineari, cioè $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>}, \forall\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ siano $\tilde{F} = \{(\lambda_1 x_1 + \mu_1, \lambda_2 x_2 + \mu_2) \mid (x_1, x_2) \in F\}$ e $\tilde{d} = (\lambda_1 d_1 + \mu_1, \lambda_2 d_2 + \mu_2)$ allora:

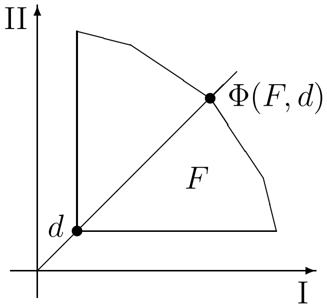
$$\Phi(\tilde{F}, \tilde{d}) = (\lambda_1 \Phi_1(F, d) + \mu_1, \lambda_2 \Phi_2(F, d) + \mu_2)$$



4. Simmetria

Se F è simmetrico per i due giocatori, cioè entrambi possono ottenere gli stessi payoff, cioè $(a, b) \in F \iff (b, a) \in F$ e $d_1 = d_2$ allora si ha:

$$\Phi_1(F, d) = \Phi_2(F, d)$$

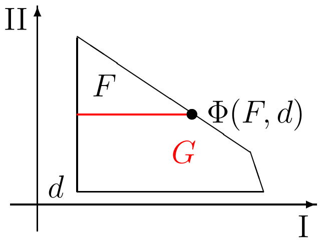


5. Indipendenza dalle alternative irrilevanti

Assioma controverso. Se si elimina un sottoinsieme di F non contenente $\Phi(F,d)$ la soluzione resta invariata, cioè:

$$d, \Phi(F,d) \in G \subset F \Rightarrow \Phi(G,d) = \Phi(F,d)$$

Nell'esempio in figura il giocatore I può ridiscutere o meno la scelta della soluzione ottenuta.



Teorema 5.3.1 *Esiste un'unica funzione $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa gli assiomi di Nash, quella che massimizza il prodotto di Nash:*

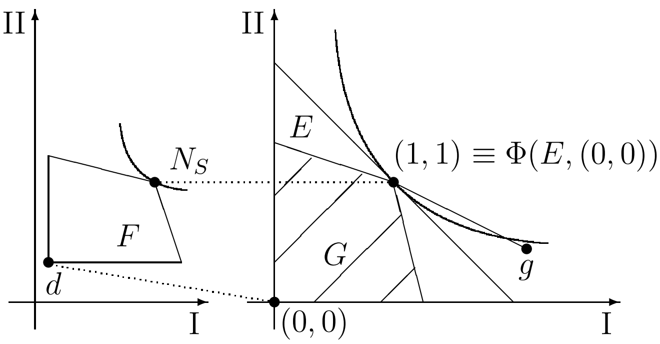
$$\Phi(F,d) = argmax \; \{(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) | x \in F\} = N_S$$

Dimostrazione

Si cerca una funzione opportuna a partire dalle conoscenze su F. Dato (F,d) esiste un solo punto (x_1, x_2) di F per cui $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$ è massimo.

Per l'assioma 3 è possibile definire una trasformazione di F in G tale che:

$$\begin{array}{rcll} d & \to & (0,0) & \qquad (*) \\ (x_1, x_2) & \to & (1,1) & \qquad (*) \end{array}$$



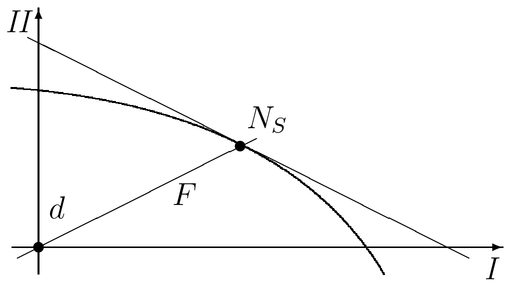
Considerando il triangolo E, che è simmetrico, il problema $(E, (0, 0))$ ha soluzione (1, 1) (assioma 4) e quindi, essendo $G \subset E$, la soluzione del problema $(G, (0, 0))$ è (1,1) (assioma 5). Per verificare $G \subset E$ si consideri per assurdo un punto $g \in G$, $g \notin E$. Per la convessità di G il segmento $[(1, 1), g] \subset G$ e contiene punti in cui il prodotto di Nash è migliore che in (1, 1). ♣

Osservazione 5.3.1

- *Se il payoff di un giocatore è costante su F, allora il prodotto di Nash è identicamente nullo.*
- *La soluzione di Nash può essere caratterizzata dalla seguente proprietà:*

$$F \subseteq H = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) \leq h(N_S)\right\}$$

dove $h(x_1, x_2) = x_1(N_{S2} - d_2) + x_2(N_{S1} - d_1)$.
Geometricamente la proprietà dice che la soluzione di Nash identifica una retta tangente a F nel punto soluzione che genera l'insieme H contenente F; tale retta forma con l'asse delle ascisse un angolo opposto a quello formato dalla retta passante per d e per N_S.



- *Nella trattazione precedente sono state fatte alcune ipotesi non necessariamente verificate:*
  1. *non è detto che il punto d influenzi nel modo esposto la soluzione;*
  2. *i decisori possono non uniformarsi al modello di von Neumann - Morgenstern.*

  Ne consegue che dati due identici problemi di contrattazione a due giocatori si può pervenire a risultati diversi, ad esempio un decisore potrebbe essere più rigido in un caso che nell'altro.

Il problema di contrattazione è alla base di numerosi concetti di soluzione tra i quali l'insieme di contrattazione (Bargaining set) di Aumann e Maschler (1964), il Kernel introdotto da Davis e Maschler (1965) e il nucleolo dovuto a Schmeidler (1969).

5.3.2 Altre soluzioni

L'assioma 5 è stato oggetto di revisione da parte di Kalai-Smorodinsky (1975). Essi hanno proposto il seguente:

5'. Monotonia individuale

Sia $d \in G \subset F$.

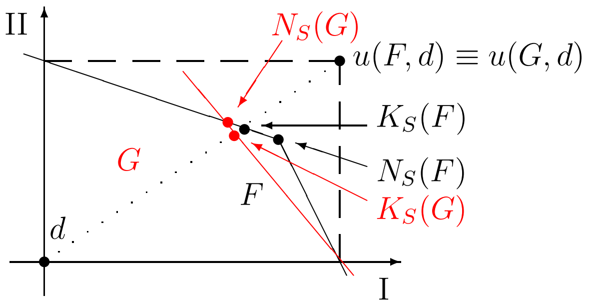
Se $u_1(G,d) = u_1(F,d)$ allora $\Phi_2(G,d) \leq \Phi_2(F,d)$ e se $u_2(G,d) = u_2(F,d)$ allora $\Phi_1(G,d) \leq \Phi_1(F,d)$, dove $u(F,d)$ è il punto *utopia* del problema (F,d), cioè $u_i(F,d) = max\ \{x_i \mid x \in F\}, i = 1,2$.

Kalai e Smorodinsky hanno proposto la seguente soluzione:

$$K_S = argmax\ \left\{ x \in F \,\middle|\, \frac{x_1 - d_1}{u_1(F,d) - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{u_2(F,d) - d_2} \right\}$$

L'assioma 5' è violato dalla soluzione di Nash, come mostra il seguente esempio.

Esempio 5.3.1 (Soluzioni di Nash e di Kalai-Smorodinsky) *Si consideri la seguente situazione:*



Passando da F a G, il punto utopia è invariato ma $N_{S2}(G) > N_{S2}(F)$, mentre $K_{S2}(G) < K_{S2}(F)$. ♢

Data l'importanza del problema di contrattazione sono state proposte altre soluzioni, tra cui:

Soluzione Egualitaria - Kalai (1977)

$$E_S = argmax\ \{|x - d|,\ x \in F |\ x_1 - d_1 = x_2 - d_2\}$$

Introducendo il seguente assioma:

Monotonia stretta

Siano (F,d) e (G,d) due problemi di contrattazione, con $G \subseteq F$ allora $\Phi(G,d) \leq \Phi(F,d)$. è possibile stabilire il seguente teorema di caratterizzazione:

Teorema 5.3.2 *La soluzione egualitaria è l'unica funzione $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa gli assiomi di efficienza stretta, simmetria e monotonia stretta.*

Altre soluzioni sono:

Soluzione λ-Egualitaria

$$\lambda - E_S = argmax\ \{x \in F|\ \lambda_1(x_1 - d_1) = \lambda_2(x_2 - d_2)\}$$

Soluzione delle Aree uguali

$$A_S\ t.c A\left(\{d + \mathbb{R}^2_{\geq}\} \cap \{x \in F \mid x_1 \geq (A_S)_1\}\right) = A\left(\{d + \mathbb{R}^2_{\geq}\} \cap \{x \in F \mid x_2 \geq (A_S)_2\}\right)$$

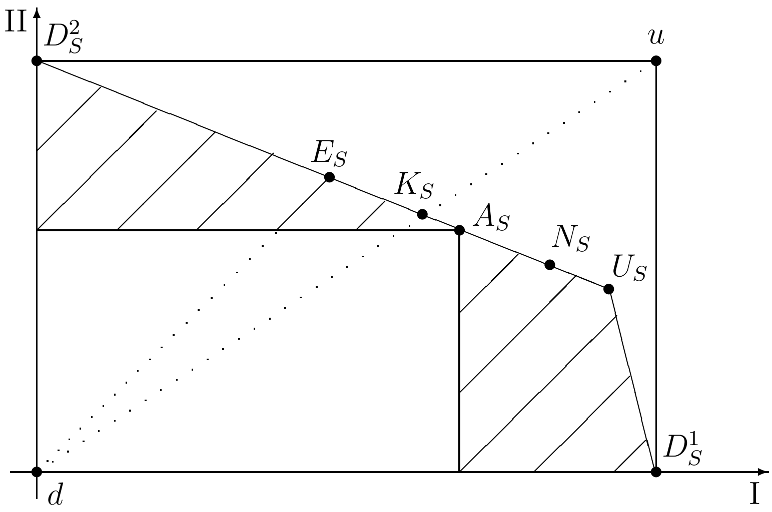
Soluzione Dittatoriale

$$D^i_S = argmax\ \{x_i | x \in F, x_j = d_j, j \neq i\}$$

Soluzione Utilitaria

$$U_S = argmax\ \{x_1 + x_2 | x \in F\}$$

La figura seguente rappresenta le differenti soluzioni proposte:



5.4 Giochi cooperativi a pagamenti laterali

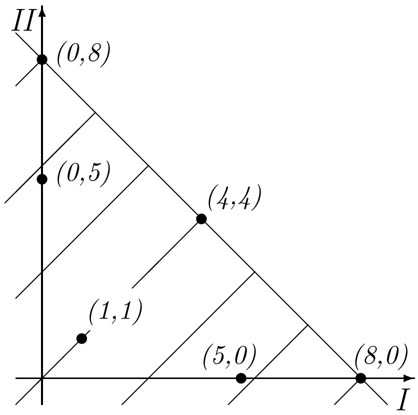
In questi giochi introdotti da Von Neumann e Morgenstern (1944) i giocatori possono stipulare accordi vincolanti e possono ripartirsi la vincita con un accordo al di fuori delle regole del gioco, la cui validità può estendersi anche oltre la fine del gioco.

Il problema può essere come trasferire la vincita o utilità poichè i giocatori possono avere differenti funzioni di utilità.

Definizione 5.4.1 *Un gioco TU è una coppia $G = (N, v)$ dove N è l'insieme dei giocatori e v è la funzione caratteristica, con $v(\emptyset) = 0$.*

Se i valori della funzione v sono negativi si ha un *gioco di costi* o cost game (N, c) in cui si pone $c = -v$, in modo da operare con quantità non negative.

Esempio 5.4.1 (Dilemma del prigioniero) *In questo caso sono possibili tutte le vincite aventi somma non superiore a 8. Ad esempio è possibile la vincita (8, 0), nel caso in cui il giocatore I prende la sua vincita (4) e la vincita del giocatore II (4).*
Quindi si ottiene:



$$\begin{aligned}
&v(\emptyset) = 0\\
&v(I) = 1\\
&v(II) = 1\\
&v(N) = 8 = max\{f_I + f_{II}\}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Esempio 5.4.2 (Gioco dei guanti) *Due insiemi di giocatori, L ed R, possiedono dei guanti; i giocatori di L possiedono solo guanti sinistri mentre i giocatori di R possiedono solo guanti destri. Il valore di una coalizione di giocatori è data dal numero di paia di guanti che riescono a formare. In generale ogni giocatore possiede un solo guanto. Nel caso in cui i giocatori di L siano 1 e 2 e i giocatori di R siano 3 e 4 si ha il seguente gioco:*

$$\begin{aligned}
&N = \{1, 2, 3, 4\} &&\\
&v(i) = 0 && \forall\, i \in N\\
&v(12) = v(34) = 0 &&\\
&v(S) = 1 && se\ |S| = 2\ e\ S \neq \{12\}, S \neq \{34\}\ oppure\ se\ |S| = 3\\
&v(N) = 2 &&
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Definizione 5.4.2 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice monotono se $v(S) \leq v(T)$, $\forall\ S \subseteq T$.*

Definizione 5.4.3 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice convesso se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$, $\forall\ S, T \subseteq N$.
- $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$, $\forall\ S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}$, $\forall\ i \in N$.

Definizione 5.4.4 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice semplice 0-1 o semplice se le coalizioni possono assumere solo i valori 0 e 1.*
Se una coalizione ha valore 1 è detta vincente, se ha valore 0 è detta perdente. Solitamente la grande coalizione è vincente.

Definizione 5.4.5 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice coesivo se per ogni partizione di N $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ si ha:*

$$\sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq v(N)$$

Osservazione 5.4.1

- *Nella definizione di monotonia non si tiene conto della cardinalità delle coalizioni.*
- *L'equivalenza delle definizioni di convessità è oggetto di un teorema.*
- *I giochi semplici trovano applicazione nelle situazioni in cui una coalizione è caratterizzata dal riuscire a conseguire o meno un determinato risultato, come nei giochi di maggioranza, utilizzati in politica.*
- *La coesività è più debole della superadditività ed esprime la "convenienza" dei giocatori a formare la grande coalizione, piuttosto che riunirsi in sottocoalizioni. L'importanza deriva dal fatto che in generale i concetti di soluzione più comuni costituiscono una ripartizione del valore della grande coalizione.*

Le soluzioni di un gioco TU possono essere raggruppate in due famiglie:

- *soluzioni insiemistiche* che individuano un insieme di vettori payoff che ripartiscono il valore del gioco tra tutti i giocatori;
- *soluzioni puntuali* che individuano una sola ripartizione e che costituiscono l'attuale tendenza in quanto più simili all'idea classica di soluzione di un problema.

Capitolo 6

Soluzioni insiemistiche di un gioco TU

6.1 Imputazioni

Un'idea per determinare le singole vincite può essere risolvere un sottogioco ristretto ai giocatori di ciascuna coalizione, oppure suddividere in parti uguali la vincita, trascurando il contributo dei singoli giocatori; esistono però altri metodi più complessi che meglio tengono conto del ruolo svolto da ciascun giocatore e che definiscono altri concetti di soluzione.

Definizione 6.1.1 *Dato un gioco $G = (N, v)$ si dice imputazione o ripartizione del valore del gioco o soluzione del gioco un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tale che:*

$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$	*ipotesi di efficienza*
$x_i \geq v(i); i = 1, \ldots, n$	*ipotesi di forza dei giocatori o razionalità individuale*

Nel caso di un cost game la razionalità individuale richiede $x_i \leq c(i)$.

L'insieme di tutte le imputazioni si indica con $E(v)$.

Definizione 6.1.2 *Se per un gioco $G = (N, v)$ si ha:*

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$$

allora $E(v)$ ha come unico elemento $x = (v(1), v(2), \ldots, v(n))$; in questo caso il gioco è detto inessenziale e essenziale altrimenti.

Per la razionalità individuale una imputazione deve assegnare ad ogni giocatore almeno quanto egli può ottenere da solo. Pertanto le imputazioni costituiscono un primo passo verso la determinazione della ripartizione delle vincite e ogni concetto di soluzione dovrà soddisfare questa condizione, cioè dovrà essere una imputazione. D'altra parte se il gioco è essenziale esistono più imputazioni possibili e si ripropone il problema di scegliere la soluzione. Infatti poichè la somma degli elementi delle imputazioni è costante se due imputazioni x e y sono distinte esiste almeno un giocatore k per cui $x_k > y_k$ e almeno un giocatore h per cui $x_h < y_h$.

Definizione 6.1.3

- *Date* $x, y \in E(v)$ *e una coalizione* S *si dice che* x *domina* y *mediante* $S, x \succ_S y$, *se:*

  1. $x_i > y_i \qquad \forall i \in S$
  2. $x(S) \leq v(S)$

  dove $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

- *Date* $x, y \in E(v)$ *si dice che* x *domina* y, $x \succ y$, *se esiste* S *tale che* $x \succ_S y$.

La dominanza non è riflessiva, nè antisimmetrica, nè transitiva.

Esempio 6.1.1 (Non antisimmetria) *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3,4\} \\ v(i) = 0 \\ v(i,j) = v(i,j,k) = v(N) = 1 \qquad \forall i,j,k \end{array}$$

Date le seguenti imputazioni $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ *e* $y = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *si ha:*

$$x \succ_{\{1,2\}} y \text{ e } y \succ_{\{3,4\}} x$$

♢

6.2 Insiemi stabili

Questo concetto di soluzione è stato proposto da Von Neumann - Morgenstern (1944) come la soluzione dei giochi TU e privilegia alcune imputazioni rispetto ad altre.

Definizione 6.2.1 *Un insieme* $V \subset E(v)$ *si dice stabile se:*

1. *dati* $x, y \in V$ *si ha* $x \not\succ y$ *e viceversa* — *stabilità interna*
2. *dato* $x \notin V$, $\exists y \in V$ *per il quale si ha* $y \succ x$ — *stabilità esterna*

Un insieme stabile contiene la soluzione ma la decisione dipende da altre informazioni non espresse dalla forma caratteristica.

Un gioco può avere più insiemi stabili.

Esempio 6.2.1 (Maggioranza semplice) *Gli insiemi stabili sono:*

- $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\} \subset E(v)$
- $V_{1,c} = \{c, t, 1-c-t\}$
- $V_{2,c} = \{1-c-t, c, t\}$
- $V_{3,c} = \{t, 1-c-t, c\}$

con $c \in [0, \frac{1}{2}[$ *funzione delle tradizioni*
$t \in [0, 1-c]$ *funzione della forza* $\diamondsuit$

Gli insiemi stabili oltre a essere soluzioni insiemistiche e non essere unici, possono non esistere; nel 1968 Lucas ha dato un esempio di gioco senza insiemi stabili, indebolendo ulteriormente questo concetto di soluzione.

6.3 Nucleo

Probabilmente il concetto di soluzione insiemistico più interessante per numerose classi di giochi è il nucleo; è stato introdotto da Gillies (1953 e 1959). L'idea di base è quella di considerare il comportamento delle imputazioni rispetto alle coalizioni, richiedendo:

$$x(S) \geq v(S) \quad S \subset N \qquad \text{ipotesi di razionalità della coalizione}$$

Definizione 6.3.1 *Si dice nucleo di un gioco, o core, l'insieme:*

$$C(v) = \{x \in E(v) | x(S) \geq v(S), \forall\ S \subset N\}$$

Nel caso di un cost game c la razionalità della coalizione richiede $x(S) \leq c(S), \forall\ S \subset N$.

Osservazione 6.3.1

- *Le imputazioni non dominate costituiscono il nucleo del gioco.*
- *Il nucleo può essere vuoto come nel gioco di maggioranza semplice e in generale nei giochi essenziali a somma costante.*
- *Il nucleo ha un aspetto normativo, cioè dice quali soluzioni non bisogna scegliere (quelle che non stanno nel nucleo) se il nucleo è non vuoto. Ovviamente se il nucleo è vuoto non si può concludere che la grande coalizione non si forma, ma solo che è caratterizzata da una più o meno elevata instabilità.*

Esempio 6.3.1 (Nucleo del gioco dei guanti) *Riferendosi all'Esempio 5.4.2, il nucleo è:*

$$C(v) = \{(\alpha, \alpha, 1-\alpha, 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

In generale se $L = \{1, ..., n_l\}$ *e* $R = \{1, ..., n_r\}$ *si ha:*
se $n_l = n_r$*:*

$$C(v) = \{(\alpha, ..., \alpha, 1-\alpha, ..., 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

se $n_l < n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_l}, \underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_r})\}$$

se $n_l > n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_l}, \underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_r})\}$$

Il nucleo evidenzia il comportamento del mercato quando uno tra due beni complementari è carente. ♢

6.3.1 Bilanciamento

E' interessante poter stabilire se un gioco ha nucleo vuoto o meno, in quanto ciò fornisce indicazioni sulla stabilità della grande coalizione. Si noti che la coesività o la superadditività non danno informazioni precise; ad esempio il gioco di maggioranza semplice ha nucleo vuoto ma è superadditivo e quindi anche coesivo; d'altra parte un gioco può non essere superadditivo, ma avere nucleo non vuoto, come nel seguente esempio.

Esempio 6.3.2 (Gioco non superadditivo a nucleo non vuoto) *Si consideri il gioco TU:*

$$\begin{array}{ll} N = \{1, 2, 3\} & \\ v(S) = 1 & \text{se } S \neq N \\ v(N) = 3 & \end{array}$$

Il gioco non è superadditivo poichè $v(1) + v(2) = 2$ *e* $v(12) = 1$ *ma ha nucleo non vuoto in quanto* $x = (1, 1, 1) \in C(v)$*.* ♢

Invece se un gioco non è coesivo ha nucleo vuoto, in quanto esisterebbero una allocazione x e una partizione $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ per cui si avrebbe:

$$x(N) = v(N) < \sum_{i=1,...,k} v(S_i) \leq \sum_{i=1,...,k} x(S_i) = x(N)$$

E' necessario avere un criterio più preciso che permetta una caratterizzazione completa ma semplice.

Dalla definizione si ricava che le imputazioni del nucleo possono essere caratterizzate come le soluzioni del problema lineare:

$$\begin{array}{lll} min & z = \sum_{i \in N} x_i & \\ s.t. & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) & \forall S \subseteq N \end{array}$$

per le quali $z^* = v(N)$.

Il duale del problema precedente si può scrivere come:

$$\begin{array}{lll} max & w = \sum_{S \subseteq N} y_s v(S) & \\ s.t. & \sum_{S \ni i} y_S = 1 & \forall i \in N \\ & y_S \geq 0 & \forall S \subseteq N \end{array}$$

per le quali $w^* = v(N)$.

Questo permette di stabilire il seguente teorema.

Teorema 6.3.1 *Un gioco v ha nucleo non vuoto se e solo se esiste una soluzione del problema primale con $z^* = v(N)$ o equivalentemente (per il primo teorema della dualità) esiste una soluzione del problema duale con $w^* = v(N)$.*

Purtroppo l'utilità di questo teorema è molto limitata in quanto la difficoltà di verificare una delle tre condizioni è equivalente. Si può fare un passo avanti introducendo le collezioni bilanciate.

Definizione 6.3.2

- *Una collezione $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ di sottoinsiemi di N è detta bilanciata se esistono m numeri non negativi $y_1, y_2, \dots, y_m$ detti coefficienti di bilanciamento, tali che:*

$$\sum_{S_j \ni i} y_j = 1 \qquad \forall i \in N$$

- *Una collezione bilanciata è detta minimale se nessuna sottocollezione è bilanciata.*

- *Un gioco è detto bilanciato se per ogni collezione bilanciata minimale $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ con coefficienti di bilanciamento $y_1, y_2, \dots, y_m$, si ha:*

$$\sum_{j=1,\dots,m} y_j v(S_j) \leq v(N)$$

Proprietà

- Ogni collezione bilanciata è unione di collezioni bilanciate minimali.

- Una collezione bilanciata è minimale se e solo se i coefficienti di bilanciamento sono unici.

- Le collezioni bilanciate non dipendono dalla funzione caratteristica, ma solo da N.

Esempio 6.3.3 (Collezioni bilanciate I)

1. *Ogni partizione di N è una collezione bilanciata, con coefficienti unitari.*

2. *Sia $N = \{1, 2, 3\}$; $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ è una collezione bilanciata con coefficienti $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. In generale per ogni N la collezione di $\binom{n}{s}$ sottoinsiemi distinti di s elementi è bilanciata con coefficienti $\binom{n-1}{s-1}^{-1}$.* ♢

A questo punto si può migliorare la caratterizzazione dei giochi a nucleo non vuoto.

Teorema 6.3.2 (Bondareva, 1963 - Shapley, 1967) *Un gioco $G = (N, v)$ ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato.*

Dimostrazione

$$C(v) \neq \emptyset \iff v(N) = min \left\{ \sum_{i=1,\ldots,n} x_i |\ x(S) \geq v(S)\ \forall\ S \subseteq N \right\} \iff$$

$$\iff v(N) = max \left\{ \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) | \sum_{S \ni i} y_S = 1\ \forall i \in N, y_S \geq 0\ \forall\ S \subseteq N \right\} \iff$$

$$\iff \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) \leq v(N), \sum_{S \ni i} y_S = 1\ \forall i \in N, y_S \geq 0\ \forall\ S \subseteq N$$

$$\iff G \text{ è bilanciato (vertici della regione ammissibile)}$$

♣

Osservazione 6.3.2

- *Il teorema di Bondareva-Shapley considera un sistema lineare generato da un sottoinsieme dei vincoli del problema duale associato al nucleo.*

- *Per un gioco superadditivo il teorema di Bondareva-Shapley è vero per le partizioni di N, quindi è sufficiente verificarlo per le altre collezioni bilanciate minimali.*

- *Il teorema è particolarmente utile per dimostrare che un gioco ha nucleo vuoto in quanto è sufficiente trovare una collezione bilanciata che non verifica la condizione.*

- *Un gioco a nucleo non vuoto viene anche detto bilanciato.*

Esempio 6.3.4 (Collezioni bilanciate II)

1. *Un gioco a tre giocatori superadditivo è bilanciato se e solo se $v(12)+v(13)+v(23) \leq 2\ v(123)$ poichè $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ è l'unica collezione bilanciata minimale con coefficienti $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*

2. *Sia dato il gioco:*

$$N = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(14) = v(24) = 0; v(23) = v(34) = 2$$
$$v(12) = v(13) = v(123) = 3; v(124) = 4; v(134) = v(234) = 5; v(N) = 6$$

Il gioco non è bilanciato in quanto $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ *è una collezione bilanciata con coefficienti* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *per la quale si ha:*

$$\frac{1}{2}v(12) + \frac{1}{2}v(134) + \frac{1}{2}v(234) = \frac{13}{2} > 6 = v(N) \qquad \diamondsuit$$

6.4 Esempi di giochi e nucleo

Questo paragrafo è dedicato a presentare alcune classi di giochi, per meglio approfondire il concetto di nucleo.

6.4.1 Bankruptcy game

Dopo il fallimento di una ditta un gruppo di creditori deve dividersi il capitale residuo, tenendo conto delle richieste di ciascuno. Formalmente un problema di bancarotta è una tripla $\mathcal{B} = (N, c, E)$, dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme dei creditori, $c = \{c_1, ..., c_n\}$ è il vettore delle richieste ed E è il capitale, con $E < \sum_{i \in N} c_i = C$; per semplicità un problema di bancarotta si può indicare come $(E; c_1, ..., c_n)$. Più in generale si ha un problema di bancarotta quando si deve allocare una risorsa insufficiente a coprire le richieste.

E' facile verificare che ogni ripartizione ammissibile ("razionale) del capitale, $x = \{x_1, ..., x_n\}$ deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\sum_{i \in N} x_i = E$$
$$0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N$$

Tra le varie possibili soluzioni tre sono particolarmente importanti: proporzionale ($PROP$), Constrained Equal Award (CEA) e Constrained Equal Loss (CEL).

- $PROP$ - Le quote assegnate sono proporzionali alle richieste di ciascuno:

$$PROP_i = \frac{c_i}{C}E \qquad i \in N$$

- CEA - Le quote assegnate sono uguali per tutti, col vincolo di non superare le richieste di ciascuno:

$$CEA_i = \min(\alpha, c_i) \qquad i \in N$$

  dove α è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEA_i = E$

- CEL - Le quote assegnate sono uguali alle richieste di ciascuno diminuite di una quantità uguale per tutti, col vincolo di non assegnare quote negative:

$$CEL_i = \max(c_i - \beta, 0) \qquad i \in N$$

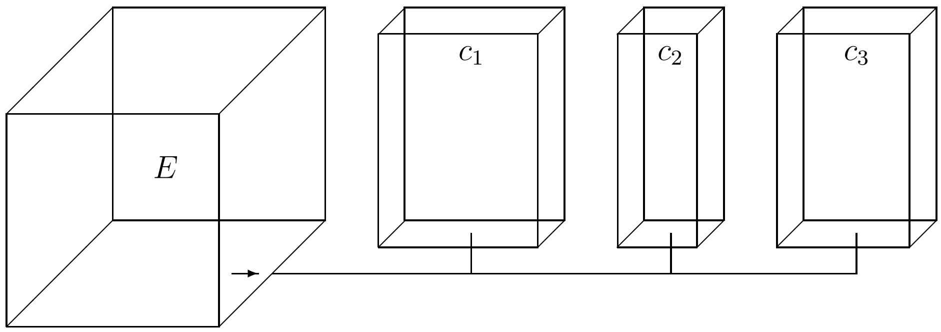
dove β è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEL_i = E$

Esempio 6.4.1 (Soluzioni) *Si consideri il problema di bancarotta* $(15; 3, 6, 7, 14)$.
$PROP = (1.5, 3, 3.5, 7)$
$CEA = (3, 4, 4, 4)$
$CEL = (0, 2, 3, 10)$ $\diamondsuit$

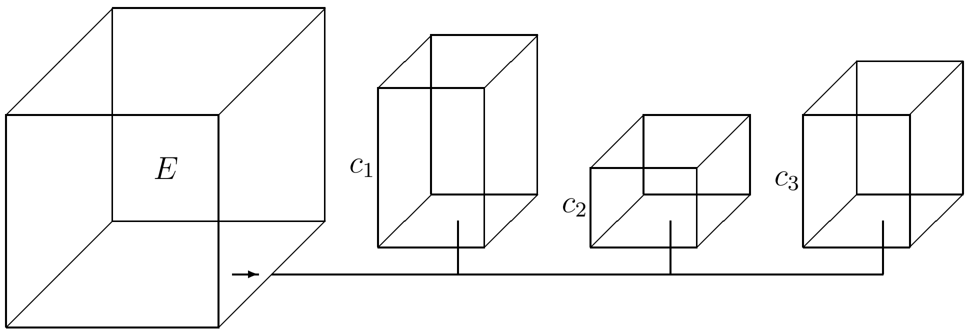
$PROP$ è la soluzione più intuitiva, CEA è quella che più protegge i piccoli creditori, CEL è quella più favorevole ai grossi creditori.

Interpretazione dei vasi comunicanti

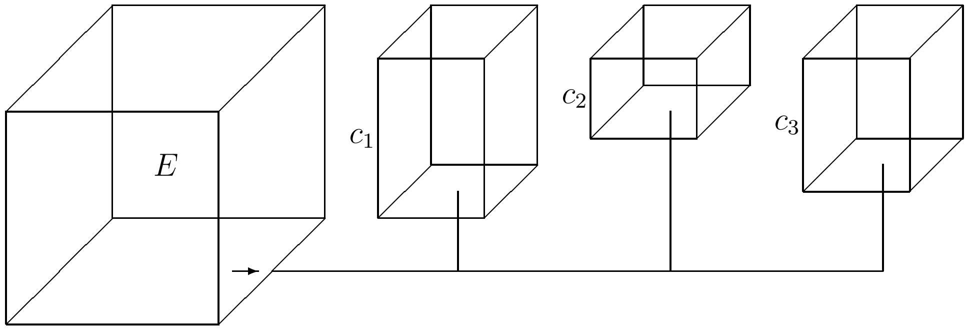
Dato un problema di bancarotta è possibile ottenere le soluzioni $PROP$, CEA e CEL da opportune situazioni di vasi comunicanti.
$PROP$ corrisponde a vasi di sezione $c_i, i \in N$, con le basi inferiori allo stesso livello.



CEA corrisponde a vasi di sezione unitaria e di altezza $c_i, i \in N$, con le basi inferiori allo stesso livello.



CEL corrisponde a vasi di sezione unitaria e di altezza $c_i, i \in N$, con le basi superiori allo stesso livello.



Dato un problema di bancarotta si possono definire due giochi TU (Aumann e Maschler, 1985 - Curiel, Maschler e Tijs, 1987 - Herrero e Villar, 2001), uno pessimistico e uno ottimistico; per entrambi l'insieme dei giocatori è N mentre la funzione caratteristica del gioco pessimistico è:

$$v_P(S) = max\left(0, E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

e quella del gioco ottimistico è:

$$v_O(S) = min\left(E, \sum_{i \in S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

Nel gioco pessimistico se alcuni giocatori vogliono formare una coalizione, devono soddisfare le richieste degli altri, ovviamente senza rimetterci, mentre nel gioco ottimistico se alcuni giocatori formano una coalizione hanno diritto a soddisfare le loro richieste, col massimo dell'intero capitale.

Il gioco ottimistico, a differenza di quello pessimistico, non è realistico, come mostra il seguente semplice esempio.

Esempio 6.4.2 (Inconsistenza del gioco ottimistico) *Si consideri il problema di bancarotta* $(5; 3, 4)$. *I due giochi sono definiti rispettivamente da:*

$$v_O(1) = 3; v_O(2) = 4; v_O(12) = 5$$
$$v_P(1) = 1; v_P(2) = 2; v_P(12) = 5$$

per cui il gioco ottimistico dice che i due giocatori separatamente possono ottenere rispettivamente 3 *e* 4*, mentre il capitale è solo* 5. $\diamondsuit$

Il nucleo del gioco pessimistico coincide con l'insieme delle soluzioni ammissibili del problema di bancarotta, cioè:

$$x \in core(v_P) \iff \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = E \\ 0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La prima è la condizione di efficienza. Per la seconda condizione per ogni $i \in N$ si ha $x_i \geq v_P(i) \geq 0$ e $E - x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \geq v_P(N \setminus \{i\}) \geq E - c_i \Rightarrow x_i \leq c_i$.

$\Leftarrow$ La condizione di efficienza è ovviamente soddisfatta. Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) se $v_P(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$;

2) se $v_P(S) = E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \leq E - \sum_{i \in N \setminus S} x_i = \sum_{i \in S} x_i$.

6.4.2 Fixed tree game

Un insieme di agenti è collegato alla sorgente di un servizio tramite una fissata connessione ad albero; ciascun agente corrisponde ad un vertice dell'albero. Il servizio è pagato in base all'utilizzo ma restano i costi di manutenzione. E' possibile associare al problema un gioco TU che ha come giocatori l'insieme di agenti $N = \{1, ..., n\}$ e come funzione caratteristica:

$$c(S) = \min_{T \supseteq S} \left\{ \sum_{i \in T} c_i \right\} \qquad S \subseteq N$$

dove c_i è il costo di manutenzione dell'unico arco entrante nel vertice associato al giocatore i e T è una componente connessa dell'albero contenente la sorgente.

Il nucleo di un fixed tree game è dato dall'insieme delle allocazioni che si ottengono ripartendo il costo di ciascun arco solo tra i giocatori della componente connessa non contenente la sorgente che si ottiene eliminando l'arco stesso.

6.4.3 Weighted majority game

I rappresentanti in un consiglio di amministrazione vogliono valutare la loro situazione ed esaminare le possibili alleanze. Formalmente un problema di maggioranza pesata è una tripla $\mathcal{W} = (N, w, q)$, dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme dei consiglieri, $w = \{w_1, ..., w_n\}$ è il vettore dei "pesi, ad esempio il numero di azioni e q è la quota di maggioranza, cioè il numero di voti necessari per approvare una mozione, con $q < \sum_{i \in N} w_i$; per semplicità si indica come $(q; w_1, ..., w_n)$. E' possibile associare al problema un gioco TU semplice 0-1 dove l'insieme dei giocatori è N e la funzione caratteristica è:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i > q \quad S \text{ vincente} \\ 0 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i \leq q \quad S \text{ perdente} \end{cases}$$

Il gioco risulta monotono e spesso si suppone anche $q \geq \dfrac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i$ in modo che se S è vincente $N \setminus S$ sia perdente.

Questi giochi sono più utilizzati nei consigli di amministrazione che in politica, in quanto nel secondo caso la formazione di una maggioranza è legata non solo ai numeri, ma anche alla collocazione dei partiti.

Esempio 6.4.3 (Consiglio di sicurezza dell'ONU) *Il Consiglio di sicurezza dell'ONU è composto da cinque membri permanenti con diritto di veto e dieci membri eletti. Un provvedimento è approvato se riceve almeno 9 voti e nessun veto. Questo problema può essere rappresentato come un problema di maggioranza pesata in cui $w_i = 1$ se i è un membro eletto e $w_i = 7$ se i è un membro permanente e $q = 38$.* $\diamondsuit$

Un gioco di maggioranza pesata ha solitamente nucleo vuoto, salvo nel caso in cui esistano giocatori di veto; un giocatore i è detto di veto se $v(S) = 0$ se $i \notin S$. Detto V l'insieme dei giocatori di veto e data una allocazione x tale che $\sum_{i \in N} x_i = 1, x_i \geq 0, i \in N$ si ha:

$$x \in core(v) \iff \sum_{i \in V} x_i = 1$$

$\Rightarrow$ E' sufficiente verificare che $x_i = 0, i \in N \setminus V$.
$i \in N \setminus V \Rightarrow v(N \setminus \{i\}) = 1$ (altrimenti i sarebbe di veto) per cui $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 1 \Rightarrow x_i = 0$.

$\Leftarrow$ Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) $v(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$;

2) $v(S) = 1 \Rightarrow V \subseteq S \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{i \in V} x_i = 1$.

Osservazione 6.4.1

- *Se il giocatore i è di veto non è vero che $i \in S \Rightarrow v(S) = 1$.*

6.4.4 Sequencing game

Alcuni agenti attendono un servizio e ogni agente conosce il proprio tempo di servizio e il costo per unità di tempo. Due agenti adiacenti possono scambiarsi di posto se questo è vantaggioso. Formalmente un problema di sequenziamento è una quadrupla $\mathcal{S} = (N, \sigma_0, \alpha, s)$ dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme degli agenti, σ_0 è una permutazione che definisce l'ordine iniziale, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ è il vettore dei costi per unità di tempo e $s = (s_1, ..., s_n)$ è il vettore dei tempi di servizio. Dato un ordinamento σ si può definire il costo C_σ come la somma dei costi degli agenti, ciascuno dei quali è dato dal tempo trascorso per il costo unitario, cioè:

$$C_\sigma = \sum_{i \in N} \alpha_i \left(\sum_{j \in P(\sigma, i)} s_j + s_i \right)$$

dove $P(\sigma, i)$ è l'insieme degli agenti che precedono i nell'ordinamento σ. Il problema è determinare l'ordinamento ottimale σ^* degli agenti.

Smith (1956) ha dimostrato che l'ordinamento ottimale si può ottenere ordinando gli agenti secondo indici di urgenza debolmente decrescenti, dove l'urgenza è $u_i = \frac{\alpha_i}{s_i}$, $i \in N$.

Esempio 6.4.4 (Problema di sequenziamento) *Si consideri il problema di sequenziamento definito da* $N = \{1,2,3\}, \sigma_0 = (1,2,3), \alpha = (5,9,8), s = (5,3,4)$*; il costo iniziale è* $C_{\sigma_0} = 25 + 72 + 96 = 193$ *e gli indici di urgenza sono* $u = (1,3,2)$*, per cui* $\sigma^* = (2,3,1)$ *con costo* $C_{\sigma^*} = 27 + 56 + 60 = 143$*.* ♢

E' possibile associare al problema un gioco TU dove l'insieme dei giocatori è N e la funzione caratteristica è definita come segue. Una coalizione $T \subseteq N$ è detta connessa secondo σ se per ogni $i, j \in T$ e $k \in N$ si ha $\sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j) \Rightarrow k \in T$. Scambiando due giocatori i, j la variazione di costo è $\alpha_j s_i - \alpha_i s_j$; la variazione è positiva se e solo se $u_i < u_j$; se la variazione è negativa non si ha lo scambio. Il guadagno di uno scambio è $g_{ij} = max\{0, \alpha_j s_i - \alpha_i s_j\}$, quindi il guadagno di una coalizione T connessa secondo σ è:

$$v(T) = \sum_{j \in T} \sum_{i \in P(\sigma,j) \cap T} g_{ij}$$

In generale data una coalizione $S \subseteq N$, l'ordine σ induce una partizione in componenti connesse, S/σ, per cui si ha:

$$v(S) = \sum_{T \in S/\sigma} v(T) \qquad S \subset N$$

Esempio 6.4.5 (Sequencing game) *Riferendosi all'Esempio 6.4.4 la funzione caratteristica è:*

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	30	0	0	50

$v(23) = 0$ *poichè lo scambio produrrebbe una perdita, in quanto* $u_2 > u_3$*; invece* $v(13) = 0$ *perchè la coalizione non è connessa e i giocatori* 1 *e* 3 *non possono scambiarsi anche se otterrebbero un guadagno di 20 e il giocatore* 2 *avrebbe un guadagno, poichè il tempo di servizio di* 3 *è 4 e quello di* 1 *è 5.* ♢

Questi giochi hanno nucleo non vuoto e una allocazione interessante è la Equal Gain Splitting Rule (*EGS* - Curiel , Pederzoli e Tijs, 1989), che divide in parti uguali il guadagno di ogni scambio tra i due giocatori coinvolti; cioè:

$$EGS_i = \frac{1}{2} \sum_{k \in P(\sigma,i)} g_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{j : i \in P(\sigma,j)} g_{ij} \qquad \forall i \in N$$

Esempio 6.4.6 (EGS-Rule) *Riferendosi all'Esempio 6.4.4 i guadagni* g_{ij} *sono:*

ij	12	13	21	23	31	32
g_{ij}	30	20	0	0	0	12

e conseguentemente

$$EGS_1 = \frac{1}{2}(g_{12} + g_{13}) = 25$$

$$EGS_2 = \frac{1}{2}g_{12} + \frac{1}{2}g_{23} = 15$$

$$EGS_3 = \frac{1}{2}(g_{13} + g_{23}) = 10$$

♢

Osservazione 6.4.2

- *La soluzione EGS non è simmetrica per i giocatori* 1 *e* 2 *che sono simmetrici per il gioco ma non per il problema associato; infatti* 1 *può scambiarsi vantaggiosamente sia con* 2 *che con* 3*, mentre* 2 *può scambiarsi vantaggiosamente solo con* 1*; quindi la EGS tiene conto del ruolo effettivo di ciascun giocatore.*

- g_{21}, g_{31}, g_{32} *non vengono utilizzati perchè l'ordine iniziale dato non permette questi scambi.*

- *Una variante è* $EGS_i^\varepsilon = \varepsilon \sum_{k \in P(\sigma,i)} g_{ki} + (1-\varepsilon) \sum_{j:i \in P(\sigma,j)} g_{ij}, \forall i \in N, \forall \varepsilon \in [0,1]$.

6.4.5 Production game

Alcuni agenti possiedono le risorse utilizzate in un processo produttivo, che vogliono utilizzare in modo da massimizzare il valore dei beni prodotti. Formalmente un problema di produzione è una quadrupla $\mathcal{P} = (N, A, (b^i)_{i \in N}, c)$ dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme degli agenti, A è la matrice tecnologica del processo produttivo, b^i è il vettore delle risorse dell'agente i e c è il vettore dei prezzi dei beni prodotti.

E' possibile associare al problema un gioco TU dove l'insieme dei giocatori è N e la funzione caratteristica è definita come:

$$v(S) = max\ \{c^T z | Az \leq b^S, z \geq 0\} \qquad S \subseteq N$$

dove $b^S = \sum_{i \in S} b^i$ rappresenta le risorse possedute dalla coalizione S.

Il nucleo di un gioco di produzione contiene le imputazioni x tali che $x_i = b^{iT} u^*$ dove u^* è una soluzione ottimale del duale del problema di produzione:

$$\begin{array}{ll} max & c^T z \\ s.t. & Az \leq b^N \\ & z \geq 0 \end{array}$$

Osservazione 6.4.3

- *Il risultato precedente può essere esteso a tutti i giochi originati da un problema lineare (Teorema di Owen, 1975).*

6.4.6 Assignment game

Gli agenti sono divisi in due gruppi, i venditori e i compratori; ciascun venditore possiede un solo oggetto, di cui conosce la propria valutazione, e ogni compratore può acquistare un solo oggetto e conosce la propria valutazione di ogni oggetto; se un venditore ha più di un oggetto da vendere o un compratore è interessato a più oggetti si considerano più copie con identiche valutazioni. E' opportuno precisare che si tratta di oggetti che non hanno un prezzo di mercato, ma il prezzo dipende dalle valutazioni e dalle capacità di contrattazione. L'obiettivo dei giocatori di entrambi i gruppi è massimizzare il guadagno, rispetto alle proprie valutazioni. Formalmente un problema di assegnazione è una quadrupla $\mathcal{A} = (N^v, N^c, A, B)$ dove $N^v = \{1, ..., n^v\}$ è l'insieme dei venditori, $N^c = \{1, ..., n^c\}$ è l'insieme dei compratori, A è un vettore dove a_j è la valutazione che il venditore $j \in N^v$ attribuisce al proprio oggetto, B è una matrice dove b_{ij} è la valutazione che il compratore $i \in N^c$ attribuisce all'oggetto offerto dal venditore $j \in N^v$.

E' possibile associare al problema un gioco TU dove l'insieme dei giocatori è $N = N^v \cup N^c$ e la funzione caratteristica v è definita come segue:

- Se un venditore j^* e un compratore i^* formano una coalizione allora:

$$v(i^*j^*) = c_{i^*j^*} = \begin{cases} b_{i^*j^*} - a_{j^*} & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} \geq 0 \\ 0 & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} < 0 \end{cases}$$

- Se una coalizione S contiene più compratori che venditori, detto $i(j) \in S \cap N^c$ il compratore dell'oggetto offerto dal venditore $j \in S \cap N^v$, si ha:

$$v(S) = max \sum_{j \in S \cap N^v} c_{i(j),j}$$

- Se una coalizione S contiene più venditori che compratori, detto $j(i) \in S \cap N^v$ il venditore dell'oggetto acquistato dal compratore $i \in S \cap N^c$, si ha:

$$v(S) = max \sum_{i \in S \cap N^c} c_{i,j(i)}$$

L'insieme dei valori c_{ij} definisce un problema di assegnazione che può scriversi come:

$$\begin{array}{lll} max & z = \sum\limits_{i \in N^c, j \in N^v} c_{ij} x_{ij} & \\ s.t. & \sum\limits_{i \in N^c} x_{ij} \leq 1 & \forall\, j \in N^v \\ & \sum\limits_{j \in N^v} x_{ij} \leq 1 & \forall\, i \in N^c \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall\, i \in N^c, j \in N^v \end{array}$$

dove $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ si accordano} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

In accordo al teorema di Owen, il nucleo di un gioco di assegnazione contiene le imputazioni ottenute da una soluzione ottimale del duale (Shapley e Shubik, 1972):

$$\begin{array}{lll} min & w = \sum\limits_{j \in N^v} y_j^v + \sum\limits_{i \in N^c} y_i^c & \\ s.t. & y_j^v + y_i^c \geq c_{ij} & \forall\, j \in N^v, \forall\, i \in N^c \end{array}$$

Osservazione 6.4.4

- *Si utilizzano solo le soluzioni ottimali duali aventi le componenti non negative per rispettare le condizioni di razionalità individuale.*

Esempio 6.4.7 (Gioco di assegnazione) *Si supponga di avere tre giocatori, dove il giocatore 1 è un venditore che valuta il proprio oggetto* $a_1 = 10$ *e i giocatori 2 e 3 sono compratori le cui valutazioni sono rispettivamente* $b_{21} = 12, b_{31} = 15$. *La funzione caratteristica del gioco è:*

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(N) = 5$$

Il nucleo è l'insieme delle imputazioni (x_1, x_2, x_3) *con* $x_1 = \alpha, x_2 = 0, x_3 = 5 - \alpha, 2 \leq \alpha \leq 5$. *Questo vuol dire che l'oggetto non viene venduto al giocatore 2 e il payoff dei giocatori 1 e 3 dipende da come si accordano, ma il prezzo deve garantire al giocatore 1 un'utilità di almeno* 2 *unità. In altre parole il prezzo di vendita deve essere almeno 12, altrimenti il giocatore 1 può accordarsi col giocatore 2, ma non più di 15, altrimenti il giocatore 3 si ritira. Si noti infine che se la valutazione del giocatore 2 fosse* $\bar{b}_{21} = 15$ *allora l'unica allocazione nel nucleo sarebbe* $(5, 0, 0)$ *cioè il prezzo di vendita sarebbe esattamente 15. Quest'esempio conferma la ben nota legge della domanda e dell'offerta.* $\diamondsuit$

Osservazione 6.4.5

- *L'esempio 6.4.7 permette alcune considerazioni di carattere economico.*

  1. *La legge dell'equilibrio tra domanda e offerta dice che il prezzo deve far sí che la domanda sia uguale all'offerta, per cui se il prezzo dell'oggetto fosse inferiore a 12 vi sarebbero due acquirenti mentre se il prezzo fosse superiore a 15 non vi sarebbero acquirenti.*

  2. *Le leggi economiche non escludono, come il nucleo, un'utilità positiva per il giocatore 2; infatti il giocatore 1 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio di un'offerta maggiore per far sí che il prezzo pagato dal giocatore 3 sia più alto oppure il giocatore 3 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio del suo ritiro per far sí che il prezzo pagato al giocatore 1 sia più basso.*

Capitolo 7

Soluzioni puntuali di un gioco TU

Le soluzioni puntuali prendono frequentemente il nome di *indici di potere* o *valori* perchè permettono di identificare il "potere" di ciascun giocatore all'interno del gioco. In generale il termine "indice di potere" si usa per i giochi semplici, mentre per un gioco qualsiasi si preferisce il termine "valore".

7.1 Valore di Shapley (1953)

È un concetto di soluzione che si basa sul valore che ogni giocatore è in grado di aggiungere alle possibili coalizioni, cioè sul suo *contributo marginale.*

Definizione 7.1.1 *Si chiama valore di Shapley il vettore $\phi(v)$ la cui componente ϕ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori, cioè:*

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} [v(P(\pi, i)) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))]$$

dove $n = |N|$, π è una permutazione di N e $P(\pi, i)$ è l'insieme dei giocatori che precedono i nella permutazione π.

Il valore di Shapley per un gioco cooperativo esiste ed è unico.

Se il gioco è superadditivo (subadditivo per un cost game) il valore di Shapley è un'imputazione in quanto verifica:

$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N) & \\ \phi_i(v) \geq v(i) & \qquad \forall i \in N \end{array}$$

ma non è necessariamente un elemento del nucleo, visto che questo può essere vuoto.

Se il gioco è convesso (concavo per un cost game) il valore di Shapley è un elemento del nucleo.

Esempio 7.1.1 (Gioco di assegnazione) *Riferendosi all'Esempio 6.4.7, dove* $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(123) = 5$ *il valore di Shapley value è dato da:*

	Contributi marginali		
Permutazioni	*Giocatore 1*	*Giocatore 2*	*Giocatore 3*
1 2 3	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(12) - v(1) = 2$	$v(123) - v(12) = 3$
1 3 2	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(13) - v(1) = 5$
2 1 3	$v(12) - v(2) = 2$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(12) = 3$
2 3 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(23) - v(2) = 0$
3 1 2	$v(13) - v(3) = 5$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
3 2 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(23) - v(3) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
ϕ_i	$\frac{17}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{11}{6}$

Il valore di Shapley riflette il valore economico del giocatore 2. ♢

7.1.1 Assiomi di Shapley

Sia data una regola ψ che ad un gioco $G(N, v)$ associa un vettore di $\mathbb{R}^N$. Si considerino i seguenti assiomi:

1. Simmetria
   Se due giocatori i, j sono simmetrici, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, allora $\psi_i(v) = \psi_j(v)$;

2. Dummy player
   Sia i un giocatore fittizio, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i)\ \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, allora $\psi_i(v) = v(i)$;

3. Additività o indipendenza (assioma controverso)
   Dati due giochi u e v, sia $(u + v)$ il gioco somma definito da $(u + v)(S) = u(S) + v(S),\ \forall\ S \subseteq N$ allora $\psi_i(u + v) = \psi_i(u) + \psi_i(v), \forall\ i \in N$.

Il valore di Shapley può essere caratterizzato in maniera assiomatica come l'unico vettore efficiente ϕ che soddisfa i precedenti assiomi.

Esempio 7.1.2 (Giocatori simmetrici e giocatore fittizio) *Sia dato il gioco* $G = (N, v)$ *dove:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 1; v(12) = 4; v(13) = v(23) = 2; v(N) = 5$$

I giocatori 1 e 2 sono simmetrici e il giocatore 3 è fittizio, allora $\phi_3(v) = v(3) = 1$ *e* $\phi_1(v) = \phi_2(v) = \frac{1}{2}(v(N) - v(3)) = 2$ *e quindi* $\phi(v) = (2, 2, 1)$. ♢

Osservazione 7.1.1

- *L'assioma di simmetria può essere sostituito dall'assioma di* anonimato*:*
  Dato un gioco v e una permutazione dei giocatori π sia u il gioco definito da $u(\pi(S)) = v(S)\ \forall\ S \subseteq N$ allora $\psi_{\pi(i)}(u) = \psi_i(v)$.

- *L'assioma di dummy player può essere sostituito dall'assioma di* null player*:*
  Sia i un giocatore nullo, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S),\ \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, allora $\psi_i(v) = 0$.
  Si può notare che $v(i) = v(\emptyset \cup \{i\}) = v(\emptyset) = 0$ e quindi ancora $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$.

7.1.2 Calcolo del valore di Shapley

Il valore di Shapley risulta molto complesso da calcolare.

Applicando la definizione è necessario determinare i contributi marginali dei giocatori in tutte le possibili coalizioni ordinate, che sono $n!$; nel caso di 10 giocatori è necessario considerare per ogni giocatore $10! = 3.628.800$ permutazioni.

Una piccola semplificazione si può ottenere considerando tutte le possibili coalizioni non vuote, che sono $2^n - 1$, e per ciascuna considerare ogni giocatore come l'ultimo arrivato e quindi "pesare" il suo contributo marginale con le permutazioni degli altri giocatori della coalizione e dei giocatori non facenti parte della coalizione; in questo modo si ottiene la seguente espressione per il valore di Shapley:

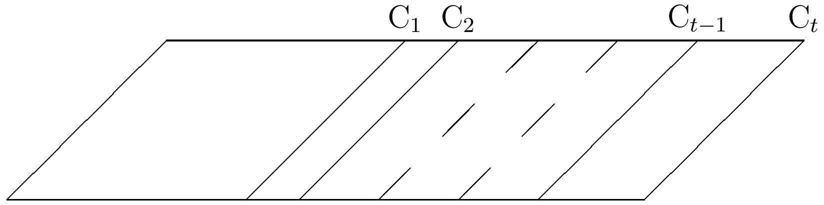
$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Nel caso di 10 giocatori è necessario considerare $2^{10} - 1 = 1.023$ coalizioni.

Per alcuni giochi è possibile determinare il valore di Shapley molto più semplicemente, sfruttando alcune caratteristiche del gioco.

Gioco dell'aeroporto (Airport game - Littlechild e Thompson, 1977)

Sia dato un aeroporto in cui atterrano differenti tipi di aerei che richiedono una pista di lunghezza differente a seconda delle loro caratteristiche; si vuole determinare come ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra gli aerei che la utilizzano. Gli aerei sono raggruppati, a seconda della lunghezza di pista necessaria, in t sottoinsiemi disgiunti $N_1, \ldots, N_t$ in modo che gli aerei del sottoinsieme N_i richiedono una pista di costo C_i con $C_i < C_{i+1}$.



Definendo il gioco assegnando ad ogni coalizione il costo della pista necessaria all'aereo più grosso della coalizione, cioè:

$$v(S) = C_{j(S)}$$

dove $j(S) = max\ \{i|S \cap N_i \neq \emptyset\}$. Si può dimostrare che il valore di Shapley di ogni aereo corrisponde alla ripartizione dei costi ottenuta nel seguente modo:

- Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli aerei, poichè tutti lo utilizzano;
- Il costo del secondo tratto di pista $C_2 - C_1$ è diviso tra gli aerei dei sottoinsiemi $N_2, \ldots, N_t$ che sono quelli che lo utilizzano;
- Il costo dell'ultimo tratto di pista $C_t - C_{t-1}$ che è diviso tra gli aerei del sottoinsieme N_t che sono gli unici che lo utilizzano.

E' facile vedere che questo criterio è facilmente applicabile anche nel caso di molti aerei.

Esempio 7.1.3 (Gioco dell'aeroporto)

$$\begin{array}{l} N_1 = \{1,2,3\}; N_2 = \{4,5,6,7\}; N_3 = \{8,9,10\} \\ C_1 = 20; C_2 = 27; C_3 = 33 \\ \phi_1 = \frac{20}{10} = 2 \\ \phi_2 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} = 3 \\ \phi_3 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} + \frac{33-27}{3} = 5 \end{array}$$

$\diamondsuit$

La verifica utilizza gli assiomi di Shapley (Littlechild e Owen, 1973).
Si definiscono t giochi $v_1, \ldots, v_t$ con il gioco v_i relativo al tratto di pista i in cui si ha:

$$v_i(S) = \begin{cases} C_i - C_{i-1} & se\ i \leq j(S) \\ 0 & se\ i > j(S) \end{cases}$$

dove $C_0 = 0$.
A questo punto si osserva che:

1. gli aerei dei sottoinsiemi $N_1, \ldots, N_{i-1}$ che non utilizzano il tratto di pista i sono dummy per il gioco v_i, per cui il loro valore di Shapley per questo gioco è nullo;
2. gli aerei dei sottoinsiemi $N_i, \ldots, N_t$ che utilizzano il tratto di pista i sono simmetrici per il gioco v_i, per cui il loro valore di Shapley per questo gioco è uguale a $\frac{C_i - C_{i-1}}{|N_i \cup \cdots \cup N_t|}$;
3. il gioco v è dato dalla somma dei giochi v_i, per cui il valore di Shapley di v è dato dalla somma dei valori di Shapley dei giochi v_i.

7.1.3 Un'applicazione del valore di Shapley

Esempio 7.1.4 (Consiglio dell'UE 1958-1973) *Il valore di Shapley permette di evidenziare un difetto nei pesi assegnati nel Consiglio dell'UE del 1958. La quota di maggioranza nel 1958 era 11 (su 17 $\approx$ 70%) e nel 1973 era 40 (su 58 $\approx$ 70%).*

	1958			1973		
Paesi	*Peso*	*%*	*Shapley*	*Peso*	*%*	*Shapley*
Francia	*4*	*23.53*	*0.233*	*10*	*17.24*	*0.179*
Germania	*4*	*23.53*	*0.233*	*10*	*17.24*	*0.179*
Italia	*4*	*23.53*	*0.233*	*10*	*17.24*	*0.179*
Belgio	*2*	*11.76*	*0.150*	*5*	*8.62*	*0.081*
Paesi Bassi	*2*	*11.76*	*0.150*	*5*	*8.62*	*0.081*
Lussemburgo	*1*	*5.88*	**0.000**	*2*	*3.45*	*0.010*
Regno Unito	-	-	-	*10*	*17.24*	*0.179*
Danimarca	-	-	-	*3*	*5.17*	*0.057*
Irlanda	-	-	-	*3*	*5.17*	*0.057*
Totale	*17*	*100.00*	*1.000*	*58*	*100.00*	*1.000*

Il Lussemburgo, pur riducendo il suo peso percentuale, ha perso il ruolo di dummy player. $\diamondsuit$

7.2 Indice di Banzhaf-Coleman (1965, 1971)

E' un altro indice di potere basato sul concetto di contributo marginale.

Definizione 7.2.1 *Si chiama indice di Banzhaf-Coleman il vettore $\psi(v)$ la cui componente ψ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili coalizioni a cui appartiene, cioè:*

$$\psi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N, i \in S} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Questo indice non è un'imputazione poichè non è efficiente.

7.3 Indice di Banzhaf-Coleman normalizzato

Questo indice può essere ottenuto normalizzando a 1 l'indice precedente, oppure nel modo seguente, che evidenzia il ruolo di ciascun giocatore.

Definizione 7.3.1 *Si chiama contributo vincente del giocatore i per un gioco semplice monotono v, il numero di casi in cui la sua presenza rende vincente una coalizione o* swing*, cioè:*

$$\vartheta_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Definizione 7.3.2 *Si chiama indice di Banzhaf-Coleman normalizzato per un gioco semplice monotono v, il vettore $\beta(v)$ la cui componente i è il rapporto tra il contributo vincente del giocatore i e la somma dei contributi vincenti di tutti i giocatori, cioè:*

$$\beta_i(v) = \frac{\vartheta_i(v)}{\sum_{j \in N} \vartheta_j(v)}$$

L'indice di Banzhaf-Coleman normalizzato è un'imputazione.

Esempio 7.3.1 (Confronti tra indici)

1. *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = v(13) = 0; v(23) = v(N) = 1$$

In questo caso si ha $\varphi = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \psi = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \beta = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ cioè gli indici coincidono.

2. *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = v(13) = v(23) = v(N) = 1$$

In questo caso si ha $\varphi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \psi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \beta = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ cioè gli indici ϕ e β coincidono e sono minori dell'indice ψ.

3. *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = v(13) = v(23) = 0; v(N) = 1$$

In questo caso si ha $\varphi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \psi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \beta = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ cioè gli indici ϕ e β coincidono e sono maggiori dell'indice ψ.

4. *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = 0; v(13) = v(23) = v(N) = 1$$

In questo caso si ha $\varphi = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6}), \psi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \beta = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ cioè non esiste nessuna relazione tra gli indici. ♢

7.4 Indice di Deegan-Packel (1978)

Un'altro importante indice di potere è stato introdotto da Deegan-Packel; esso privilegia le coalizioni vincenti minimali, cioè tali che ogni sottocoalizione propria sia perdente. Anche questo indice richiede che il gioco sia semplice e monotono.

L'indice di Deegan-Packel considera equivalenti tutte le coalizioni vincenti minimali e, per ciascuna di esse, tutti i componenti. Formalmente dato un gioco semplice $G = (N, v)$, sia $\mathcal{W} = \{S_1, ..., S_m\}$ l'insieme delle coalizioni vincenti minimali. A ciascuna di esse si assegna il valore $\frac{1}{m}$ e per ciascuna coalizione $S_j \in \mathcal{W}$ ad ogni giocatore $i \in S_j$ si assegna il valore $\frac{1}{m}\frac{1}{s_j}$; quindi l'indice di Deegan-Packel, $\delta(v)$, assegna ad ogni giocatore la somma dei valori da lui ottenuti con la procedura precedente, cioè:

$$\delta_i(v) = \sum_{S_j \ni i; S_j \in \mathcal{W}} \frac{1}{m}\frac{1}{s_j}, \forall\ i \in N$$

L'indice di Deegan-Packel è efficiente, ma non è monotono rispetto ai giocatori, come mostra il seguente esempio.

Esempio 7.4.1 (Non monotonia) *Si consideri il gioco di maggioranza pesata definito da* $(50; 26, 25, 25, 23, 1)$*; le coalizioni vincenti minimali sono:*

$$\mathcal{W} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}\}$$

per cui l'indice di Deegan-Packel è:

$$\delta(v) = \left(\frac{6}{24}, \frac{7}{24}, \frac{7}{24}, \frac{2}{24}, \frac{2}{24}\right)$$

e quindi i giocatori 2 e 3 hanno un "potere" superiore al giocatore 1 pur avendo quote inferiori. Come raffronto si può osservare che gli indici di Shapley e di Banzhaf-Coleman normalizzato sono:

$$\varphi(v) = \left(\frac{22}{60}, \frac{17}{60}, \frac{17}{60}, \frac{2}{60}, \frac{2}{60}\right)$$

$$\beta(v) = \left(\frac{9}{16}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right)$$

◊

7.5 Indice dei beni pubblici (*Public Goods Index* - Holler, 1982)

Un altro indice legato alle coalizioni vincenti minimali è quello di Holler che dipende solo dal numero di coalizioni vincenti minimali a cui ciascun giocatore appartiene, trascurando la loro cardinalità. Formalmente dato un gioco semplice $G = (N, v)$, sia $w_i, i \in N$ il numero di coalizioni vincenti minimali comprendenti il giocatore i; l'indice di Holler, $h(v)$, assegna ad ogni giocatore $i \in N$ la quantità:

$$h_i(v) = \frac{w_i}{\sum_{j \in N} w_j}, \forall\ i \in N$$

L'indice di Holler è efficiente, ma non è monotono rispetto ai giocatori, come mostra il precedente Esempio 7.4.1 per il quale si ha:

$$h(v) = \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

7.6 Indice di Johnston (1978)

Questo indice considera equivalenti tutte coalizioni vincenti quasi-minimali e, per ciascuna di esse, tutti i giocatori critici.

Definizione 7.6.1 *Dato un gioco semplice $G = (N, v)$, una coalizione vincente S è detta vincente quasi-minimale se esiste $i \in S$ tale che $S \setminus \{i\}$ è perdente. In questo caso il giocatore i è detto critico per la coalizione S.*

Dato un gioco $G = (N, v)$, sia $\mathcal{W}^q = \{S_1, ..., S_\ell\}$ l'insieme delle coalizioni vincenti quasi-minimali. A ciascuna di esse si assegna il valore $\frac{1}{\ell}$. Per ciascuna coalizione $S_j \in \mathcal{W}^q$ sia c_{S_j} il numero di giocatori critici di S_j e sia $\mathcal{W}_i^q$ l'insieme delle coalizioni vincenti quasi-minimali per cui il giocatore i è critico. Ad ogni giocatore critico $i \in S_j$ si assegna il valore $\frac{1}{\ell}\frac{1}{c_{S_j}}$; quindi l'indice di Johnston, $\gamma(v)$, assegna ad ogni giocatore la somma dei valori da lui ottenuti con la procedura precedente, cioè:

$$\gamma_i(v) = \sum_{S_j \in \mathcal{W}_i^q} \frac{1}{\ell}\frac{1}{c_{S_j}}, \forall\ i \in N$$

L'indice di Johnston è efficiente e coincide con l'indice di Deegan-Packel se $\mathcal{W} = \mathcal{W}^q$.

Esempio 7.6.1 *Si consideri il gioco dell'Esempio 7.4.1; le coalizioni vincenti quasi-minimali sono:*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^q = \ & \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \\ & \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}\} \end{aligned}$$

per cui l'indice di Johnston è:

$$\gamma(v) = \left(\frac{30}{72}, \frac{19}{72}, \frac{19}{72}, \frac{2}{72}, \frac{2}{72}\right)$$

◇

7.7 Nucleolo

Un altro concetto di soluzione puntuale è il nucleolo di Schmeidler, che si basa sull'idea di minimizzare il massimo "malcontento", che è la realizzazione in termini di allocazioni del concetto di fairness espresso da Rawls: massimizzare l'utilità dell'agente che ottiene il peggior risultato.

Definizione 7.7.1 *Dato un gioco $G = (N, v)$, sia S una coalizione e x una possibile ripartizione del valore del gioco; si dice rimpianto o eccesso di S rispetto ad x la quantità:*

$$e(S, x) = v(S) - x(S)$$

Nel caso di un cost game il rimpianto è $x(S) - c(S)$.

Osservazione 7.7.1

- *Nella definizione precedente x è una ripartizione del valore del gioco in quanto deve soddisfare solo l'ipotesi di efficienza; in questo caso talvolta si usano i termini preimputazione e prenucleolo per indicare che non si tiene conto della razionalità individuale.*

E' possibile definire un vettore $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ nel seguente modo:

$$\vartheta_1(x) = max\ \{e(S,x)|S \subset N\} = e(S_1,x)$$
$$\vartheta_i(x) = max\ \{e(S,x)|S \subset N, S \neq S_j, j = 1,\ldots,i-1\} = e(S_i,x) \qquad i = 2,\ldots,2^n$$

Le componenti di $\vartheta(x)$ sono i rimpianti generati da x al variare di S, in ordine debolmente decrescente.

Esempio 7.7.1 (Vettore degli eccessi) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1,2,3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(23) = 3; v(N) = 5$$

Data la ripartizione $x = (3,1,1)$ *si ha:*

$$e(1,x) = -3; e(2,x) = -1; e(3,x) = -1; e(12,x) = -2; e(13,x) = -1; e(23,x) = 1; e(N,x) = 0$$

e quindi:

$$\vartheta(x) = (1,0,-1,-1,-1,-2,-3) \qquad \diamondsuit$$

Definizione 7.7.2 *Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, si dice che x è lessicograficamente minore di y e si indica con $x <_L y$, se esiste $i \geq 1$ per cui:*

$$x_j = y_j \qquad j < i$$
$$x_i < y_i$$

Definizione 7.7.3 *Dato un gioco v si dice nucleolo del gioco il vettore $\nu(X)$ che genera il minimo, secondo l'ordine lessicografico, dei vettori $\vartheta(x)$ al variare di x nell'insieme X delle possibili ripartizioni.*

Osservazione 7.7.2

- *Il nucleolo è un elemento del nucleo se questo è non vuoto, per cui costituisce un concetto di soluzione per i giochi a nucleo vuoto, ma permette anche di "scegliere" un elemento del nucleo.*

Esempio 7.7.2 (Ordine lessicografico) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2\}$$
$$v(1) = 1; v(2) = 3; v(12) = 8$$

Dati $x = (6, 2)$ *e* $y = (3, 5)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -5; e(2, x) = 1; e(12, x) = 0$$
$$e(1, y) = -2; e(2, y) = -2; e(12, y) = 0$$

e quindi $\vartheta(x) = (1, 0, -5)$ *e* $\vartheta(y) = (0, -2, -2)$ *per cui* $\vartheta(y) <_L \vartheta(x)$.
Si può verificare che $y = \nu(X)$. ♢

Proprietà
Se X è non vuoto, compatto e convesso allora $\nu(X)$ esiste ed è unico.

7.7.1 Calcolo del nucleolo

Anche questo concetto di soluzione non è facilmente calcolabile.
Un modo relativamente semplice è dato dal seguente algoritmo.
Algoritmo di Kopelowitz (1967)
L'idea fondamentale su cui si basa questo algoritmo è che il massimo rimpianto delle coalizioni può essere rappresentato da una variabile α, per cui si ha:

$$v(S) - x(S) \leq \alpha \qquad \forall\, S \subset N$$

Poichè il nucleolo minimizza il massimo rimpianto è sufficiente cercare il minimo di α. La grande coalizione viene esclusa poichè il suo rimpianto è sempre nullo; la variabile α non è vincolata in segno in quanto il massimo rimpianto può essere sia positivo che negativo. Si ottiene quindi il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{ll} min & \alpha \\ s.t. & \sum_{i\in N} x_i = v(N) \\ & \sum_{i\in S} x_i + \alpha \geq v(S) \qquad \forall\, S \subset N \end{array}$$

Non è sufficente risolvere il problema precedente in quanto la soluzione potrebbe non essere unica. Per avere l'unicità è necessario iterare l'algoritmo, conservando il massimo rimpianto ottenuto. Per fare questo si considera l'insieme S_0 delle coalizioni leganti, cioè quelle per cui il rimpianto è uguale al valore α_0 ottenuto e una diversa allocazione altera il valore del massimo rimpianto; la nuova ripartizione deve minimizzare il massimo rimpianto per le altre coalizioni, ma non deve incrementare il rimpianto per le coalizioni di S_0. A tal fine è sufficiente riscrivere i vincoli corrispondenti nella forma:

$$\sum_{i\in S} x_i = v(S) - \alpha_0 \qquad \forall\, S \in S_0$$

Il nuovo problema fornisce un nuovo valore α_1 e un nuovo insieme S_1 di coalizioni leganti; nel caso in cui la soluzione non sia unica è sufficiente riscrivere i vincoli corrispondenti nella forma:

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S) - \alpha_1 \qquad \forall\ S \in S_1$$

Dopo al più n iterazioni la soluzione è unica e costituisce il nucleolo del gioco.

Esempio 7.7.3 (Calcolo del nucleolo) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = 3; v(23) = 5; v(N) = 6$$

Il primo problema è:

$$\begin{array}{ll} min & \alpha \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 6 \\ & x_1 + x_2 + \alpha \geq v(12) = 2 \\ & x_1 + x_3 + \alpha \geq v(13) = 3 \\ & x_2 + x_3 + \alpha \geq v(23) = 5 \\ & x_1 + \alpha \geq v(1) = 0 \\ & x_2 + \alpha \geq v(2) = 0 \\ & x_3 + \alpha \geq v(3) = 0 \end{array}$$

e in forma tabellare:

	x_1	x_2	x_3	α^+	α^-	
v_1	1	1	1	0	0	-6
u_2	1	1	0	1	-1	-2
u_3	1	0	1	1	-1	-3
u_4	0	1	1	1	-1	-5
u_5	1	0	0	1	-1	0
u_6	0	1	0	1	-1	0
u_7	0	0	1	1	-1	0
$-z$	0	0	0	-1	1	0

La tabella finale è:

	v_1	u_4	u_3	α^+	u_5	
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
u_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	0	0	1	0	-1	3
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
α^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
u_6	0	1	-1	0	1	2
u_7	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$-z$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La soluzione ottimale è $x = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3)$ *con* $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$ *e* $S_0 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$*; poichè la soluzione non è unica si itera riscrivendo i vincoli associati alle coalizioni in* S_0*; il secondo problema* *è:*

$$
\begin{array}{ll}
min & \alpha \\
s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 6 \\
 & x_1 + x_2 + \alpha \geq v(12) = 2 \\
 & x_1 + x_3 + \alpha \geq v(13) = 3 \\
 & x_2 + x_3 = v(23) - \alpha_0 = \frac{11}{2} \\
 & x_1 = v(1) - \alpha_0 = \frac{1}{2} \\
 & x_2 + \alpha \geq v(2) = 0 \\
 & x_3 + \alpha \geq v(3) = 0
\end{array}
$$

e in forma tabellare:

	x_1	x_2	x_3	α^+	α^-	
v_1	1	1	1	0	0	-6
u_2	1	1	0	1	-1	-2
u_3	1	0	1	1	-1	-3
v_4	0	1	1	0	0	$-\frac{11}{2}$
v_5	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
u_6	0	1	0	1	-1	0
u_7	0	0	1	1	-1	0
$-z$	0	0	0	-1	1	0

La tabella finale è:

	v_1	v_4	u_3	α^+	u_2	
x_1	1	-1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
α^-	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{4}$
x_2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
v_5	1	-1	0	0	0	0
u_6	-1	1	0	0	1	$\frac{3}{2}$
u_7	-1	1	1	0	0	$\frac{5}{2}$
$-z$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

La soluzione ottimale è $x = (\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4})$ *con* $\alpha_1 = -\frac{3}{4}$ *e* $S_1 = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$*; poichè la soluzione è unica la ripartizione trovata costituisce il nucleolo.* $\diamondsuit$

Capitolo 8

Il Bargaining Set, il Kernel e il Nucleolo

8.1 Premessa

Questo capitolo è dedicato ad analizzare i concetti di soluzione basati sull'idea di contrattazione. In altre parole i giocatori possono ridiscutere una allocazione x (ovviamente a loro vantaggio) se esistono dei fondamenti "razionali", su cui basare la loro richiesta. In un certo senso si vuole studiare anche il problema di quale, o quali, coalizioni possono formare, al fine di dare una valutazione della forza, o potere contrattuale dei giocatori. E' inutile sottolineare che la decisione di formare una coalizione dipende in gran parte dal payoff che i singoli giocatori possono garantirsi nelle differenti situazioni.

8.2 Il Bargaining Set

Per cominciare è necessario introdurre l'idea di obiezione di un giocatore i contro un altro giocatore j rispetto all'imputazione x.

Definizione 8.2.1 *Un'obiezione di i contro j rispetto ad x è una coppia (C, y), con $C \subset N, i \in C, j \notin C$ e y è un'imputazione tale che:*

$$y(C) = v(C)$$
$$y_k > x_k, \forall\ k \in C$$

Successivamente è necessario introdurre l'idea di controbiezione del giocatore j contro il giocatore i rispetto all'obiezione (C, y).

Definizione 8.2.2 *Una controbiezione di j contro i rispetto a (C, y) è una coppia (D, z), con $D \subset N, j \in D, i \notin D$ e z è un'imputazione tale che:*

$$z(D) = v(D)$$
$$z_k \geq y_k, \forall\ k \in D \cap C$$
$$z_k \geq x_k, \forall\ k \in D \setminus C$$

A questo punto si può definire il Bargaining Set.

Definizione 8.2.3 *Il Bargaining Set di un gioco (N, v) è l'insieme delle imputazioni x tali che per ogni obiezione ad x esiste una controbiezione, cioè l'insieme delle imputazioni x per le quali non esistono obiezioni giustificate; si indica con $\mathcal{M}_1^i$.*

Si può dare la seguente interpretazione:
Il giocatore i non è soddisfatto della ripartizione x in quanto ritiene che il giocatore j ottenga troppo, per cui minaccia di formare la coalizione C che esclude j, nella quale tutti i componenti saranno avvantaggiati (obiezione); ma se l'obiezione non è giustificata questo vuol dire che il giocatore j può a sua volta formare la coalizione D, di cui possono far parte anche membri di C, con la quale non svantaggerà nessuno.

Esempio 8.2.1 (Gioco di maggioranza) *Data un'imputazione x, sia (C, y) un'obiezione di i contro j; C deve essere della forma $\{i, h\}$, perchè $v(i) = 0$, con $y_i > x_i$ e quindi $y_h < 1 - x_i$, essendo $y(C) = v(C) = 1$. Se $x_j + y_h \leq 1$ allora j ha una controbiezione e quindi se $x \in \mathcal{M}_1^i$ si ha $y_h < 1 - x_i \Rightarrow y_h \leq 1 - x_j$ da cui si ricava $x_j \leq x_i, \forall\ i, j$ e quindi $x_i = x_j = x_h = \frac{1}{3}$. Quindi $\mathcal{M}_1^i = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.* ♢

Esempio 8.2.2 (Io e mia zia (da Osborne - Rubinstein)) *Si consideri il gioco semplice monotono a 4 giocatori le cui coalizioni vincenti minimali sono:*

$$\mathcal{W} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Data un'imputazione x con $x_2 < x_3$, un'obiezione di 2 contro 3 è data dalla coalizione $\{1, 2\}$, assegnando $y_1 = 1 - x_2 - \varepsilon$ e $y_2 = x_2 + \varepsilon$, con $\varepsilon < x_3 - x_2$. 3 non ha alcuna controbiezione (infatti $y_1 + x_3 > 1$), per cui per la simmetria dei giocatori 2, 3, 4 si ha che $x \in \mathcal{M}_1^i$ se $x_1 = 1 - 3\alpha, x_2 = x_3 = x_4 = \alpha$.
Un'obiezione di 1 contro 2 rispetto ad x è data dalla coalizione $\{1, 3\}$, assegnando $y_1 > 1 - 3\alpha$ e $y_3 < 3\alpha$. 2 non ha alcuna controbiezione rispetto ad y (con la coalizione $\{2, 3, 4\}$), se $\alpha + 3\alpha + \alpha > 1$, cioè se $\alpha > \frac{1}{5}$.
Un'obiezione di 2 contro 1 rispetto ad x è data dalla coalizione $\{2, 3, 4\}$, assegnando $y_2 > \alpha$ e $y_3 = y_4 < \frac{1-\alpha}{2}$. 1 non ha alcuna controbiezione rispetto ad y (con la coalizione $\{1, 3\}$ oppure $\{1, 4\}$), se $1 - 3\alpha + \frac{1-\alpha}{2} > 1$, cioè se $\alpha < \frac{1}{7}$.
Quindi $\mathcal{M}_1^i = \{(1 - 3\alpha, \alpha, \alpha, \alpha,), \frac{1}{7} \leq \alpha \leq \frac{1}{5})\}$. ♢

8.3 Il Kernel

A partire dalla definizione di eccesso di una coalizione S rispetto ad un'imputazione x ($e(S,x)$) si può introdurre l'idea di surplus di un giocatore i contro un altro giocatore j rispetto all'imputazione x.

Definizione 8.3.1 *Il surplus di i contro j rispetto ad x è dato da:*

$$s_{i,j}(x) = \max_{S \ni i; S \not\ni j} e(S,x)$$

In altre parole il surplus rappresenta il massimo guadagno (o minima perdita) del giocatore i se forma una coalizione senza j, supponendo che gli altri giocatori si "accontentino" del payoff x.

A questo punto si possono definire il Kernel e il Prekernel, che fa riferimento alle preimputazioni.

Definizione 8.3.2 *Il Kernel di un gioco (N,v) è l'insieme delle imputazioni x tali che $s_{i,j}(x) > s_{j,i}(x) \Rightarrow x_j = v(j), \forall\ i,j \in N$; si indica con $\mathcal{K}$.*
Il Prekernel di un gioco (N,v) è l'insieme delle preimputazioni x tali che $s_{i,j}(x) = s_{j,i}(x)$; si indica con $\mathcal{K}$.

Teorema 8.3.1 *Il Kernel è un sottoinsieme del Bargaining Set.*

Esempio 8.3.1 (Gioco di maggioranza) *Per il Teorema 8.3.1 $\mathcal{K} = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.* ♢

Esempio 8.3.2 (Io e mia zia (da Osborne - Rubinstein)) *Data un'imputazione $x \in \mathcal{K}$, per il Teorema 8.3.1 si ha $x = (1-3\alpha, \alpha, \alpha, \alpha,), \frac{1}{7} \leq \alpha \leq \frac{1}{5}$; allora $s_{1,2}(x) = 2\alpha$ e $s_{2,1}(x) = 1 - 3\alpha$; essendo $1 - 3\alpha > 0$, cioè $x_1 > v(1)$, deve essere verificato $s_{2,1} \leq s_{1,2}$, cioè $1 - 3\alpha \leq 2\alpha$ da cui $\alpha \geq \frac{1}{5}$ e quindi $\mathcal{K} = \{(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})\}$.* ♢

Esiste una definizione alternativa del Kernel che si basa su differenti definizioni di obiezione e controbiezione.

Definizione 8.3.3 *Un'obiezione di i contro j rispetto ad x è una coalizione $C \subset N, i \in C, j \notin C$ e $x_j > v(j)$.*
Una controbiezione di j contro i è una coalizione $D \subset N, j \in D, i \notin D$ e $e(D,x) \geq e(C,x)$.
Il Kernel è l'insieme delle imputazioni x tali che per ogni obiezione C di un qualsiasi i contro j esiste una controbiezione D di j contro i.

8.4 Il Nucleolo

Per finire è possibile definire anche il nucleolo in funzione di una opportuna obiezione e controbiezione.

Definizione 8.4.1 *Un'obiezione ad x è una coppia (C, y), con $C \subset N$ e y è un'imputazione tale che $e(C, x) > e(C, y)$, cioè $y(C) > x(C)$.*
Una controbiezione rispetto a (C, y) è una coalizione $D \subset N$ tale che $e(D, y) > e(D, x)$, cioè $x(D) > y(D)$ e $e(D, y) \geq e(C, x)$.
Il nucleolo è l'insieme delle imputazioni x tali che per ogni obiezione (C, y) esiste una controbiezione D.

Teorema 8.4.1 *Il nucleolo è un elemento del Kernel.*

Esempio 8.4.1 (Giochi precedenti) *Per il Teorema 8.4.1 il nucleolo del gioco di maggioranza è $\nu = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$ e quello del gioco io e mia zia è $\nu = \{(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})\}$.* ♢

Per concludere si possono esaminare due classi di giochi per le quali è particolarmente semplice determinare il nucleolo, i bankruptcy game e i fixed tree game.

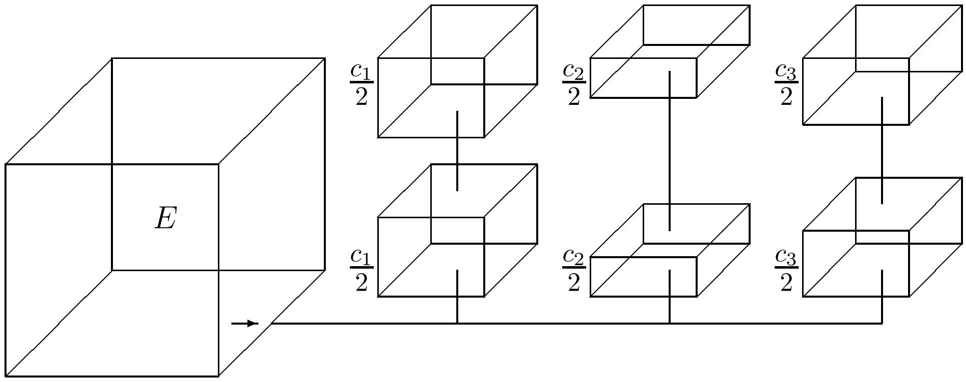
Per un bankruptcy game (E, c) il nucleolo si può calcolare facilmente come:

$$\nu_i = \begin{cases} CEA_i(E; \frac{1}{2}c) & \text{se } E < \frac{1}{2}\sum_{i \in N} c_i \\ c_i - CEA_i(\sum_{j \in N} c_j - E, \frac{1}{2}c) & \text{se } E \geq \frac{1}{2}\sum_{i \in N} c_i \end{cases}$$

Questa soluzione è nota anche come "regola del Talmud", per la seguente citazione nel libro della legge ebraica:
Se un uomo muore lasciando tre mogli alla prima delle quali aveva promesso 100, alla seconda 200 e alla terza 300, si divida il patrimonio nel modo seguente:

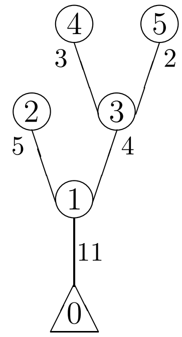
Lascito	*Prima*	*Seconda*	*Terza*
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

Questa regola può essere rappresentata tramite i seguenti vasi comunicanti:



Per un fixed tree game si può utilizzare la seguente procedura (*painting story*). Si può supporre che la manutenzione dell'albero consista in nella tinteggiatura; tutti i giocatori dipingono alla stessa velocità e iniziano contemporaneamente. Ogni giocatore inizia a dipingere il secondo arco a lui più vicino, escludendo cioè quello entrante nel vertice a lui associato, che non sia ancora stato dipinto; per ultimo dipinge l'arco entrante. Quando un qualsiasi arco viene terminato si riassegnano i giocatori, sempre con le stesse regole.

Esempio 8.4.2 (Nucleolo di un fixed tree game) *Per la situazione rappresentata nella figura si ha:*



- *Le assegnazioni iniziali dei giocatori sono:*
  $1 \to (0,1), 2 \to (0,1), 3 \to (0,1), 4 \to (1,3), 5 \to (1,3)$
  dopo due unità di tempo 4 e 5 hanno terminato l'arco $(1,3)$*;*
- *Le nuove assegnazioni sono:*
  $1 \to (0,1), 2 \to (0,1), 3 \to (0,1), 4 \to (0,1), 5 \to (0,1)$
  dopo una unità di tempo l'arco $(0,1)$ *è terminato;*
  1 e 3 hanno terminato;
- *Le ultime assegnazioni sono:*
  $2 \to (1,2), 4 \to (3,4), 5 \to (3,5)$
  5 termina dopo due unità di tempo;
  4 termina dopo tre unità di tempo;
  2 termina dopo cinque unità di tempo.

Il nucleolo è $\nu = (3,8,3,6,5)$. $\diamondsuit$

Capitolo 9

Giochi su reti

9.1 Giochi sugli archi e sui nodi

Col termine giochi su reti si indicano quelle classi di giochi che fanno riferimento ad un problema che può essere rappresentato tramite una rete. Questi giochi appartengono alla classe degli *Operations Research Games*, cioè giochi derivanti da problemi di ricerca operativa. Gli *ORG* risultano estremamente interessanti da un punto di vista strutturale e computazionale in quanto "ereditano" dalla struttura del problema alcune caratteristiche che permettono di semplificare alcuni aspetti complessi della Teoria dei Giochi, quali la determinazione della funzione caratteristica e il suo stesso significato.
Solitamente si distinguono due tipi di giochi su reti:
Giochi sugli archi: I giocatori controllano gli archi.
Giochi sui nodi: I giocatori controllano i nodi.

Il controllo non è necessariamente biunivoco, nel senso che un giocatore può controllare più elementi oppure un elemento può essere controllato da più giocatori (comitato) oppure possono esistere elementi non controllati da alcun giocatore (pubblici).

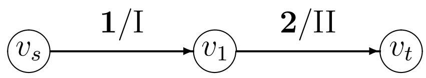
Ai problemi su reti, o comunque legati ai grafi, può essere associato un gioco supponendo di avere più decisori. In questa trattazione verrano analizzati alcuni problemi, evidenziando alcune caratteristiche interessanti del gioco TU associato, precisando se, nella versione classica, si tratta di giochi di costo o di profitto.

9.1.1 Flow Game

Sono giochi di profitto associati ad un problema di flusso massimo.
Ogni giocatore può controllare più archi e ogni arco è controllato da un solo giocatore; non ci sono archi pubblici. Il valore di una coalizione è dato dal valore del flusso massimo dalla sorgente al pozzo, utilizzando la sottorete che contiene solo archi controllati dai giocatori della coalizione.

Questi giochi sono bilanciati e in particolare sono totalmente bilanciati, cioè il gioco ristretto ad una qualsiasi coalizione è bilanciato; una allocazione nel nucleo si ottiene assegnando ai giocatori che controllano gli archi di un taglio di capacità minima le capacità degli archi del taglio, in accordo col risultato di Owen. Le allocazioni corrispondenti ai tagli di capacità minima non rispettano alcun criterio di equità.

Esempio 9.1.1 (Nucleo di un flow game) *Si consideri il seguente problema di flusso da v_s a v_t, dove il giocatore I controlla il primo arco e II controlla il secondo:*



La funzione caratteristica del gioco associato è:

$$v(I) = v(II) = 0; v(I, II) = 1$$

Applicando il risultato esposto si ottiene l'allocazione $x = (1, 0)$ corrispondente al taglio contenente l'arco da v_s a v_1. Tale allocazione sta nel nucleo, ma tratta in modo diverso i giocatori che sono simmetrici rispetto al gioco, mentre il giocatore II "contribuisce" anche maggiormente alla rete, fornendo un arco di capacità superiore. ♢

Un altro risultato interessante è dato dal seguente teorema.

Teorema 9.1.1 (Kalai e Zemel, 1982)
Un gioco è totalmente bilanciato se e solo se è un flow game.

La dimostrazione è abbastanza articolata.

Definizione 9.1.1 *Dati due giochi u, v si chiama* gioco minimo di u e v *il gioco $w = min(u, v)$ definito da $w(S) = min\ (u(S), v(S)), \forall\ S \subseteq N$.*

Osservazione 9.1.1

- *Se u e v sono totalmente bilanciati allora il gioco w è totalmente bilanciato in quanto $Core(u_S) \subseteq Core(w_S)$ oppure $Core(v_S) \subseteq Core(w_S), \forall\ S \subseteq N$.*

Teorema 9.1.2 *Un gioco è totalmente bilanciato se e solo se è il gioco minimo di un insieme finito di giochi additivi.*

Dimostrazione
Per l'osservazione precedente la condizione è sufficiente.
Viceversa sia v un gioco totalmente bilanciato e sia $\{v^S\}_{S \subseteq N}$, un insieme finito di giochi additivi a n giocatori costruiti nel seguente modo:
per ogni $S \subseteq N$

- sia $(x_i)_{i \in S}$ una allocazione di $Core(v_S)$;
- siano $x_j,\ j \in N \setminus S \quad n-s$ numeri reali con $x_j \geq v(N)$;
- sia v^S il gioco additivo generato da $(x_1, ..., x_n)$;

allora si ha:

$$\min_{S \subseteq N}\{v^S(T)\} = v^T(T) = v(T), \forall\, T \subseteq N \Rightarrow v = min\{v^S\}$$

♣

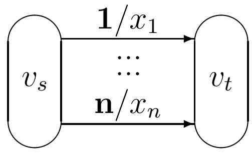
Osservazione 9.1.2

- $(x_i)_{i \in S} \in Core(v_S) \Rightarrow v^S(T) \geq v(T)$ *se* $T \subseteq S$, *con* $v^S(T) = v(T)$ *se* $T = S$.
- $x_j \geq v(N),\ j \in N \setminus S \Rightarrow v^S(T) \geq v(T)$ *se* $T \not\subseteq S$.

Lemma 9.1.1 *Ogni gioco additivo è un flow game.*

Dimostrazione

Il gioco additivo generato da $(x_1, ..., x_n)$ equivale al flow game generato da una rete con n archi che collegano la sorgente al pozzo, in cui l'arco a_i appartiene al giocatore i e ha capacità x_i.

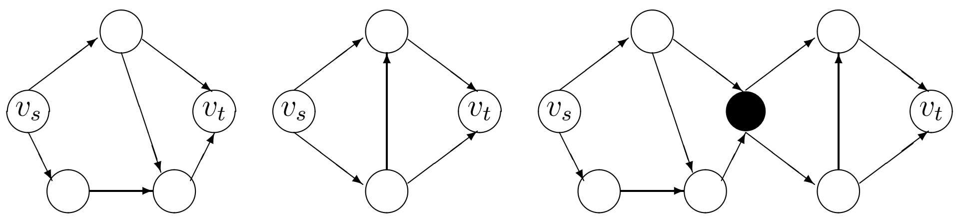


♣

Lemma 9.1.2 *Il gioco minimo di due flow game è un flow game.*

Dimostrazione

Dati due giochi v' e v'' generati dalle reti G' e G'' il gioco $v = min(v', v'')$ è generato dalla rete ottenuta facendo coincidere il pozzo di G' con la sorgente di G''.



♣

Dimostrazione del Teorema di Kalai-Zemel

Per i Lemmi 9.1.1 e 9.1.2 e il Teorema 9.1.2 la condizione è sufficiente. Viceversa un flow game è totalmente bilanciato poichè i suoi sottogiochi sono flow game. ♣

9.1.2 Shortest Path Game

Sono giochi di profitto associati ad un problema di cammino minimo.

Ogni giocatore può controllare più nodi e ogni nodo è controllato da un solo giocatore; non ci sono nodi pubblici; alcuni nodi sono detti sorgenti, altri pozzi. Il valore di una coalizione è dato dalla differenza tra il ricavo ottenuto trasportando un bene da una qualsiasi sorgente ad un qualsiasi pozzo tra quelli controllati dai giocatori della coalizione

e il costo del cammino minimo che attraversa solo nodi posseduti dai giocatori della coalizione; se la differenza è negativa il valore della coalizione è nullo.
Poichè il nucleo può essere vuoto si può utilizzare il valore di Shapley come regola di ripartizione dei profitti che risponda ai seguenti principi di equità (Fragnelli, García-Jurado, Mendez-Naya, 2000):

- efficienza;
- irrilevanza (i giocatori che controllano solo nodi isolati ricevono un payoff nullo);
- adiacenza (i giocatori che controllano gli estremi di un arco hanno la stessa variazione di payoff se si elimina l'arco);
- non collegamento (due giocatori che non sono connessi hanno la stessa variazione di payoff se si elimina l'altro giocatore).

9.1.3 Minimum Cost Spanning Tree Game

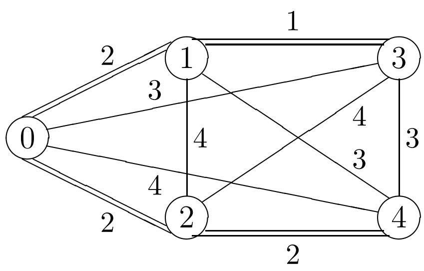
Sono giochi di costo associati ad un problema di minimo albero ricoprente.
Ogni giocatore controlla un solo nodo e ogni nodo è controllato da un solo giocatore; non ci sono nodi pubblici, eccetto la sorgente, alla quale tutti vogliono essere collegati. Il problema richiede che il grafo sia non orientato e completo (clique). Il valore di una coalizione è dato dal valore dell'albero ricoprente di costo minimo che unisce i nodi corrispondenti ai giocatori della coalizione con la sorgente, attraversando solo nodi posseduti dai giocatori della coalizione.
Eliminando la restrizione sui nodi si ottiene un gioco monotono, cioè un gioco in cui il valore della coalizione non decresce se si aggiungono altri giocatori.
Questi giochi sono bilanciati e un'allocazione nel nucleo, detta allocazione di Bird (1976), si ottiene assegnando ad ogni giocatore il costo dell'ultimo arco dell'unico cammino non orientato che nell'albero di costo minimo collega il nodo corrispondente alla radice.

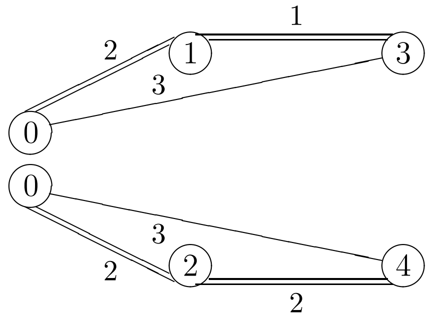
Il nucleo e il nucleolo equivalgono al prodotto cartesiano del nucleo e del nucleolo di una decomposizione in sottogiochi secondo una struttura efficiente $\{P_1, ..., P_m\}$ dei giocatori (Granot e Huberman, 1981), cioè secondo i sottoalberi dell'albero di costo minimo aventi origine dalla sorgente, e ridefinendo il costo c_{0j} degli archi $(0, j)$ come:

$$c'_{0j} = min \left\{ c_{0j}, \min_{k \notin P_j} \{c_{jk}\} \right\}, \qquad \forall\ j \in P_j$$

Tale risultato non si estende al valore di Shapley.

Esempio 9.1.2 (Decomposizione di uno spanning tree) *Nella figura seguente il nodo* 0 *rappresenta la sorgente, gli archi "spessi" rappresentano uno spanning tree di costo*





minimo e a destra è rappresentata la decomposizione efficiente $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$ *(si noti che il costo dell'arco* $(0,4)$ *diventa 3 unità).*

$$
\begin{array}{lll}
Core(c_{13}) = \{(\alpha, 3-\alpha) | 0 \leq \alpha \leq 2\} & \nu(c_{13}) = (1,2) & \varphi(c_{13}) = (1,2) \\
Core(c_{24}) = \{(\beta, 4-\beta) | 1 \leq \beta \leq 2\} & \nu(c_{24}) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) & \varphi(c_{24}) = (1,3) \\
Core(c) = \left\{ (\alpha, \beta, 3-\alpha, 4-\beta) | \begin{array}{c} 0 \leq \alpha \leq 2 \\ 1 \leq \beta \leq 2 \end{array} \right\} & \nu(c) = \left(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right) & \varphi(c) = \left(\frac{11}{12}, \frac{17}{12}, \frac{23}{12}, \frac{33}{12}\right)
\end{array}
$$

La decomposizione vale per il nucleo e per il nucleolo, ma non per il valore di Shapley. ♢

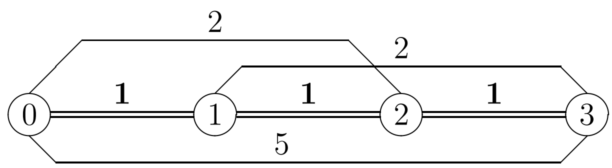
L'allocazione di Bird non è equa per i giocatori "più vicini" alla sorgente. Esistono due modi per ottenere altre ripartizioni che risultano preferibili per questi giocatori (Granot e Huberman, 1984).

Richiesta debole: Un giocatore chiede ad alcuni successori secondo la soluzione di Bird di "rimborsare" il risparmio ottenuto grazie alla sua presenza.

Richiesta forte: Un giocatore chiede ad alcuni successori di "rimborsare" oltre al risparmio ottenuto grazie alla sua presenza anche il "rimborso" che lui ha versato ai suoi predecessori.

La richiesta debole genera soluzioni nel nucleo se applicata alla soluzione di Bird; la richiesta forte genera soluzioni nel nucleo se applicata a una soluzione nel nucleo.

Esempio 9.1.3 (Richiesta debole - Richiesta forte) *Si consideri il gioco associato alla rete seguente:*



La soluzione di Bird assegna ai giocatori i payoff $(1,1,1)$. *Il primo giocatore con una richiesta debole ottiene* $(0,2,1)$. *Il secondo giocatore con una richiesta debole può ottenere* $(0,1,2)$, *mentre con una richiesta forte può ottenere* $(0,0,3)$. ♢

9.1.4 Minimum Cost Forest Game

Sono giochi di costo associati ad un problema di minima foresta ricoprente.

Ogni giocatore controlla un solo nodo e ogni nodo è controllato da un solo giocatore; non

ci sono nodi pubblici, eccetto le sorgenti; ogni nodo vuole essere collegato a una o più sorgenti; gli archi possono servire per il collegamento a qualunque sorgente. Il problema richiede che il grafo sia non orientato ma non necessariamente completo.
Il valore di una coalizione è dato dal valore della foresta di costo minimo che unisce i nodi corrispondenti ai giocatori della coalizione con le sorgenti richieste, attraversando qualsiasi nodo (algoritmo di Kruskal modificato).

Teorema 9.1.3 (Kuipers, 1977)
Il nucleo di un MCFG è non vuoto se è verificata una delle due condizioni seguenti:

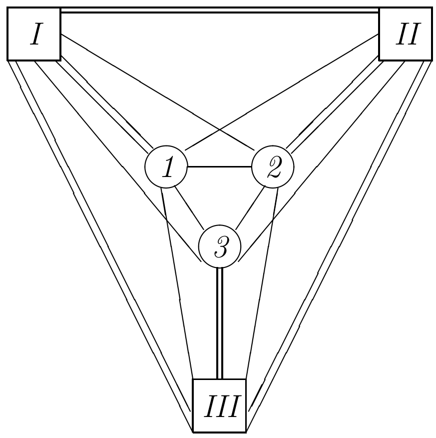
1. *esiste almeno un nodo connesso con tutte le sorgenti (la soluzione è un albero);*

2. *nessun nodo è connesso con più di una sorgente (la soluzione è un insieme di alberi);*

Osservazione 9.1.3

- *Se il gioco ha al più due sorgenti (o al più due giocatori) il nucleo è certamente non vuoto, in quanto una delle due condizioni precedenti è certamente verificata.*

Esempio 9.1.4 (Nucleo vuoto) *Sia dato il gioco rappresentato dalla seguente rete in cui le richieste giocatore-sorgente sono* $1-I, 2-II, 3-III$ *e gli archi 'fini' hanno costo* 3 *e quelli 'spessi' costo* 5.



Si consideri la collezione bilanciata $N = \frac{1}{2}((12),(13),(23))$.
I corrispondenti valori sono:

$$\begin{aligned} c(N) &= C(I-2, 2-1, 1-II) + C(III-3) = 14 \\ c(12) &= C(I-2, 2-1, 1-II) = 9 \\ c(13) &= C(I-3, 3-1, 1-III) = 9 \\ c(23) &= C(II-3, 3-2, 2-III) = 9 \end{aligned}$$

e quindi:

$$14 = c(N) \leq \tfrac{1}{2}c(12) + \tfrac{1}{2}c(13) + \tfrac{1}{2}c(23) = \tfrac{27}{2}.$$

Assurdo. ♢

9.1.5 Traveling Salesman Game

Sono giochi di costo associati ad un problema del commesso viaggiatore.
Ogni giocatore controlla un solo nodo e ogni nodo è controllato da un solo giocatore; non ci sono nodi pubblici, eccetto la sorgente. Il problema richiede che il grafo sia fortemente connesso.
Il valore di una coalizione è dato dal costo del circuito di costo minimo che unisce i nodi corrispondenti ai giocatori della coalizione e la sorgente.

Teorema 9.1.4 (Potters, Curiel e Tijs, 1992)
Il nucleo di un TSG è non vuoto se ci sono al più tre giocatori.

Esempio 9.1.5 (Nucleo vuoto) *Si consideri il gioco rappresentato dalla seguente matrice dei costi, in cui* 0 *rappresenta la sorgente:*

	0	1	2	3	4
0	M	1	2	2	1
1	1	M	1	2	2
2	2	1	M	1	2
3	1	2	2	M	2
4	1	2	1	1	M

Si consideri la collezione bilanciata $N = \frac{1}{2}((123),(124),(34))$. *I corrispondenti valori sono:*

$c(N) = C(0-1-2-3-4-0) = 6$
$c(123) = C(0-1-2-3-0) = 4$
$c(124) = C(0-4-2-1-0) = 4$
$c(34) = C(0-4-3-0) = 3$

e quindi:

$6 = c(N) \leq \frac{1}{2}c(123) + \frac{1}{2}c(124) + \frac{1}{2}c(34) = \frac{11}{2}$.

Assurdo. ♢

Teorema 9.1.5 (Kuipers, 1991 e Tamir, 1989)
Se il problema è simmetrico il nucleo di un TSG è non vuoto se ci sono al più cinque giocatori.

9.2 Grafi e cooperazione

In generale si suppone che tutti i giocatori possano o vogliano formare qualsiasi coalizione, ma questo non è necessariamente verificato in numerose situazioni reali, ad esempio si pensi alle coalizioni politiche. In questo caso si parla di strutture cooperative, che possono essere rappresentate con un grafo non orientato in cui i nodi rappresentano i giocatori e gli archi uniscono i giocatori che accettano di unirsi in una coalizione (Myerson, 1977).

Formalmente il nodo v_i è associato al giocatore i e l'arco $a_{ij} = (v_i, v_j)$ indica che i giocatori i e j sono disposti a far parte della stessa coalizione.

In alcune situazioni può essere necessario che per formare una coalizione ciascun giocatore debba essere disposto a unirsi a tutti gli altri, mentre in altre è sufficiente la disponibilità a formare la coalizione "attraverso alcuni giocatori intermedi". In altre parole nel primo caso una coalizione si forma se il corrispondente sottografo è completo, mentre nel secondo caso è sufficiente che sia connesso.

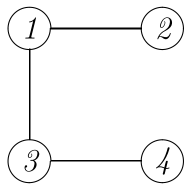
Gioco ristretto rispetto a un grafo G

I giocatori possono realizzare solo le coalizioni indotte dal grafo G; il valore della coalizione è dato dalla somma dei valori delle sottocoalizioni che possono effettivamente formarsi.

Osservazione 9.2.1

- *Esiste una formulazione più restrittiva in cui due giocatori i e j possono far parte della stessa coalizione solo se entrambi esprimono questa volontà (Claim game). In questo caso è necessario utilizzare un grafo orientato, in cui l'arco a_{ij} esprime che il giocatore i accetta di entrare in una coalizione con il giocatore j, ma non viceversa.*

Esempio 9.2.1 (Coalizioni indotte) *Si consideri un gioco a quattro giocatori con la struttura indotta dal seguente grafo G:*



Se per formare una coalizione si richiede la reciprocità si hanno le seguenti coalizioni effettive:

1 - 2 - 3 - 4 - 12 - 13 - 34

Se non si richiede la reciprocità le coalizioni effettive sono:

1 - 2 - 3 - 4 - 12 - 13 - 34 - 123 - 134 - 1234

Il gioco v_G ristretto rispetto a G risulta nel primo caso:

$$\begin{array}{lll}
v_G(1) = v(1) & v_G(12) = v(12) & v_G(123) = max\ \{v(12) + v(3), v(13) + v(2)\} \\
v_G(2) = v(2) & v_G(13) = v(13) & v_G(124) = v(12) + v(4) \\
v_G(3) = v(3) & v_G(14) = v(1) + v(4) & v_G(134) = max\ \{v(13) + v(4), v(1) + v(34)\} \\
v_G(4) = v(4) & v_G(23) = v(2) + v(3) & v_G(234) = v(2) + v(34) \\
 & v_G(24) = v(2) + v(4) & \\
 & v_G(34) = v(34) & \\
\multicolumn{3}{l}{v_G(N) = max\ \{v(12) + v(34), v(13) + v(2) + v(4)\}}
\end{array}$$

e nel secondo caso:

$$\begin{array}{lll}
v_G(1) = v(1) & v_G(12) = v(12) & v_G(123) = v(123) \\
v_G(2) = v(2) & v_G(13) = v(13) & v_G(124) = v(12) + v(4) \\
v_G(3) = v(3) & v_G(14) = v(1) + v(4) & v_G(134) = v(134) \\
v_G(4) = v(4) & v_G(23) = v(2) + v(3) & v_G(234) = v(2) + v(34) \\
 & v_G(24) = v(2) + v(4) & \\
 & v_G(34) = v(34) & \\
\multicolumn{3}{l}{v_G(N) = v(1234)}
\end{array}$$

$\diamondsuit$

Regola di allocazione rispetto a un grafo G

$$x : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n \ t.c. \sum_{i \in S} x_i(G) = v_G(S)$$

dove $\mathcal{G}$ è l'insieme dei grafi e $S \in N/G$ è una coalizione indotta da una componente connessa di G.

Stabilità

Una regola di allocazione x è stabile se e solo se:

$$x_i(G) \geq x_i(G \setminus (i,j)) \ e \ x_j(G) \geq x_j(G \setminus (i,j)) \qquad \forall (i,j) \in G$$

Equità

Una regola di allocazione x è equa se e solo se:

$$x_i(G) - x_i(G \setminus (i,j)) = x_j(G) - x_j(G \setminus (i,j)) \qquad \forall (i,j) \in G$$

Teorema 9.2.1 (Myerson, 1977)

L'unica regola di allocazione equa è il valore di Shapley del gioco ristretto rispetto al grafo. Inoltre se il gioco è superadditivo l'allocazione è stabile.

Esempio 9.2.2 (Valore di Shapley del gioco ristretto) *Sia dato il gioco:*

$N = 1, 2, 3$

$v(1) = 1; v(2) = 2; v(3) = 3; v(12) = 6; v(13) = 8; v(23) = 10; v(N) = 12$

I giochi ristretti (non reciproci) e i valori di Shapley sono:

G	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	N	φ		
$\emptyset$	1	2	3	3	4	5	6	1	2	3
a_{12}	1	2	3	6	4	5	9	2.5	3.5	3
a_{13}	1	2	3	3	8	5	10	3	2	5
a_{23}	1	2	3	3	4	10	11	1	4.5	5.5
a_{12}, a_{13}	1	2	3	6	8	5	12	4.167	3.167	4.667
a_{12}, a_{23}	1	2	3	6	4	10	12	1.833	5.333	4.833
a_{13}, a_{23}	1	2	3	3	8	10	12	2	3.5	6.5
a_{12}, a_{13}, a_{23}	1	2	3	6	8	10	12	2.5	4	5.5

$\diamondsuit$

Capitolo 10

Bibliografia

Aumann RJ (1974) *Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies*, Journal of Mathematical Economics 1 : 67-96.

Aumann RJ, Maschler M (1964) *The Bargaining Set for Cooperative Games*, in Advances in Game Theory (Annals of Mathematics Studies 52) (Dresher M, Shapley LS, Tucker AW eds.), Princeton University Press, Princeton : 443-476.

Aumann RJ, Maschler M (1985) *Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud*, Journal Economic Theory 36 : 195-213.

Aumann RJ, Peleg B (1960) *Von Neumann - Morgenstern Solutions to Cooperative Games without Side Payments*, Bullettin of the American Mathematical Society 66 : 173-179.

Banzhaf JF (1965) *Weighted Voting doesn't Work: A Mathematical Analysis*, Rutgers Law Review 19 : 317-343.

Bird CG (1976) *On Cost Allocation for a Spanning Tree: A Game Theoretic Approach*. Networks 6 : 335-350.

Bondareva ON (1963) *Certain Applications of the Methods of Linear Programming to the Theory of Cooperative Games*, Problemy Kibernetiki 10 : 119-139.

Braess D (1968) *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*, Unternehmensforschung 12 : 258-268.

Coleman JS (1971) *Control of Collectivities and Power of a Collectivity to Act*, in Social Choice (Lieberman B ed.), Gordon and Breach, London : 269-300.

Curiel I, Pederzoli G, Tijs S (1989) *Sequencing Games*, European Journal of Operational Research 40 : 344-351.

Curiel I, Maschler M, Tijs S (1987) *Bankruptcy Games*, Zeitschrift für Operations Research Series A 31 : 143-159.

Davis M, Maschler M (1965) *The Kernel of a Cooperative Game*, Naval Research Logistics Quarterly 12 : 223-259.

Deegan J, Packel EW (1978) *A New Index of Power for Simple n-person Games*, International Journal of Game Theory 7 : 113-123.

Flood MA (1958) *Some Experimental Games*, Management Science 5 : 5-26.

Fragnelli V, García-Jurado I, Mendez-Naya L (2000) *On Shortest Path Games*, Mathematical Methods of Operations Research 52 : 139-216.

Fudenberg D, Tirole J (1991) *Game Theory*, MIT Press, Cambridge.

Gillies DB (1953) *Some Theorems on n-person Games*, PhD Thesis, Princeton, Princeton University Press.

Gillies DB (1959) *Solutions to General Non-Zero-Sum Games* in Contributions to the Theory of Games, Volume IV (Annals of Mathematics Studies 40) (Tucker AW, Luce RD eds.), Princeton University Press, Princeton : 47-85.

Granot D, Huberman G (1981) *Minimum Cost Spanning Tree Games*, Mathematical Programming 21 : 1-18.

Granot D, Huberman G (1984) *On the Core and Nucleolus of Minimum Spanning Tree Games*, Mathematical Programming 29 : 323-347.

Harsanyi JC (1966) *A General Theory of Rational Behavior in Game Situations*, Econometrica 34 : 613-634.

Harsanyi JC (1967-68) *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, Parts I, II and III*, Management Science 14 : 159-182, 320-334 e 486-502.

Herrero C, Villar A (2001) *The Three Musketeers: Four Classical Solutions to Bankruptcy Problems*, Mathematical Social Sciences 42 : 307-328.

Holler MJ (1982) *Forming Coalitions and Measuring Voting Power*, Political Studies 30 : 262-271.

Johnston RJ (1978) *On the Measurement of Power: Some Reactions to Laver*, Environment and Planning A 10 : 907-914.

Kalai E, Smorodinsky M (1975) *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*, Econometrica 43 : 513-518.

Kalai E, (1977) *Proportional Solutions to Nash's Bargaining Situations: Interpersonal Utility Comparisons*, Econometrica 45 : 1623-1630.

Kalai E, Zemel E (1982) *Totally Balanced Games and Games of Flow*, Mathematics of Operations Research 7 : 476-478.

Kopelowitz A (1967) *Computation of the Kernels of Simple Games and the Nucleolus of n-person Games*, RM-131, Mathematics Department, The Hebrew University of Jerusalem, Israel

Kuhn HW (1953) *Extensive Games and the Problem of Information*, in Contributions to the Theory of Games, Volume II (Annals of Mathematics Studies 28) (Kuhn HW, Tucker AW eds.), Princeton University Press, Princeton : 193-216.

Kuipers J (1977) *Minimum Cost Forest Games*, International Journal of Game Theory 26 : 367-377.

Kuipers J (1991) *A Note on the 5-person Traveling Salesman Game*, Zeitschrift fur Operation Research 21 : 339-351.

Littlechild SC, Owen G (1973) *A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case*, Management Science 20 : 370-372.

Littlechild SC, Thompson GF (1977) *Aircraft Landing Fees: A Game Theory Approach*, Bell Journal of Economics 8 : 186-204.

Lucas WF (1968) *A Game with No Solution*, Bulletin of the American Mathematical Society 74 : 237-239.

Myerson RB (1977) *Graphs and Cooperation in Games*, Mathematics of Operations Research 2 : 225-229.

Nash JF (1950a) *Equilibrium Points in N-Person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36 : 48-49.

Nash JF (1950b) *The Bargaining Problem*, Econometrica 18 : 155-162.

von Neumann J (1928) *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen 100 : 295-320.

von Neumann J, Morgenstern O (1944) *Theory of Games and Economic Behavior (2nd ed. 1947, 3rd ed. 1953)*, Princeton University Press, Princeton.

Owen G (1975) *On the Core of Linear Production Games*, Mathematical Programming 9 : 358-370.

Owen G (1994) *Game Theory 3rd ed.*, Academic Press, San Diego.

Potters J, Curiel IJ, Tijs SH (1992) *Traveling Salesman Games*, Mathematical Programming 53 : 199-211.

Schmeidler D (1969) *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*, SIAM Journal of Applied Mathematics 17 : 1163-1170.

Selten R (1965) *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit*, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 121 : 301-324 e 667-689.

Selten R (1975) *Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games*, International Journal of Game Theory 4 : 25-55.

Shapley LS (1953) *A Value for n-Person Games*, in Contributions to the Theory of Games, Vol II (Annals of Mathematics Studies 28) (Kuhn HW, Tucker AW eds.), Princeton University Press, Princeton : 307-317

Shapley LS (1967) *On Balanced Sets and Cores*, Naval Research Logistics Quarterly 14 : 453-460.

Shapley LS, Shubik M (1972) *The Assignment Game I: The Core*, International Journal of Game Theory 1 : 111-130.

Shubik M (1959) *Strategy and Market Structure: Competition, Oligopoly, and the Theory of Games*, Wiley, New York.

Shubik M (1982) *Game Theory in Social Science: Concepts and Solutions*, MIT Press, Cambridge.

Smith W (1956) *Various Optimizer for Single-Stage Production*, Naval Research Logistics Quarterly 3 : 59-66.

Tamir A (1989) *On the Core of a Traveling Salesman Cost Allocation Game*, Operations Research Letters 8 : 31-34.

Tucker AW (1953) *Memorandum on The Prisoner's Dilemma.*

Young HP (1994) *Cost Allocation*, in Handbook of Game Theory (Aumann RJ, Hart S eds.) Vol. 2, North Holland, Amsterdam : 1193-1235.

Indice