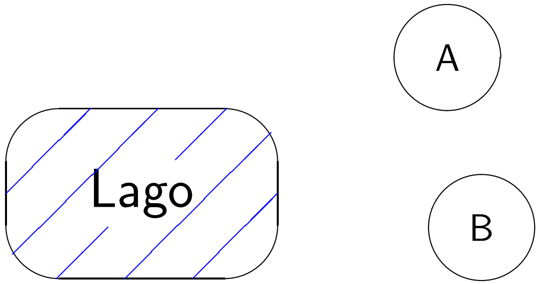
1 Teoria dei giochi e utilità

1.1 Esempio preliminare (da Young)

Due paesi A e B, aventi rispettivamente 3.600 e 1.200 abitanti, vogliono costruire un acquedotto attingendo allo stesso lago

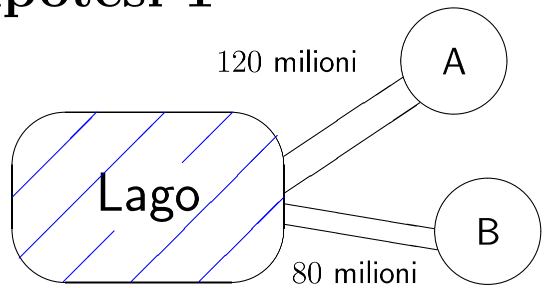
Modello di programmazione matematica

min	*Spesa di costruzione*
s.t.	*Collegare A al lago*
	Rispettare le specifiche di A
	Collegare B al lago
	Rispettare le specifiche di B

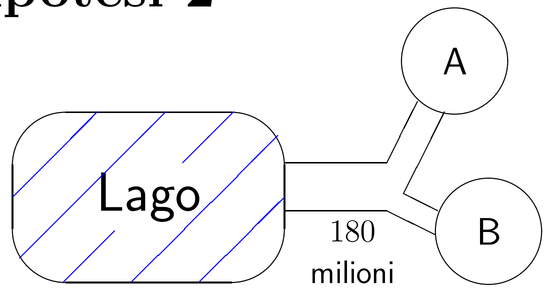


Le soluzioni ammissibili possono essere raggruppate in due sottoinsiemi che corrispondono alle ipotesi 1 e 2

Ipotesi 1



Ipotesi 2



La soluzione ottimale è:

$$x^* = \textit{ipotesi 2}$$

$$z^* = \textit{180 milioni}$$

La soluzione è attuabile se i paesi sono disponibili ad accordarsi per una realizzazione in comune, ma è necessario stabilire come ripartire la spesa

	Criterio	*A*	*B*
1	*Uguale divisione dei costi tra i paesi*	*90*	*90*
2	*Uguale divisione dei costi tra gli abitanti*	*135*	*45*
3	*Uguale divisione del risparmio tra i paesi*	*110*	*70*
4	*Uguale divisione del risparmio tra gli abitanti*	*105*	*75*
5	*Divisione dei costi (e del risparmio) in proporzione all'acquedotto singolo*	*108*	*72*

Il criterio 1 è il più vantaggioso per il paese A ma è rifiutato dal paese B
Il criterio 2 è il più vantaggioso per il paese B ma è rifiutato dal paese A
Gli altri criteri risultano più o meno vantaggiosi per i due paesi ma nessuno dei due può rifiutarne a priori qualcuno (A preferisce il criterio 4 e B preferisce il criterio 3)

La programmazione matematica non fornisce una metodologia di scelta; la Teoria dei Giochi non fornisce "la" soluzione, ma propone una soluzione (*solution concept*)

1.2 Introduzione

La Teoria dei Giochi tratta le situazioni in cui il risultato dipende dalle scelte fatte da più persone, dette *giocatori*, che operano perseguendo obiettivi che possono risultare comuni, ma non identici, differenti ed eventualmente contrastanti; possono essere presenti anche aspetti aleatori

Il nome deriva da *Theory of Games and Economic Behavior* di von Neumann e Morgenstern (1944)

Esempio 1.1 (Dilemma del prigioniero)

I/II	C	NC
C	$-5, -5$	$-1, -6$
NC	$-6, -1$	$-2, -2$

$\diamondsuit$

Esempio 1.2 (Battaglia dei sessi)

I/II	T	P
T	$2, 1$	$0, 0$
P	$0, 0$	$1, 2$

$\diamondsuit$

Esempio 1.3 (Puro coordinamento)

I/II	T	P
T	$1, 1$	$0, 0$
P	$0, 0$	$1, 1$

$\diamondsuit$

- Nell'Esempio 1.2 (e soprattutto nel 1.3) una telefonata, un accordo al 50 per cento o una strategia correlata possono risolvere facilmente il problema
- Nell'Esempio 1.1 la possibilità di comunicare renderebbe probabile un accordo per la strategia NC, ma al momento della decisione sia I che II risceglierebbero C, poichè $-1 > -2$

Classificazione di Harsanyi (1966):

<u>Giochi non cooperativi</u>	Non sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori
<u>Giochi cooperativi</u>	Sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori

- Attualmente si preferisce assumere, più restrittivamente, che in un gioco non cooperativo i giocatori non possano nemmeno comunicare in quanto ciò potrebbe alterare il risultato
- I giochi cooperativi sono divisi in due sottoclassi: giochi a utilità non trasferibile (NTU) o senza pagamenti laterali, e giochi a utilità trasferibile (TU) o a pagamenti laterali, che costituiscono un caso particolare dei giochi NTU

1.3 Rappresentazione di un gioco

- forma estesa - von Neumann (1928) e Kuhn (1953)
- forma strategica - Shubik (1982); forma normale - von Neumann e Morgenstern (1944)
- forma caratteristica - von Neumann e Morgenstern (1944); per i giochi cooperativi

Definizione 1.1

- *Si chiama funzione dei pagamenti (payoff) una funzione f che assegna ad ogni giocatore la sua vincita per ogni possibile terminazione del gioco*
- *Si chiama strategia del giocatore i una funzione σ_i che assegna al giocatore i una mossa per ogni possibile situazione del gioco*

La strategia è un "piano di azione" che individua in ogni situazione del gioco una "azione" tra le tante possibili

1.4 Forma estesa

Descrizione puntuale del gioco, delle mosse e delle relative probabilità, della situazione dopo ogni mossa, delle strategie, degli insiemi di informazione (insiemi di nodi che globalmente rappresentano la situazione di un giocatore), ecc.; risulta molto ricca ma poco maneggevole

Si utilizza una rappresentazione ad albero in cui:

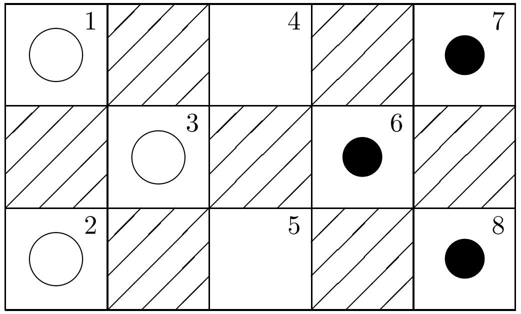
nodi	possibili situazioni del gioco
archi uscenti da un nodo	possibili mosse del giocatore chiamato a muovere
nodi terminali	valori delle vincite (payoff) di ciascun giocatore

Esempio 1.4 (Dama semplificata)

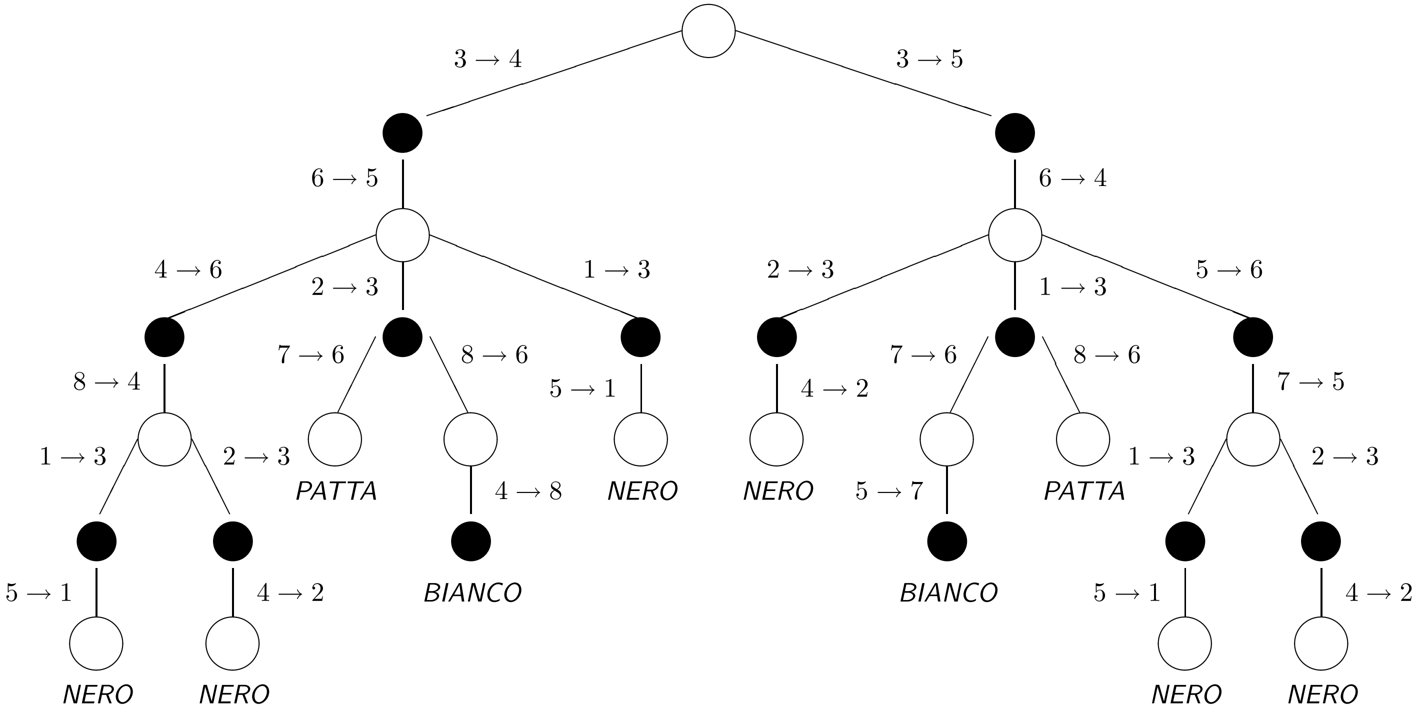
E' obbligatorio "mangiare"

Vince chi riesce a portare per primo una sua pedina sull'ultima colonna

Parità se un giocatore non può muovere



Rappresentazione ad albero della forma estesa:



◊

1.5 Forma strategica

$2n$-upla $(\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_n, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dove:

$\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_n$ insiemi non vuoti delle possibili strategie di ogni giocatore

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ funzioni reali $f_i : \displaystyle\prod_{k=1,\ldots,n} \Sigma_k \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, .., n$

- Tutti i giocatori scelgono contemporaneamente la loro strategia e la f_i dice quale è il guadagno del giocatore i determinato dalle scelte fatte
- E' possibile passare dalla forma estesa a quella strategica (il passaggio inverso è più complesso)
- Gli elementi della forma strategica possono essere riassunti in una tabella come negli esempi precedenti
- Se il gioco è a due giocatori si parla di *gioco a matrice doppia* o *bimatrice*

1.6 Forma caratteristica

Può essere usata solo per i giochi cooperativi

Definizione 1.2

- *Detto N l'insieme dei giocatori, ogni sottoinsieme S di N è detto coalizione. Se $S = N$ si ha la grande coalizione*
- *Si dice funzione caratteristica di un gioco ad n giocatori una funzione indicata con v (se il gioco è senza pagamenti laterali si usa V ed è più complessa) per cui si ha:*

$$v : \wp(N) \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } v(\emptyset) = 0$$

- *Se per ogni coppia di coalizioni disgiunte S e T si ha $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ la funzione v è detta additiva; se si ha $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ la funzione v è detta superadditiva; se si ha $v(S \cup T) \leq v(s) + v(T)$ la funzione v è detta subadditiva*
- v assegna ad S la massima vincita possibile indipendentemente dal comportamento degli altri giocatori
- La funzione caratteristica e il gioco possono essere identificati

Un gioco descritto tramite la funzione caratteristica è detto in *forma caratteristica* o *coalizionale*
Se la funzione caratteristica è additiva o superadditiva o subadditiva anche il gioco è detto *additivo* o *superadditivo* o *subadditivo*
Se per ogni coalizione S si ha $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$ il gioco è detto *a somma costante*

Esempio 1.5 (Maggioranza semplice)
Tre giocatori vogliono conseguire un risultato; se almeno due di essi si uniscono raggiungono il loro obiettivo. Questa situazione può essere rappresentata dal seguente gioco:

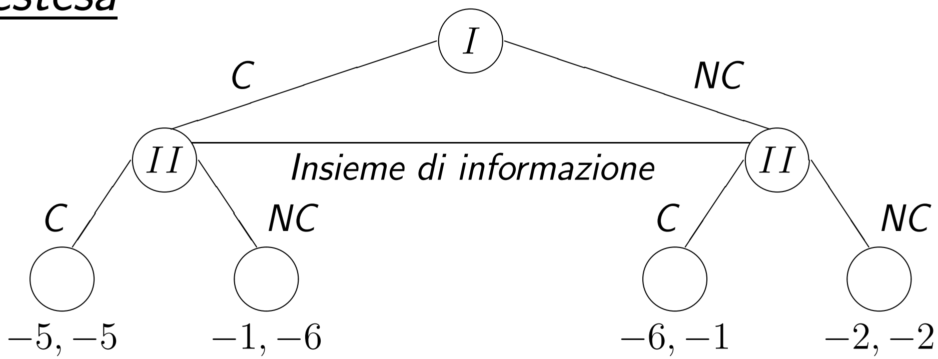
$N = \{1, 2, 3\}$

$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1$ ♢

La descrizione del gioco è molto "povera", in quanto non permette di definire la vincita di ogni singolo giocatore della coalizione, ma solo la vincita complessiva

Esempio 1.6 (Rappresentazioni del dilemma del prigioniero)

Forma estesa



Forma strategica

$$\Sigma_I = \{C, NC\}; \Sigma_{II} = \{C, NC\}$$
$$f_I(C, C) = -5; f_I(C, NC) = -1; f_I(NC, C) = -6; f_I(NC, NC) = -2$$
$$f_{II}(C, C) = -5; f_{II}(C, NC) = -6; f_{II}(NC, C) = -1; f_{II}(NC, NC) = -2$$

Forma caratteristica

$$N = \{I, II\}$$
$$v(\emptyset) = 0; v(I) = v(II) = -5; v(I, II) = -4$$

$\diamondsuit$

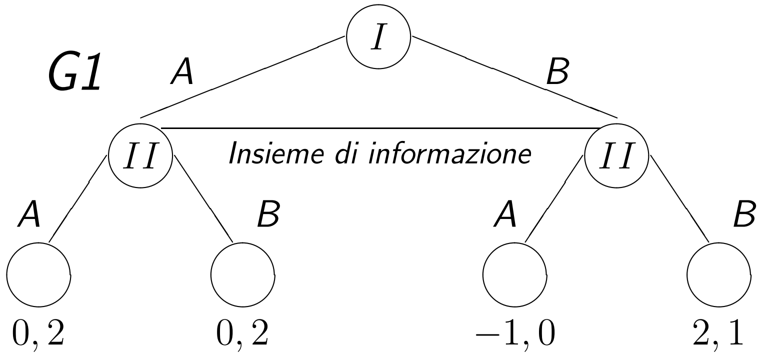
La forma estesa contiene più informazione sul gioco rispetto alla forma strategica, che risulta comunque sufficiente a rappresentare un gioco

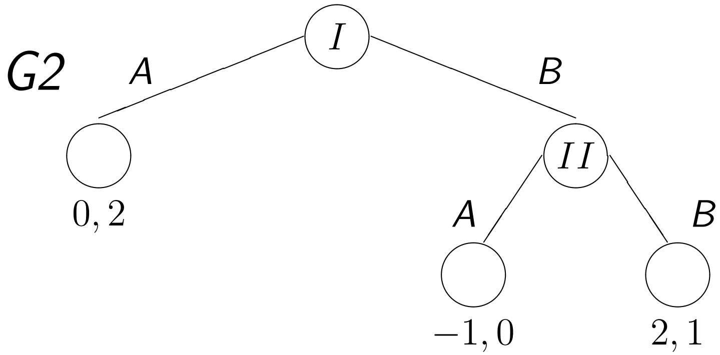
Esempio 1.7 (Rappresentazioni in forma estesa e in forma strategica)

G1 I *e* II *scelgono contemporaneamente tra* A *e* B*; se giocano* (A, A) *oppure* (A, B) *i payoff sono* $(0, 2)$*, se giocano* (B, A) *i payoff sono* $(-1, 0)$*, se giocano* (B, B) *i payoff sono* $(2, 1)$

G2 I *e* II *scelgono successivamente tra* A *e* B*; se* I *gioca* A *il gioco termina con payoff* $(0, 2)$*, se gioca* B *il turno passa a* II*; se* II *gioca* A *il gioco termina con payoff* $(-1, 0)$*, se gioca* B *il gioco termina con payoff* $(2, 1)$

Forma estesa





Forma strategica

G1 - G2

I/II	A	B
A	$0, 2$	$0, 2$
B	$-1, 0$	$2, 1$

La forma strategica è unica, ma è sufficiente a descrivere i giochi $\diamondsuit$

1.7 Teoria dell'utilità

I concetti di *preferenza* e di *utilità di von Neumann-Morgenstern* permettono di assegnare e interpretare i valori numerici utilizzati nelle rappresentazioni dei giochi

I giocatori cercano di massimizzare la loro utilità, ma è necessario prendere in considerazione valori differenti: economico, sentimentale, sociale, ecc.
Se un giocatore deve decidere se donare una somma di denaro senza ricevere nulla in cambio, considerando solo i valori monetari la decisione sarebbe sempre non donare

Definizione 1.3

- *Dati due eventi A e B si dice che A è preferibile a B per un giocatore se egli cerca di conseguire A invece di B e si indica con* $A \succ B$
- *Dati due eventi A e B si dice che A è indifferente a B per un giocatore se nessuno è preferibile all'altro e si indica con* $A \equiv B$

Assiomi

A1 *Dati due eventi A e B allora* $A \succ B$ *oppure* $B \succ A$ *oppure* $A \equiv B$

A2 $A \equiv A$

A3 $A \equiv B \Rightarrow B \equiv A$

A4 $A \equiv B, B \equiv C \Rightarrow A \equiv C$

A5 $A \succ B, B \succ C \Rightarrow A \succ C$

A6 $A \succ B, B \equiv C \Rightarrow A \succ C$

A7 $A \equiv B, B \succ C \Rightarrow A \succ C$

- **A1**: *completezza delle preferenze* o *legge di tricotomia*; **A2**, **A3**, **A4**: *riflessività dell'indifferenza*, *simmetria dell'indifferenza*, *transitività dell'indifferenza* $\Rightarrow$ l'indifferenza è una *relazione di equivalenza*; **A5**: *transitività della preferenza*; **A6**, **A7**: *transitività della preferenza sull'indifferenza* (cfr. Owen, 1994)
- La relazione di preferenza è solo qualitativa
- Nessun bene soddisfa l'ipotesi di linearità, tranne al più in brevi intervalli

Gli eventi possono essere certi oppure incerti secondo una probabilità nota

Definizione 1.4 *Dati due eventi A e B si chiama lotteria l'evento* $rA + (1-r)B, 0 \leq r \leq 1$, *in cui A si verifica con probabilità* r *e l'evento B con probabilità* $1-r$

- La lotteria non è una combinazione lineare di eventi, ma permette di valutare l'evento "esce A o esce B"

Proprietà

P1 $A \equiv C \Rightarrow \{rA + (1-r)B\} \equiv \{rC + (1-r)B\} \quad \forall r,\ \forall B$

P2 $A \succ C \Rightarrow \{rA + (1-r)B\} \succ \{rC + (1-r)B\} \quad r > 0, \forall B$

P3 $A \succ C \succ B \Rightarrow \exists! r,\ 0 < r < 1\ t.c.\ \{rA + (1-r)B\} \equiv C$

- Se un decisore soddisfa gli assiomi **A1** - **A7** e le proprietà **P1** - **P3** viene considerato "razionale".

Esempio 1.8 (Preferenze) *Siano date le lotterie:*

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{0, 100 \quad con \quad \mathbf{P}(0) = 1/2, \mathbf{P}(100) = 1/2\} \\
E_2 &= \{40, 60 \quad con \quad \mathbf{P}(40) = 3/4, \mathbf{P}(60) = 1/4\} \\
E_3 &= \{0, 100, 40, 60 \quad con \quad \mathbf{P}(0) = 1/4, \mathbf{P}(100) = 1/4, \mathbf{P}(40) = 3/8, \mathbf{P}(60) = 1/8\}
\end{aligned}$$

Il guadagno atteso, $E_1 = 50$*,* $E_2 = 45$ *e* $E_3 = 47.5$*, non impone una preferenza tra i tre eventi, ma le uniche relazioni da soddisfare sono:*

$$\begin{aligned}
&E_1 \equiv E_2 \Rightarrow E_1 \equiv E_3, E_2 \equiv E_3 \\
&oppure \\
&E_1 \succ E_2 \Rightarrow E_1 \succ E_3, E_3 \succ E_2 \\
&oppure \\
&E_2 \succ E_1 \Rightarrow E_2 \succ E_3, E_3 \succ E_1
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Dato un insieme di eventi E, una relazione di preferenza su E può essere rappresentata con una funzione di utilità $u : E \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $E_1, E_2 \in E$ si ha:

$$E_1 \succ E_2 \Leftrightarrow u(E_1) > u(E_2)$$
$$u(rE_1 + (1-r)E_2) = ru(E_1) + (1-r)u(E_2)$$

- La funzione di utilità permette di quantificare le preferenze
- L'utilità di von Neumann-Morgenstern impone la linearità sulle lotterie

La funzione u è unica a meno di trasformazioni affini, cioè u è una funzione di utilità se e solo se lo è anche:

$$\hat{u} = \alpha u + \beta \quad \text{con} \quad \alpha > 0$$

Esempio 1.9 (Funzioni di utilità)

I/II	C	NC
C	$-5, -5$	$-1, -6$
NC	$-6, -1$	$-2, -2$

I/II	C	NC
C	$1, 1$	$5, 0$
NC	$0, 5$	$4, 4$

I/II	C	NC
C	$-4, 0$	$0, -10$
NC	$-5, 40$	$-1, 30$

Le tre matrici sono legate dalle relazioni affini:

$$u'_I = u_I + 6 \qquad u''_I = u_I + 1$$
$$u'_{II} = u_{II} + 6 \qquad u''_{II} = 10u_{II} + 50$$

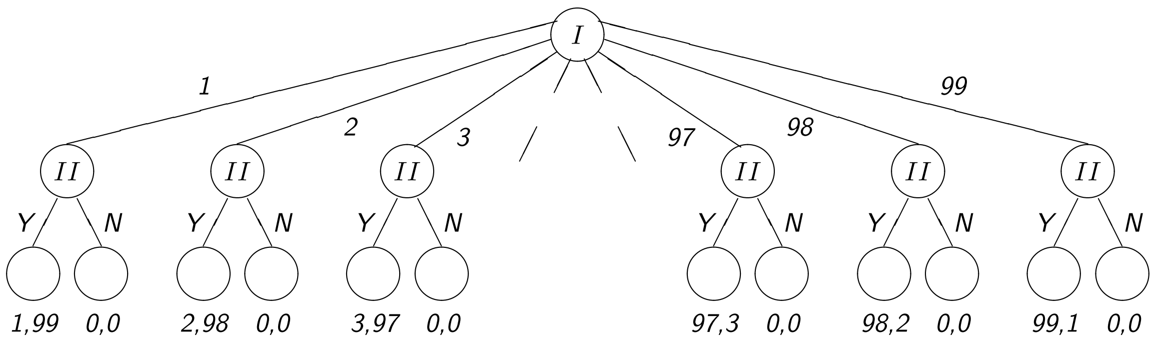
$\diamondsuit$

Esempio 1.10 (Ultimatum game)

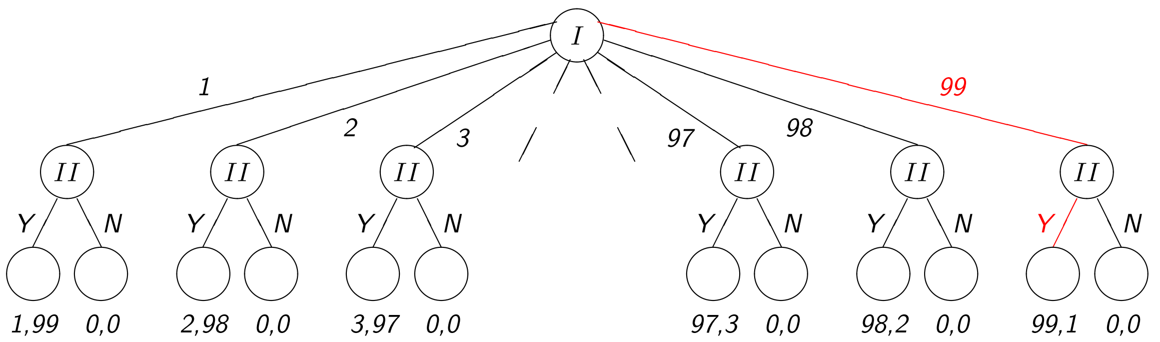
Due persone devono dividersi la cifra di 100 euro con le seguenti regole:

- I *propone una divisione (numeri interi, lasciando almeno 1 euro a ciascuno)*
- *se* II *accetta la divisione proposta, la divisione ha luogo*
- *se* II *non accetta la divisione proposta, non si assegna alcuna cifra*
- *entrambe le persone non sanno e non sapranno mai chi è l'altra*

Quale cifra conviene proporre a I*?*



La scelta ottimale del secondo giocatore è accettare sempre
In conseguenza la scelta ottimale del primo giocatore è proporre il massimo



Nelle sperimentazioni, questa soluzione non si realizza quasi mai, poichè l'utilità reale dei giocatori tiene conto di altri fattori ♢

1.8 Game Form

Permette di evidenziare esplicitamente la differenza tra le *regole del gioco* e le *preferenze* dei giocatori

Esempio 1.11 (Decisore) *Si deve decidere se uscire con o senza l'ombrello in una giornata con tempo variabile*

strategia / stato del mondo	*piove*	*non piove*
prendo l'ombrello	*non mi bagno*	*non mi bagno (ho l'ombrello)*
non prendo l'ombrello	*mi bagno*	*non mi bagno (non ho l'ombrello)*

Un decisore prudente prende sempre l'ombrello
In generale è necessario tenere conto delle preferenze del decisore ed eventualmente di ulteriori informazioni (distanza da percorrere, caratteristiche dell'ombrello, etc.) $\diamondsuit$

Sia dato un gioco a n giocatori in forma strategica $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, f_1, f_2, \ldots, f_n)$
La game form è:

$$(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, E, h)$$

dove E: insieme degli eventi finali (o esiti)

$h : \prod_{i=1,\ldots,n} \Sigma_i \rightarrow E$ individua a quale esito si perviene per ogni profilo di strategie

Per studiare il comportamento dei giocatori e quindi risolvere il gioco è necessario conoscere le preferenze dei giocatori sui possibili esiti, eventualmente rappresentate da una funzione di utilità

$$u_i : E \rightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$$

da cui si ottengono le funzioni di utilità indotte:

$$f_i = u_i \circ h,\ f_i : \prod_{k=1,\ldots,n} \Sigma_k \rightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$$

1.9 Soluzione di un gioco (Solution concept)

Risolvere un gioco consiste nel fornire delle indicazioni ad uno o più giocatori, eventualmente tutti, su:

- strategie da adottare se il gioco è non cooperativo o cooperativo ad utilità non trasferibile
- suddivisione della vincita se il gioco è cooperativo ad utilità trasferibile

Le indicazioni non possono essere assolute in quanto bisogna tenere conto di fattori aleatori, o legati a preferenze e sensazioni del singolo giocatore. Un "concetto di soluzione" indica quella che secondo alcuni criteri assoluti è una scelta che può risultare accettabile a tutti i giocatori secondo i loro criteri soggettivi

Nell'esempio della battaglia dei sessi contano "egoismo", "altruismo" e situazioni precedenti

Esempio 1.12 (Divisione di una torta tra due giocatori)
È uno dei problemi più significativi: molto semplice, molto comune e molto complesso
La soluzione più usuale, uno taglia e l'altro sceglie, non è equa in quanto può favorire chi sceglie se chi taglia non è preciso, o chi taglia se è a conoscenza di qualche preferenza o "punto debole" di chi sceglie ♢

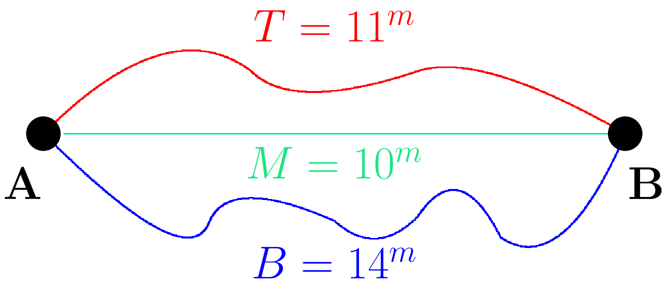
2 Giochi non cooperativi

2.1 Introduzione

I giocatori non possono stipulare accordi vincolanti (o comunicare), indipendentemente dall'avere interesse ad accordarsi

Esempio 2.1 (Congestione)

I tempi di percorrenza da $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ dipendono dalla lunghezza della strada e dal traffico
Se una strada è scelta da due utenti il tempo aumenta di due minuti
Se è scelta dai tre utenti il tempo aumenta di cinque minuti
L'obiettivo dei giocatori è comune, ma non identico (ognuno vuole minimizzare il proprio tempo di percorrenza)
La cooperazione è impossibile per la difficoltà di accordarsi



$III = T$			
I/II	T	M	B
T	$16, 16, 16$	$13, 10, 13$	$13, 14, 13$
M	$10, 13, 13$	$12, 12, 11$	$10, 14, 11$
B	$14, 13, 13$	$14, 10, 11$	$16, 16, 11$

$III = M$			
I/II	T	M	B
T	$13, 13, 10$	$11, 12, 12$	$11, 14, 10$
M	$12, 11, 12$	$15, 15, 15$	$12, 14, 12$
B	$14, 11, 10$	$14, 12, 12$	$16, 16, 10$

$III = B$			
I/II	T	M	B
T	$13, 13, 14$	$11, 10, 14$	$11, 16, 16$
M	$10, 11, 14$	$12, 12, 14$	$10, 16, 16$
B	$16, 11, 16$	$16, 10, 16$	$19, 19, 19$

$\diamondsuit$

2.2 Equilibrio di Nash (1950)

E' il più semplice e importante concetto di soluzione per un gioco non cooperativo

Definizione 2.1 *Dato un gioco G si dice che la n-upla di strategie $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ con $\sigma_i^* \in \Sigma_i$ costituisce un equilibrio, o è in equilibrio, se nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico che cambia strategia, cioè se:*

$$f_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq f_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n^*), \qquad \forall\ \sigma_i \in \Sigma_i, \forall\ i \in N$$

Possono esistere differenti strategie per uno o più giocatori a cui corrispondono payoff migliori, come nel caso del dilemma del prigioniero in cui l'equilibrio risulta inefficiente

Un gioco può avere più equilibri come nell'Esempio 1.2

2.3 Giochi a somma zero

Definizione 2.2 *Un gioco G si dice a somma zero se per ogni terminazione del gioco la somma dei payoff è nulla*

Tutto quello che viene guadagnato da qualche giocatore viene perso da qualche altro giocatore Nel caso a due giocatori la matrice dei pagamenti può essere espressa indicando la vincita, positiva o negativa, del primo giocatore poichè la vincita del secondo è in ogni caso l'opposto

Si può utilizzare una matrice A in cui la riga i è associata alla strategia σ_i del giocatore I, la colonna j alla strategia σ_j del giocatore II e l'elemento a_{ij} rappresenta quanto il primo giocatore riceve dal secondo se giocano la coppia di strategie (σ_i, σ_j)

Definizione 2.3 *La rappresentazione tramite la matrice A è detta forma normale*

2.4 Gioco a due giocatori a somma zero in forma normale

In questo caso l'equilibrio di Nash è una coppia di strategie $\sigma_i \in \Sigma_1$ e $\sigma_j \in \Sigma_2$ tali che a_{ij} è il più grande della colonna j e il più piccolo della riga i; è detto anche *punto di sella*

Esempio 2.2 (Punto di sella)

(σ_1, σ_2) *è un equilibrio anche se entrambi i giocatori hanno a disposizione dei payoff migliori*

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \diamondsuit$$

L'esistenza di un punto di sella o equilibrio di Nash non impone ai giocatori la scelta delle corrispondenti strategie

Teorema 2.1 *In un gioco a due persone a somma zero se* (σ_i, σ_j) *e* (σ_h, σ_k) *sono equilibri di Nash, allora lo sono anche* (σ_i, σ_k) *e* (σ_h, σ_j)

Esempio 2.3 (Equilibri multipli)

(σ_1, σ_2)*e* (σ_2, σ_3)*sono equilibri di Nash e lo sono anche* (σ_1, σ_3)*e* (σ_2, σ_2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \diamondsuit$$

- Se il gioco non è a somma zero il precedente teorema non sussiste

L'obiettivo dei giocatori è massimizzare il proprio payoff
La non conoscenza della strategia scelta dall'altro giocatore impedisce di poter raggiungere con certezza l'obiettivo

2.5 Gioco a due giocatori a somma zero senza equilibri di Nash

Il giocatore I con la prima strategia si garantisce una vincita minima 2 (*gain-floor*) e il giocatore II con la seconda strategia si garantisce una perdita massima 3 (*loss-ceiling*)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vincita minima per il giocatore I:

$$v'_I = \max_i \; \min_j \quad \{a_{ij}\}$$

Perdita massima per il giocatore II:

$$v'_{II} = \min_j \; \max_i \quad \{a_{ij}\}$$

$v'_I \leq v'_{II}$; se $v'_I = v'_{II}$ allora esiste un punto di sella

Un comportamento "razionale" fa si che il giocatore I vinca almeno v'_I e il giocatore II perda al più v'_{II}, ma si ottiene il risultato peggiore se l'altro giocatore può sfruttare la "razionalità" e prevedere la mossa

Per migliorare il risultato è necessario non giocare "razionalmente"

Esempio 2.4 (Pari e dispari modificato)

I/II	1	2	3
1	P	D	P
2	D	P	D
3	P	D	P

Apparentemente il gioco è favorevole al giocatore I che può vincere in 5 casi su 9
Se il giocatore II gioca 2 ha 2 risultati vincenti su 3, ma il giocatore I giocando 2 è "sicuro" di vincere
Analogamente se il giocatore I gioca 1 (o 3) ha 2 risultati vincenti su 3, ma il giocatore II giocando 2 è "sicuro" di vincere $\diamondsuit$

Cercare di aumentare le proprie possibilità di vincere porta alla sconfitta "sicura"

- Limiti dell'equilibrio di Nash (in strategie pure):
  - inefficienza (dilemma del prigioniero)
  - non unicità (battaglia dei sessi)
  - non esistenza (pari e dispari)

2.6 Strategie miste

Definizione 2.4 *Si chiama strategia mista per un giocatore una distribuzione di probabilità sull'insieme delle sue strategie pure*

Nell'Esempio 2.4 il giocatore II che parte svantaggiato può riequilibrare le sue possibilità giocando a caso, con probabilità 0.5 sia 1 che 2 (o altre strategie equivalenti)

Una strategia mista si può indicare con un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \geq 0$ e $\sum\limits_{i=1,\ldots,n} x_i = 1$

$X =$ insieme delle strategie miste del giocatore I
$Y =$ insieme delle strategie miste del giocatore II

Definizione 2.5 *Dato un gioco G a due giocatori a somma zero in forma normale con matrice A è detta vincita attesa se il giocatore I gioca la strategia mista $x \in X$ e il giocatore II gioca la strategia mista $y \in Y$ la quantità:*

$$A(x, y) = \sum_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1,\ldots,m} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

- vincita minima per il giocatore I se sceglie la strategia mista $x \in X$:

$$v(x) = \min_{y \in Y} \quad \{x^T A y\} = \min_{j} \quad \{x^T A_{.j}\}$$

- perdita massima per il giocatore II se sceglie la strategia mista $y \in Y$:

$$v(y) = \max_{x \in X} \quad \{x^T A y\} = \max_{i} \quad \{A_{i.} y\}$$

Il giocatore I vuole massimizzare $v(x)$:

$$v_I = \max_{x \in X} \min_{j} \quad \{x^T A_{.j}\}$$

Il giocatore II vuole minimizzare $v(y)$:

$$v_{II} = \min_{y \in Y} \max_{i} \quad \{A_{i.} y\}$$

Definizione 2.6 *La strategia mista x che permette al giocatore I di ottenere v_I è detta maxmin; la strategia mista y che permette al giocatore II di ottenere v_{II} è detta minmax*

v_I e v_{II} sono detti *valore del gioco per i giocatori I e II*, rispettivamente

Teorema 2.2 (Teorema del minmax (von Neumann, 1928))
$v_I = v_{II}$

- Il valore $v_I = v_{II}$ viene detto *valore del gioco*
- Se il gioco non è a somma zero il teorema non sussiste

2.7 Dominanza

Definizione 2.7 *Dato un gioco G a due giocatori a somma zero in forma normale, con matrice A, si dice che la strategia σ_i domina la strategia σ_h per il giocatore I se $a_{ij} \geq a_{hj}$, $j = 1, \ldots, m$ e $a_{ij} > a_{hj}$ per almeno un indice j e la strategia σ_j domina la strategia σ_k per il giocatore II se $a_{ij} \leq a_{ik}, i = 1, \ldots, n$ e $a_{ij} < a_{ik}$ per almeno un indice i*

Teorema 2.3 *Se una strategia è dominata, esiste una strategia mista ottimale che non utilizza la strategia dominata; inoltre una strategia mista ottimale per il gioco senza la riga (o colonna) i è ottimale anche per il gioco dato*

Nel caso di giochi a più giocatori non a somma zero si ha:

Definizione 2.8 *La strategia σ_h domina la strategia σ_k per il giocatore i se $f_i(\sigma_h, \sigma_{-i}) \geq f_i(\sigma_k, \sigma_{-i})$, per ogni $(n-1)$-upla di strategie $\sigma_{-i} \in \prod_{k \neq i} \Sigma_k$ e $f_i(\sigma_h, \sigma_{-i}) > f_i(\sigma_k, \sigma{-}i)$ per almeno una $(n-1)$-upla di strategie σ_{-i}*

- Si può distingue tra dominanza debole e forte. Per applicare il teorema di riduzione del gioco la distinzione è irrilevante ed è possibile applicarlo anche in caso di indifferenza
- Il concetto di dominanza può essere applicato anche al gioco ridotto (dominanza iterata) Le eliminazioni per dominanza debole o indifferenza possono far perdere qualche equilibrio di Nash

2.8 Inefficienza dell'equilibrio di Nash e instabilità

L'aumento delle strategie dei giocatori può generare soluzioni instabili ed equilibri inefficienti

I/II	L	C
T	$2,2$	$0,0$
M	$0,0$	$-1,-1$

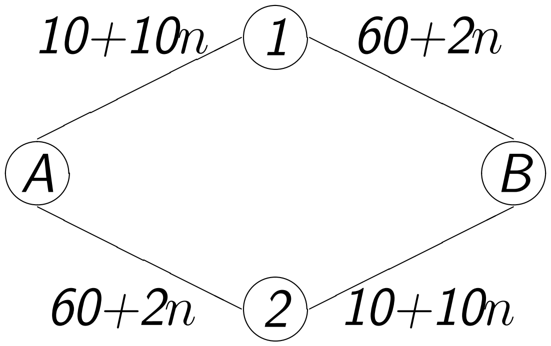
(T, L) è l'unico equilibrio di Nash ed è efficiente

Aggiungendo le strategie B e R, rispettivamente, con opportuni payoff:

I/II	L	C	R
T	$2,2$	$0,0$	$0,3$
M	$0,0$	$-1,-1$	$0,1$
B	$3,0$	$1,0$	$1,1$

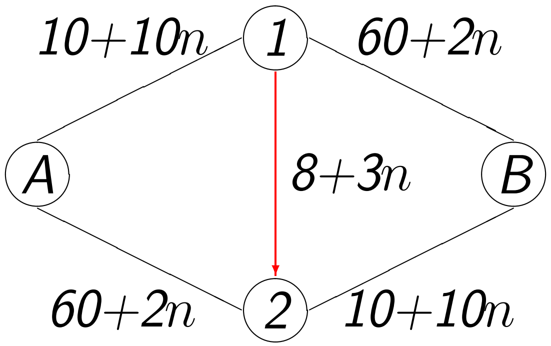
(B, R) è l'unico equilibrio di Nash ma è inefficiente

Esempio 2.5 (Paradosso di Pigou) *6 utenti devono spostarsi da A a B e possono utilizzare due strade, $A-1-B$ e $A-2-B$*
La percorrenza di ogni tratto ha un tempo fisso e un fattore di congestione



La soluzione ottimale si ottiene quando ogni strada è percorsa da tre utenti, con tempo di percorrenza $10+10\times 3+60+2\times 3=106$
Questa soluzione è anche un equilibrio di Nash

Costruendo una strada a senso unico che collega 1 *e* 2, *con tempo fisso* 8 *e fattore di congestione* $3n$



Un utente di $A-1-B$ *ha interesse a passare su* $A-1-2-B$ *con tempo* $10+10\times 3+8+3\times 1+10+10\times 4=101$

I due utenti su $A-1-B$ *impiegano* $10+10\times 3+60+2\times 2=104$, *mentre i tre su* $A-2-B$ *impiegano* $60+2\times 3+10+10\times 4=116$

Se un utente di $A-2-B$ *passa su* $A-1-2-B$ *il suo tempo diventa* $10+10\times 4+8+3\times 2+10+10\times 4=114$, *uguale al tempo degli altri, che è peggiore del tempo senza la strada* $1-2$

La nuova soluzione è ancora un equilibrio di Nash

Ovviamente gli utenti potrebbero tornare alla configurazione precedente, che però adesso risulta instabile $\diamondsuit$

2.9 Raffinamenti dell'equilibrio di Nash

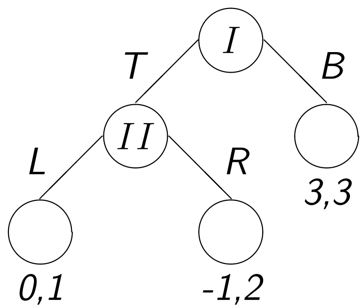
Per la non unicità dell'equilibrio di Nash sono stati proposti numerosi raffinamenti:

- *equilibrio perfetto nei sottogiochi*, che si ricollega alla programmazione dinamica di Bellman (Selten, 1965)
- *equilibrio correlato*, che incorpora aspetti di comunicazione tra i giocatori (Aumann, 1974)
- *equilibrio perfetto* o "della mano tremante", che considera le perturbazioni (Selten, 1975)

Nessuno di questi ha risolto il problema, né quantitativamente (unicità), né qualitativamente (scelta di un "buon" equilibrio)

Esempio 2.6 (Equilibrio perfetto nei sottogiochi)
(B, L) e (B, R) sono due equilibri di Nash indifferenti

I/II	L	R
T	$0,1$	$-1,2$
B	$3,3$	$3,3$



Iniziando dalla mossa di II la scelta R è preferibile alla scelta L (per II), per cui l'equilibrio (B, R) è perfetto nei sottogiochi $\diamondsuit$

Esempio 2.7 (Equilibrio perfetto)

(T, L) e (B, R) sono due equilibri di Nash

(T, L) sembrerebbe più vantaggioso, ma è più rischioso in caso di perturbazioni

I/II	L	R
T	$10, 10$	$0, 10$
B	$10, 0$	$1, 1$

$\diamondsuit$

2.10 Strategie correlate

Esempio 2.8 (Gioco dell'incrocio)

I/II	P	F
P	$-10, -10$	$5, 0$
F	$0, 5$	$-1, -1$

Equilibri di Nash in strategie pure (P, F) *e* (F, P)

valore atteso 5 per chi passa e 0 per chi si ferma (somma 5)

incidente impossibile

Equilibrio di Nash in strategie miste $((\frac{3}{8}, \frac{5}{8}), (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}))$

valore atteso $-\frac{5}{8}$ *per entrambi (somma* $-\frac{5}{4}$*)*

incidente possibile

Fermarsi comunque è la scelta più sicura ma ha un valore atteso negativo, salvo nel caso improbabile che l'altro passi comunque

Si può correlare la strategia ad un evento esterno: il semaforo

Ciclo semaforico al 50 per cento:

valore atteso 2.5 per entrambi (somma 5)

notevole sicurezza $\diamondsuit$

2.11 Equilibrio correlato

Definizione 2.9

- *Si dice strategia mista correlata per un gioco a due giocatori, una distribuzione di probabilità sul prodotto cartesiano di strategie, cioè una matrice P tale che:*

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1,\ldots,m} p_{ij} = 1 & \\ p_{ij} \geq 0 & \forall i, \forall j \end{array}$$

- *Si dice equilibrio correlato per un gioco a due giocatori a matrice doppia (A, B) una strategia mista correlata P tale che per ogni strategia σ_i del primo giocatore:*

$$\frac{\sum_{j=1,\ldots,m} a_{ij} p_{ij}}{\sum_{j=1,\ldots,m} p_{ij}} \geq \frac{\sum_{j=1,\ldots,m} a_{hj} p_{ij}}{\sum_{j=1,\ldots,m} p_{ij}} \qquad h = 1, \ldots, n$$

e per ogni strategia σ_j del secondo giocatore:

$$\frac{\sum_{i=1,\ldots,n} b_{ij} p_{ij}}{\sum_{i=1,\ldots,n} p_{ij}} \geq \frac{\sum_{i=1,\ldots,n} b_{ik} p_{ij}}{\sum_{i=1,\ldots,n} p_{ij}} \qquad k = 1, \ldots, m$$

dove $\frac{\sum_{j=1,\ldots,m} a_{sj} p_{ij}}{\sum_{j=1,\ldots,m} p_{ij}}$ è l'utilità attesa dal giocatore I se gioca la strategia σ_s quando gli viene "indicata" la strategia σ_i e il giocatore II "accetta" l'indicazione e $\frac{\sum_{i=1,\ldots,n} b_{it} p_{ij}}{\sum_{i=1,\ldots,n} p_{ij}}$ è l'utilità attesa dal giocatore II se gioca la strategia σ_t quando gli viene "indicata" la strategia σ_j e il giocatore I "accetta" l'indicazione

3 Soluzione numerica di un gioco non cooperativo

3.1 Calcolo dell'equilibrio di Nash in strategie pure

Gli equilibri di Nash in strategie pure si calcolano determinando la *miglior risposta* di un giocatore, per ogni insieme fissato di strategie degli altri giocatori
Le n-uple di strategie formate solo da reciproche migliori risposte sono equilibri di Nash

3.2 Calcolo dell'equilibrio di Nash in strategie miste

Si consideri l'Esempio 1.2
Se il giocatore I gioca la strategia mista $(p, 1-p)$ e il giocatore II gioca la strategia mista $(q, 1-q)$ la vincita attesa del giocatore I è:

$$v_I(p) = 2pq + 0(1-p)q + 0p(1-q) + 1(1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1 = (3q-1)p - (q-1)$$

Il secondo termine non dipende da p; si hanno quindi tre casi

$3q - 1 > 0 \Rightarrow p = 1$ (strategia pura)

$3q - 1 = 0 \Rightarrow p \in]0, 1[$ (strategia mista)

$3q - 1 < 0 \Rightarrow p = 0$ (strategia pura)

Analogamente la vincita attesa del giocatore II è:

$$v_{II}(q) = 1pq + 0(1-p)q + 0p(1-q) + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 2 = (3p-2)q - 2(p-1)$$

a cui corrispondono i tre casi:

$3p - 2 > 0 \Rightarrow q = 1$ (strategia pura)

$3p - 2 = 0 \Rightarrow q \in]0, 1[$ (strategia mista)

$3p - 2 < 0 \Rightarrow q = 0$ (strategia pura)

Si ha un equilibrio in strategie miste se:

$$3q - 1 = 0 \Rightarrow q = \tfrac{1}{3}$$
$$3p - 2 = 0 \Rightarrow p = \tfrac{2}{3}$$

cioè $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$

- La vincita attesa è $v_I = v_{II} = \frac{2}{3}$, cioè inferiore alla vincita minima derivante da un accordo (non vincolante) per una strategia pura

3.3 Soluzione per dominanza

Esempio 3.1 (Gioco a due giocatori a somma zero)

Dato il gioco in forma normale:
$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La prima colonna è dominata (debolmente) dalla terza:
$$\begin{pmatrix} - & 6 & 1 & 0 \\ - & 0 & 1 & -1 \\ - & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La seconda riga è dominata (debolmente) dalla prima (e dalla terza):
$$\begin{pmatrix} - & 6 & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ - & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La seconda colonna è dominata (fortemente) dalla terza:
$$\begin{pmatrix} - & - & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La prima riga è dominata (debolmente) dalla terza:
$$\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La quarta colonna è dominata (fortemente) dalla terza:
$$\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & - \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è (3, 3) ed è un punto di sella $\diamondsuit$

Esempio 3.2 (Gioco a tre giocatori)

Dato il gioco in forma strategica:

$III = S$		
I/II	L	R
T	$1, 0, 1$	$2, 1, 5$
B	$-1, 1, 1$	$3, 0, 1$

$III = D$		
I/II	L	R
T	$-3, 0, 4$	$2, 1, 5$
B	$-1, 1, 1$	$3, 1, 2$

Per il giocatore III la strategia D domina (debolmente) la strategia S:

$III = D$		
I/II	L	R
T	$-3, 0, 4$	$2, 1, 5$
B	$-1, 1, 1$	$3, 1, 2$

Per il giocatore I la strategia B domina (fortemente) la strategia T:

$III = D$		
I/II	L	R
B	$-1, 1, 1$	$3, 1, 2$

Per il giocatore II le strategie L ed R sono indifferenti, per cui si hanno due equilibri di Nash (B, L, D) e (B, R, D) $\diamondsuit$

- Alla seconda iterazione si poteva applicare la dominanza (debole) della strategia R rispetto alla strategia L per il giocatore II e successivamente la dominanza (forte) della strategia B rispetto alla strategia T, ottenendo solo l'equilibrio (B, R, D)

3.4 Soluzione con la programmazione lineare di un gioco a somma zero a due giocatori

Se il giocatore I utilizza la strategia $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ricordando che $v(x) = \min_j \{x^T A_{.j}\}$ si ha:

$$v(x) \leq \sum_{i=1,\ldots,n} a_{ij} x_i \qquad j = 1, \ldots, m$$

Poichè il valore del gioco è $v_I = \max_{x \in X} v(x)$ si ha:

$$\begin{array}{lll} max & v_I & \\ s.t. & \sum_{i=1,\ldots,n} a_{ij} x_i - v_I \geq 0 & j = 1, \ldots, m \\ & \sum_{i=1,\ldots,n} x_i = 1 & \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

In modo analogo per il giocatore II si ha il programma lineare:

$$\begin{array}{lll} min & v_{II} & \\ s.t. & \sum_{j=1,\ldots,m} a_{ij} y_j - v_{II} \leq 0 & i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{j=1,\ldots,m} y_j = 1 & \\ & y_j \geq 0 & j = 1, \ldots, m \end{array}$$

I due programmi risultano tra loro duali e quindi è facile determinare le strategie miste ottimali e il valore del gioco

- La soluzione tramite un problema lineare è possibile anche nel caso di un gioco non a somma zero, ma in questo caso non sussiste la relazione di dualità

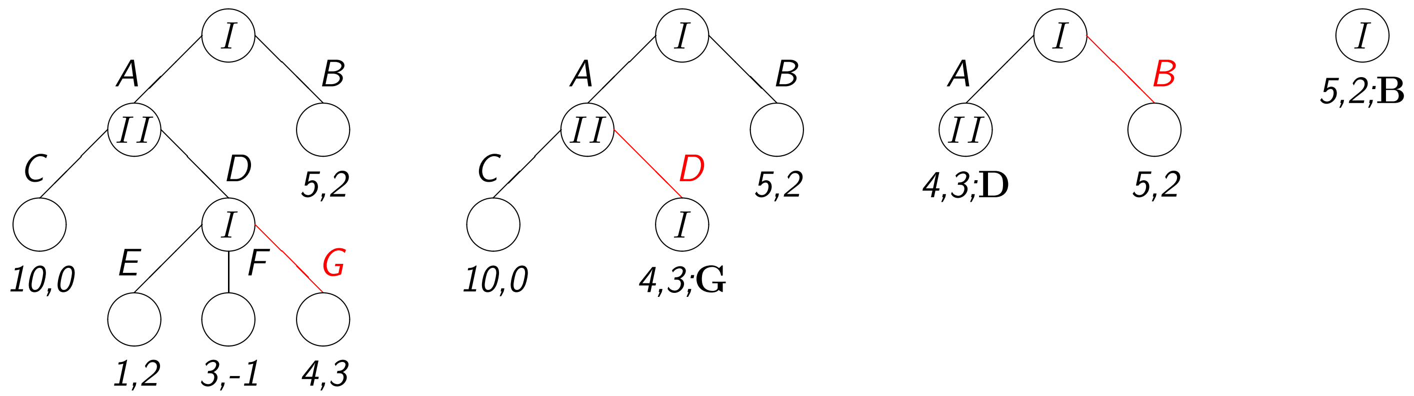
3.5 Soluzione a ritroso (Backward Induction)

Sia G un gioco non cooperativo finito, rappresentato in forma estesa. Per semplificare la trattazione si può supporre che il gioco sia ad informazione perfetta. Se tutti i giocatori hanno preferenze razionali si può "prevedere" il loro comportamento

Si considerano i *nodi pre-terminali* in cui il giocatore sceglierà "certamente" la mossa che gli assicura il miglior payoff

Procedendo a ritroso si ottiene un profilo di strategie per i giocatori

Esempio 3.3 (Payoff distinti)



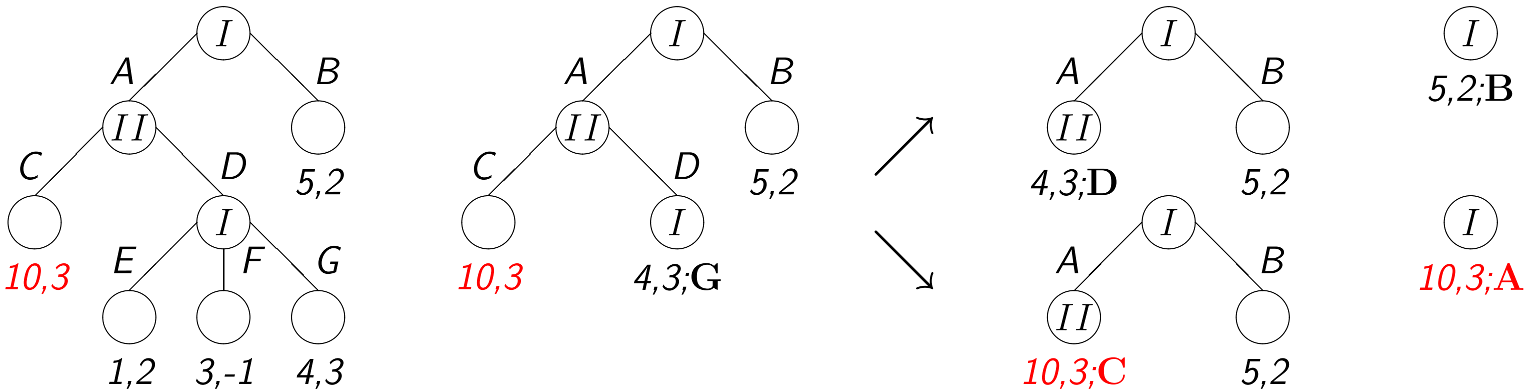
La procedura identifica il profilo di strategie ((B, G), D) con payoff (5, 2) ♢

La procedura è più complessa se i payoff sono uguali per il giocatore chiamato a muovere, ma differenti per gli altri

Si considera una continuazione del procedimento per ogni scelta massimizzante possibile (giochi ad informazione incompleta)

Esempio 3.4 (Payoff non distinti)

Modificando l'Esempio 3.3:



La procedura identifica le terminazioni ((A, G), C) con payoff (10, 3) e ((B, G), D) con payoff (5, 2), ma trascura ((A, G), D) con payoff (4, 3)

La scelta dipende dal modello decisionale adottato ♢

- La procedura può dare risultati discutibili se il gioco non è ad informazione perfetta
- Se il giocatore II scegliesse D invece di C, danneggiando il giocatore I, questo potrebbe scegliere F invece di G, con una piccola perdita per sé, danneggiando il giocatore II (strategia di minaccia)

La dominanza (debole) iterata sulla forma strategica corrisponde all'eliminazione a ritroso

Esempio 3.5 (Induzione a ritroso e dominanza iterata)
Riprendendo l'Esempio 3.3 in forma strategica:

I/II	C	D
AE	$10, 0$	$1, 2$
AF	$10, 0$	$3, -1$
AG	$10, 0$	$4, 3$
BE	$5, 2$	$5, 2$
BF	$5, 2$	$5, 2$
BG	$5, 2$	$5, 2$

La strategia AG domina (debolmente) le strategie AE e AF e la strategia BG domina (debolmente) le strategie BE e BF:

I/II	C	D
AG	$10, 0$	$4, 3$
BG	$5, 2$	$5, 2$

La strategia D domina (debolmente) la strategia C:

I/II	D
AG	$4, 3$
BG	$5, 2$

La strategia BG domina (fortemente) la strategia AG; quindi si ottiene la stessa soluzione trovata in precedenza, cioè il profilo (BG, D) con payoff (5, 2) $\diamondsuit$

3.6 Soluzione di Maxmin

Per un gioco in forma strategica potrebbe non essere applicabile la soluzione per dominanza e potrebbe non essere facile risalire alla forma estesa
La *strategia di maxmin* garantisce comunque buoni risultati per un giocatore avverso al rischio

Esempio 3.6 (Maxmin)

I/II	L	C	R
T	$1, 4$	$3, 2$	$-2, -1$
M	$-2, -2$	$1, 3$	$0, 4$
B	$2, 3$	$-1, 4$	$4, 2$

Se il giocatore I sceglie T il minimo payoff è -2; se sceglie M il minimo payoff è -2; se sceglie B il minimo payoff è -1; quindi la sua strategia di maxmin è B
Se il giocatore II sceglie L il minimo payoff è -2; se sceglie C il minimo payoff è 2; se sceglie R il minimo payoff è -1; quindi la sua strategia di maxmin è C
Il payoff delle strategie di maxmin (B, C) è (-1, 4), cioè il giocatore I consegue il risultato minimo atteso, mentre il giocatore II riceve un payoff superiore $\diamondsuit$

La soluzione di maxmin è un concetto di soluzione generale, a differenza di altri
Parte dall'ipotesi che gli altri giocatori trascurino completamente il loro payoff e giochino solo per danneggiare il giocatore in oggetto, che è vera solo nel caso di giochi ad interessi contrastanti, ad esempio i giochi a somma nulla

4 Informazione

4.1 Informazione perfetta e imperfetta

Tutte le informazioni sono *conoscenza comune*, cioè note a tutti i giocatori; in questo caso il gioco è detto a *informazione perfetta e completa*

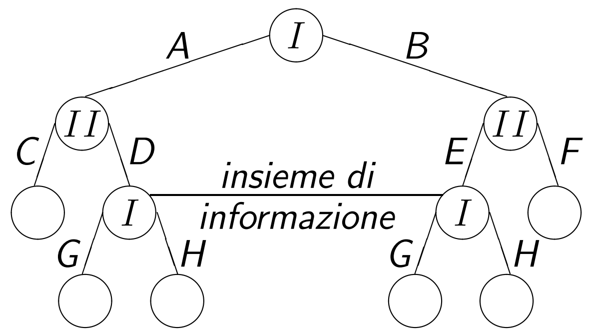
Esempio 4.1 (Gioco della posta elettronica)
Due persone A e B devono incontrarsi, ma a causa dei numerosi impegni A invia una e-mail per essere certo della presenza di B; ma anche B è molto impegnato per cui oltre a rassicurare A della sua presenza, richiede una conferma della ricezione del messaggio. A questo punto anche A chiede una nuova conferma e così via $\diamondsuit$

Definizione 4.1 *Un gioco G si dice a informazione imperfetta se esiste almeno un insieme di informazione contenente più di un elemento*

L'informazione imperfetta richiede che nei nodi facenti parte dello stesso insieme di informazione il giocatore chiamato a giocare sia nella stessa identica situazione

Esempio 4.2 (Ricordo imperfetto)

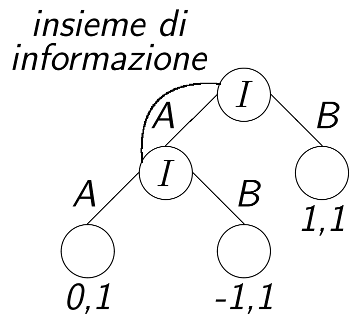
Nel seguente gioco in forma estesa l'esistenza di un insieme di informazione non banale dipende dal fatto che il giocatore I non solo non conosce la mossa del giocatore II, ma anche dal fatto che non ricorda se lui ha scelto A oppure B



◇

Esempio 4.3 (Ricordo imperfetto non standard)

Nel seguente gioco in forma estesa in l'insieme di informazione comprende due nodi posti a differenti livelli, in contrasto con la definizione



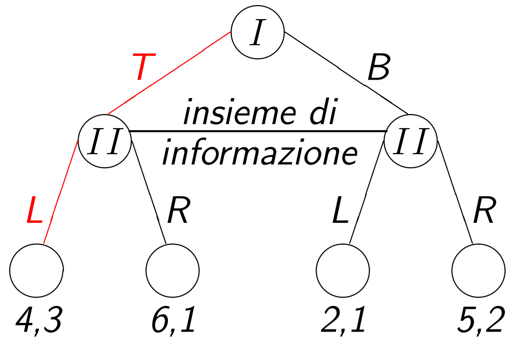
Il giocatore I "immediatamente" dopo aver scelto non ricorda più né la sua mossa né se ha mosso; questo modello si può applicare quando i tempi della decisione sono sufficientemente lunghi

I payoff creano una situazione di indecisione; se il payoff del giocatore I dopo la seconda mossa A fosse 2, il problema non sarebbe effettivo ◇

Se un gioco è a ricordo imperfetto è anche a informazione imperfetta, ma non viceversa

L'informazione può essere anche indiretta

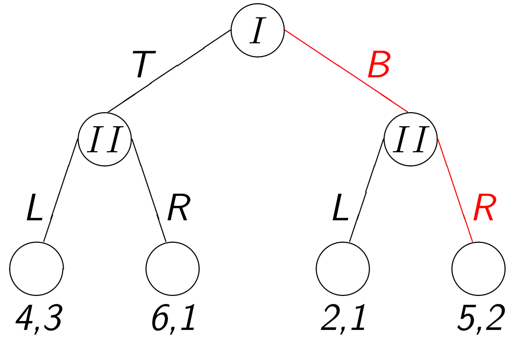
Esempio 4.4 (Ruolo dell'informazione)



II gioca senza conoscere la scelta di I

T è la migliore strategia per I, qualunque sia la scelta di II (strategia dominante)

Quindi I gioca T e II gioca L; la vincita è 4 per I e 3 per II



II gioca conoscendo la scelta di I

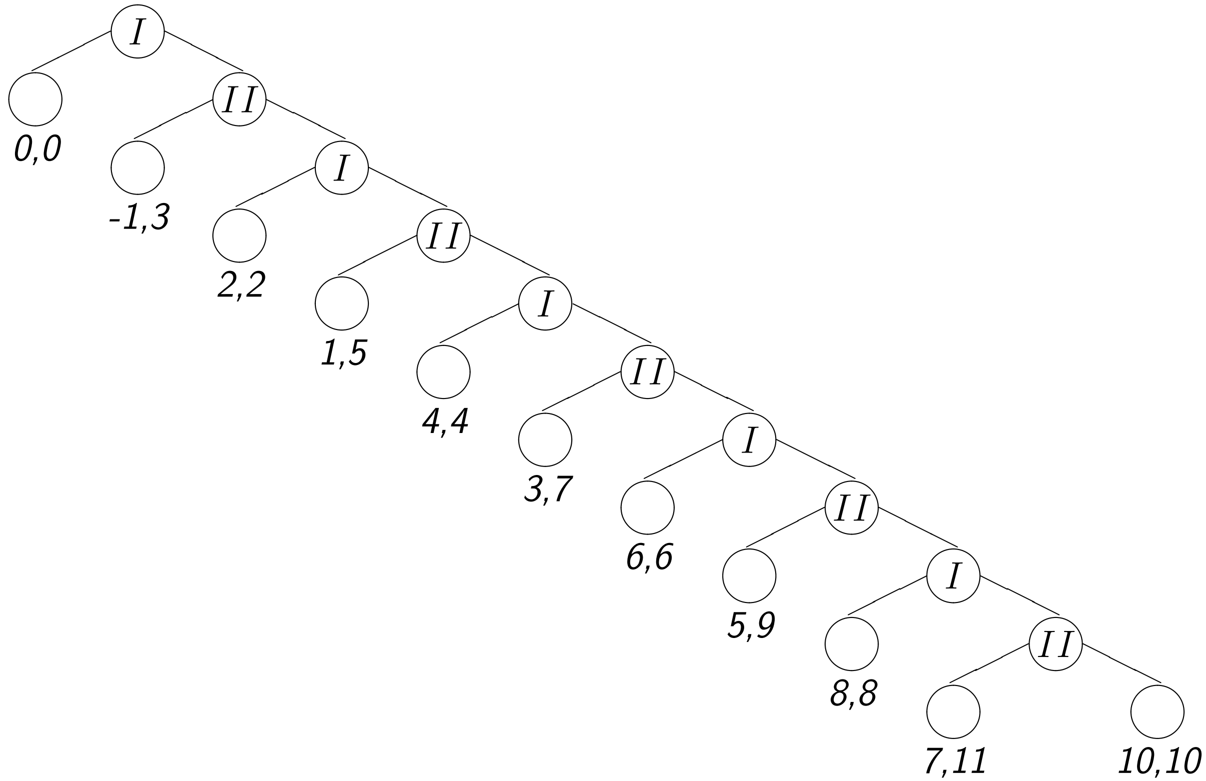
Se I gioca T II sceglie L con esito (4, 3)

Se I gioca B II sceglie R con esito (5, 2)

Quindi I gioca B e II gioca R; la vincita è 5 per I e 2 per II

L'aumento di informazione è per entrambi e I lo può sfruttare meglio di II $\diamond$

Esempio 4.5 (Centipede Game (Gioco del Millepiedi))



Il gioco dovrebbe terminare immediatamente con payoff (0, 0); d'altra parte "raggiungere" una determinata situazione, contiene una informazione di disponibilità a collaborare ♢

4.2 Informazione incompleta

Esempio 4.6 (Tipi di giocatori)

Il giocatore I ha la possibilità di giocare contro due differenti tipi di avversari (giocatore II di tipo A o di tipo B) indicati come II_A e II_B, selezionati tramite un sorteggio noto ai giocatori II_A e II_B, ma non al giocatore I; tutti gli altri elementi sono invece noti a entrambi i giocatori E' possibile rappresentare questa situazione in forma strategica tramite due differenti matrici di payoff

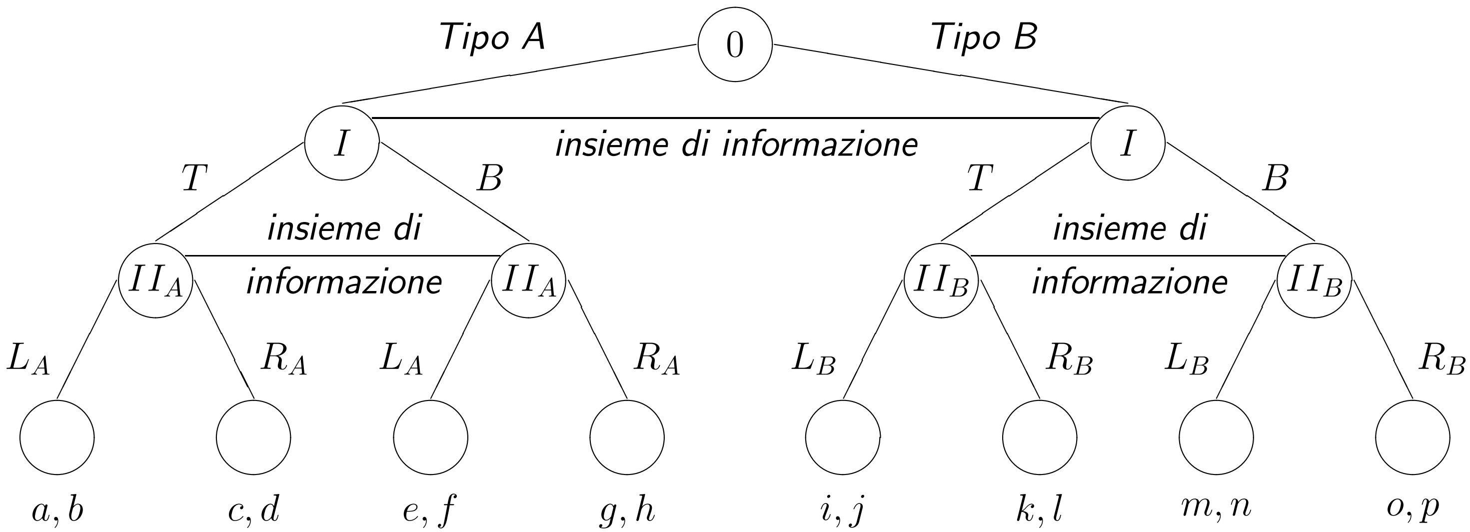
I/II_A	L_A	R_A
T	a, b	c, d
B	e, f	g, h

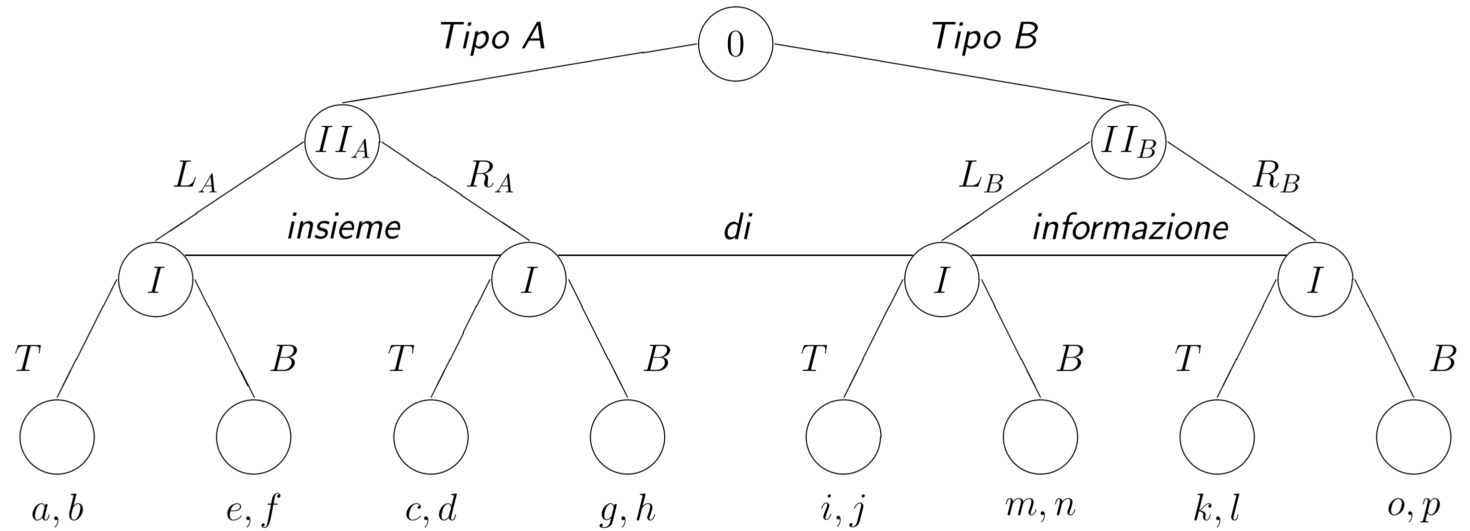
I/II_B	L_B	R_B
T	i, j	k, l
B	m, n	o, p

$\diamondsuit$

A questa situazione, introdotta da Harsanyi (1967-68) come *giochi bayesiani*, possono essere ricondotte altre situazioni di informazione incompleta
Questo approccio richiede la conoscenza della probabilità associata al tipo di giocatore
Si può ipotizzare l'esistenza di un terzo giocatore (il caso), indicato con 0 che sceglie quale matrice utilizzare, secondo una preassegnata probabilità
Il gioco è a informazione imperfetta poichè il giocatore I non conosce la mossa del caso
L'imperfezione dell'informazione si può estendere alla non conoscenza delle mosse effettuate dall'altro giocatore

L'importanza dell'approccio di Harsanyi sta nella semplicità della soluzione proposta


Tipo A
0
Tipo B
I
insieme di informazione
I
T
B
T
B
insieme di
informazione
insieme di
informazione
II_A
II_A
II_B
II_B
L_A
R_A
L_A
R_A
L_B
R_B
L_B
R_B
a, b
c, d
e, f
g, h
i, j
k, l
m, n
o, p


Tipo A
0
Tipo B
II_A
II_B
L_A
R_A
L_B
R_B
insieme
di
informazione
I
I
I
I
T
B
T
B
T
B
T
B
a, b
e, f
c, d
g, h
i, j
m, n
k, l
o, p

Formalmente un gioco bayesiano può essere rappresentato come una quintupla:

$$G^b = (N, \{C_i\}_{i\in N}, \{T_i\}_{i\in N}, \{p_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$$

dove N è l'insieme dei giocatori
C_i è l'insieme delle azioni possibili del giocatore i
T_i è l'insieme dei tipi del giocatore i
p_i sono le probabilità che il giocatore i assegna al tipo degli altri giocatori
$u_i : \prod_{j\in N} C_j \times \prod_{j\in N} T_j \to \mathbb{R}$ è la funzione di utilità del giocatore i

Gli elementi di C_i sono detti $azioni$ e non strategie perchè le strategie devono tenere conto di ogni possibile tipo del giocatore i; una strategia pura per il giocatore i è una funzione:

$$s^i_k : T_i \to C_i, \qquad s^i_k \in \Sigma_i$$

dove Σ_i è l'insieme delle strategie pure del giocatore i e una strategia mista è una funzione:

$$\sigma^i : C_i \times T_i \to [0,1],\ \text{c}on \sum_{c\in C_i} \sigma^i(c,t) = 1, \forall\ t \in T_i$$

La soluzione del gioco, detta *equilibrio bayesiano* o *equilibrio Nash-bayesiano*, viene determinata come un normale equilibrio di Nash di un gioco a informazione imperfetta

Esempio 4.7 (da Fudenberg - Tirole)

Un'impresa (giocatore I), già operante sul mercato, deve decidere se costruire una nuova fabbrica (C, NC); un'altra (giocatore II) deve decidere se entrare sul mercato (E, NE). Il giocatore II non sa se la costruzione della nuova fabbrica per I avrà costo 3 oppure 0 e assegna ai due eventi probabilità p e $1-p$, rispettivamente; il costo è invece noto a I; i payoff sono riportati nelle seguenti tabelle:

I_3/II	E	NE
C	$0,-1$	$2,0$
NC	$2,1$	$3,0$

I_0/II	E	NE
C	$3,-1$	$5,0$
NC	$2,1$	$3,0$

Il gioco bayesiano è rappresentato dalla quintupla:

$$N = \{I, II\}$$

$$C_I = \{C, NC\}; C_{II} = \{E, NE\}$$

$$T_I = \{I_3, I_0\}; T_{II} = \{II\}$$

$$p_{I_3}(II) = p_{I_0}(II) = 1; p_{II}(I_3) = p, p_{II}(I_0) = 1 - p$$

$$\begin{array}{ll}
u_I((C,E),(I_3,II)) = 0 & u_{II}((C,E),(I_3,II)) = -1 \\
u_I((NC,E),(I_3,II)) = 2 & u_{II}((NC,E),(I_3,II)) = 1 \\
u_I((C,NE),(I_3,II)) = 2 & u_{II}((C,NE),(I_3,II)) = 0 \\
u_I((NC,NE),(I_3,II)) = 3 & u_{II}((NC,NE),(I_3,II)) = 0 \\
u_I((C,E),(I_0,II)) = 3 & u_{II}((C,E),(I_0,II)) = -1 \\
u_I((NC,E),(I_0,II)) = 2 & u_{II}((NC,E),(I_0,II)) = 1 \\
u_I((C,NE),(I_0,II)) = 5 & u_{II}((C,NE),(I_0,II)) = 0 \\
u_I((NC,NE),(I_0,II)) = 3 & u_{II}((NC,NE),(I_0,II)) = 0
\end{array}$$

Le strategie pure sono:

$$\Sigma_I = \{s_1^I, s_2^I, s_3^I, s_4^I\} \text{ con } \begin{array}{ll} s_1^I(I_3) = C & s_1^I(I_0) = C \\ s_2^I(I_3) = C & s_2^I(I_0) = NC \\ s_3^I(I_3) = NC & s_3^I(I_0) = C \\ s_4^I(I_3) = NC & s_4^I(I_0) = NC \end{array}$$

$$\Sigma_{II} = \{s_1^{II}, s_2^{II}\} \text{ con } \begin{array}{l} s_1^{II}(II) = E \\ s_2^{II}(II) = NE \end{array}$$

L'azione NC è dominante per il giocatore I se il costo è 3 e quindi il giocatore II sceglierà E, mentre se il costo è 0 l'azione C è dominante per il giocatore I e quindi il giocatore II sceglierà NE

La strategia s_3^I è quindi dominante

Il giocatore II sceglierà E se $p > 0.5$ e sceglierà NE se $p < 0.5$

Se $p = 0.5$ il payoff atteso del giocatore II è nullo, qualunque sia la sua strategia

Se i possibili costi di costruzione fossero 3 e 1.5; i nuovi payoff dei giocatori sono riportati nelle seguenti tabelle:

I_3/II	E	NE
C	$0, -1$	$2, 0$
NC	$2, 1$	$3, 0$

$I_{1.5}/II$	E	NE
C	$1.5, -1$	$3.5, 0$
NC	$2, 1$	$3, 0$

Se il costo del giocatore I è 3, l'azione NC è ancora dominante per I

Se il costo del giocatore I è 1.5 non ci sono azioni/strategie dominanti per nessun giocatore; sia $(y, 1-y)$ la strategia mista di II; il giocatore $I_{1.5}$ confronta i payoff attesi delle strategie C e NC, rispettivamente $1.5y + 3.5(1-y) = 3.5 - 2y$ e $2y + 3(1-y) = 3 - y$, per cui sceglierà C se $3.5 - 2y > 3 - y$, cioè se $y < 0.5$
La strategia di II dipende dalla strategia e dal tipo di I; sia $(x, 1-x)$ la strategia mista di $I_{1.5}$ (I_3 sceglie NC); il payoff atteso di II se gioca NE è 0, mentre se gioca E è $1(p) - 1(1-p)(x) + 1(1-p)(1-x) = 1 - 2(1-p)x$. Il payoff atteso di E supera il payoff atteso di NE se $1 - 2(1-p)x > 0$ o:

$$x < \frac{1}{2(1-p)}$$

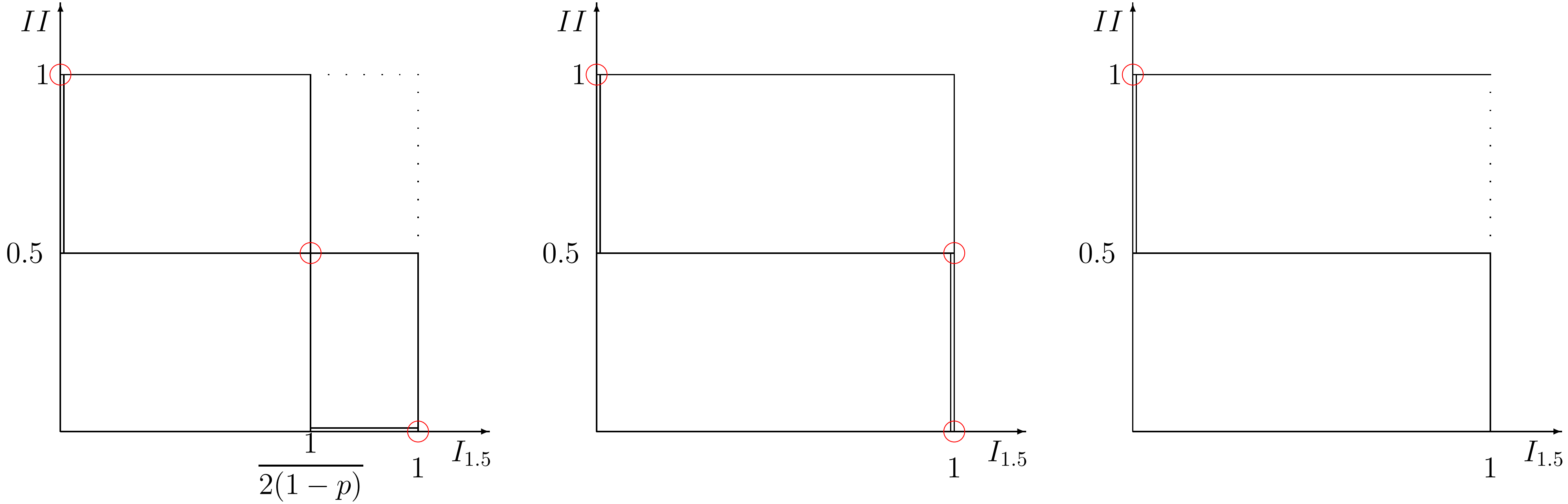
Riassumendo le migliori risposte di $I_{1.5}$ sono:

$$\begin{array}{ll} \textit{giocare } C\ (x=1) & \textit{se } y < 0.5 \\ \textit{indifferente} & \textit{se } y = 0.5 \\ \textit{giocare } NC\ (x=0) & \textit{se } y > 0.5 \end{array}$$

mentre le migliori risposte di II sono:

$$\begin{array}{lll} \textit{giocare } E\ (y=1) & \textit{se } x < \dfrac{1}{2(1-p)} & \\ \textit{indifferente} & \textit{se } x = \dfrac{1}{2(1-p)} & p \leq 0.5 \\ \textit{giocare } NE\ (y=0) & \textit{se } x > \dfrac{1}{2(1-p)} & p \leq 0.5 \end{array}$$

Miglior risposta



$p < 0.5$ $p = 0.5$ $p > 0.5$

- $x = 0, y = 1$ *costituisce un equilibrio qualunque sia* p
  infatti se II *gioca* E *(*$y = 1$*) la miglior risposta di* I *è* NC *(*$x = 0$*, perchè* $y > 0.5$*) e viceversa se* I *gioca* NC *(*$x = 0$*) la miglior risposta di* II *è giocare* E *(*$y = 1$*, perchè* $x < \dfrac{1}{2(1-p)}$*);*
- $x = 1, y = 0$ *costituisce un equilibrio se* $p \leq 0.5$
  infatti se II *gioca* NE *(*$y = 0$*) la miglior risposta di* I *è* C *(*$x = 1$*, perchè* $y < 0.5$*) e viceversa se* I *gioca* C *(*$x = 1$*) la miglior risposta di* II *è giocare* NE *(*$y = 0$*) solo quando* $p \leq 0.5$ *perchè* $x > \dfrac{1}{2(1-p)}$*, altrimenti quando* $p > 0.5, \dfrac{1}{2(1-p)} > 1$ *e quindi non è possibile* $x > 1$*;*
- $x = \dfrac{1}{2(1-p)}, y = 0.5$ *costituisce un equilibrio in strategie miste se* $p \leq 0.5$
  infatti se II *gioca* $y = 0.5$ *la risposta di* I $x = \dfrac{1}{2(1-p)}$ *è ottima (qualunque risposta di* I *è ottima) e se* I *gioca* $x = \dfrac{1}{2(1-p)}$ *la risposta di* II $y = 0.5$ *è ottima (qualunque risposta di* II *è ottima).* $\diamondsuit$

4.3 Consistenza

Se tutti i giocatori possono essere selezionati tra differenti tipi si possono ipotizzare più distribuzioni di probabilità, una per ogni giocatore, oppure un'unica probabilità definita sul prodotto cartesiano $\prod_{i \in N} T_i$

Le probabilità che ciascun giocatore assegna al tipo degli altri giocatori prendono il nome di $belief$ (to belief = ritenere)

Le due ipotesi precedenti non sono equivalenti; se lo sono si dice che i belief sono $consistenti$

Esempio 4.8 (Belief inconsistenti)
Dati I_A, I_B, II_A, II_B, le probabilità riferite a ciascun giocatore sono:

I_A ritiene di giocare contro II_A con probabilità 1 e contro II_B con probabilità 0
I_B ritiene di giocare contro II_A con probabilità 0 e contro II_B con probabilità 1
II_A ritiene di giocare contro I_A con probabilità 0 e contro I_B con probabilità 1
II_B ritiene di giocare contro I_A con probabilità 1 e contro I_B con probabilità 0

Si ha la consistenza se esistono 4 numeri non negativi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *tali che* $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$*, dove:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbf{P}(I_A \; contro \; II_A) \\ \beta &= \mathbf{P}(I_A \; contro \; II_B) \\ \gamma &= \mathbf{P}(I_B \; contro \; II_A) \\ \delta &= \mathbf{P}(I_B \; contro \; II_B) \end{aligned}$$

D'altra parte devono valere:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{I_A}(I_A \; contro \; II_A) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = 1 \\ \mathbf{P}^{I_A}(I_A \; contro \; II_B) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{P}^{I_B}(I_B \; contro \; II_A) = \dfrac{\gamma}{\gamma+\delta} = 0 \\ \mathbf{P}^{I_B}(I_B \; contro \; II_B) = \dfrac{\delta}{\gamma+\delta} = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava $\beta = 0, \gamma = 0$

Analogamente si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{II_A}(II_A \; contro \; I_A) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma} = 0 \\ \mathbf{P}^{II_A}(II_A \; contro \; I_B) = \dfrac{\gamma}{\alpha+\gamma} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{P}^{II_B}(II_B \; contro \; I_A) = \dfrac{\beta}{\beta+\delta} = 1 \\ \mathbf{P}^{II_B}(II_B \; contro \; I_B) = \dfrac{\delta}{\beta+\delta} = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $\alpha = 0, \delta = 0$ $\diamondsuit$

5 Giochi cooperativi

5.1 Introduzione

I giocatori possono associarsi per migliorare il proprio risultato
Per realizzare la cooperazione:

- deve essere possibile stipulare accordi (ad esempio non devono esserci regole antitrust o difficoltà di comunicazione)
- deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi, nel senso che deve esistere una autorità sufficientemente forte e accettata da tutti i componenti

Si distinguono due sottoclassi:

- Giochi cooperativi senza pagamenti laterali (NTU-Games)
  i giocatori ricevono un payoff assegnato
- Giochi cooperativi a pagamenti laterali (TU-Games)
  i giocatori di una coalizione possono ripartirsi in qualsiasi modo la vincita

I secondi costituiscono un caso particolare dei primi

In particolare per avere un gioco TU devono essere soddisfatte tre ipotesi:

- deve essere possibile trasferire l'utilità (da un punto di vista normativo)
- deve esistere un mezzo comune di scambio, ad esempio il denaro, con cui trasferire l'utilità (da un punto di vista materiale)
- le funzioni di utilità dei giocatori devono essere equivalenti

Esempio 5.1 (Coalizione semplice) *Sono dati tre giocatori I, II, III; se due di loro si accordano, formando una coalizione, il terzo giocatore da ad ognuno di essi una moneta, altrimenti nessuno riceve nulla. I payoff sono:*

$(1, 1, -2)$	*se I e II si coalizzano*
$(1, -2, 1)$	*se I e III si coalizzano*
$(-2, 1, 1)$	*se II e III si coalizzano*
$(0, 0, 0)$	*altrimenti*

Se i payoff relativi alla coalizione $\{II, III\}$ fossero $(-2.0, 1.1, 0.9)$ la posizione del giocatore II non si rafforza in quanto il giocatore III ha più interesse a coalizzarsi con I che con II; questa situazione non sussiste nel caso in cui sia possibile per II "trasferire" parte della propria vincita al giocatore III, ritornando alla situazione precedente $\diamondsuit$

5.1.1 Funzione caratteristica per un gioco TU

Può essere costruita a partire dal gioco a due persone tra S ed $N \setminus S$:

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} \quad \text{(von Neumann-Morgenstern)}$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\}$$

I due risultati possono non coincidere ($v'' \geq v'$)

Il problema è assegnare correttamente il valore di $v(S)$

Esempio 5.2 (Costruzione della funzione caratteristica - I) *Si consideri il seguente gioco a tre giocatori:*

$3 = S$			$3 = C$			$3 = D$		
$1/2$	L	R	$1/2$	L	R	$1/2$	L	R
T	$1, 0, 4$	$1, 0, -2$	T	$1, -3, -3$	$2, 0, -4$	T	$1, 4, 3$	$2, -3, 4$
B	$1, 2, -3$	$0, -1, -5$	B	$0, 1, 4$	$0, -1, -2$	B	$2, 2, 3$	$0, 1, 5$

Volendo determinare il valore di v si può costruire il gioco tra $S = \{1, 2\}$ e $N \setminus S = \{3\}$:

$S \ / \ N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$1, 4$	$-2, -3$	$5, 3$
S_2	$1, -2$	$2, -4$	$-1, 4$
S_3	$3, -3$	$1, 4$	$4, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

dove $S_1 = (T, L)$, $S_2 = (T, R)$, $S_3 = (B, L)$, $S_4 = (B, R)$ e $N_1 = S$, $N_2 = C$, $N_3 = D$

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N \setminus S} \in \Sigma_{N \setminus S}} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N \setminus S}) \right\} = \max\{-2, -1, 1, -1\} = 1$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N \setminus S} \in \Sigma_{N \setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N \setminus S}) \right\} = \min\{3, 2, 5\} = 2$$

$v'(S)$ corrisponde alla strategia S_3 ed in effetti la coalizione S giocando $S_3 = (B, L)$ può garantirsi un payoff non inferiore a 1, mentre il valore $v''(S)$ corrisponde alla strategia S_2, ma la coalizione S giocando $S_2 = (T, R)$ non può garantirsi un payoff non inferiore a 2, anzi probabilmente il suo payoff risulterà inferiore

Entrambe le interpretazioni difettano di realismo poichè lo scopo della coalizione $N \setminus S$ è quello di massimizzare il proprio payoff e non di minimizzare il payoff di S

La validità delle formule precedenti è limitata dal fatto di non considerare le utilità di $N \setminus S$: in questo caso è facile osservare che $N \setminus S$ considera "rischiose" le strategie N_1 ed N_2, in corrispondenza delle quali si hanno i valori $v'(S)$ e $v''(S)$ $\diamondsuit$

Le funzioni di utilità sono solo rappresentazioni delle preferenze dei giocatori, pertanto la scelta delle strategie dei giocatori di S dovrebbe avvenire non sulle funzioni di utilità, ma sulle preferenze

Triplicando le utilità del giocatore 1 si ottiene:

S / $N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$3, 4$	$0, -3$	$7, 3$
S_2	$3, -2$	$6, -4$	$3, 4$
S_3	$5, -3$	$1, 4$	$8, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

e quindi:

$$v'(S) = max\{0, 3, 1, -1\} = 3$$
$$v''(S) = min\{5, 6, 8\} = 5$$

I valori risultano differenti, ma soprattutto si ottengono in corrispondenza di differenti strategie per la coalizione S, in particolare $v'(S)$ si ottiene per S_2 e $v''(S)$ per S_3

Alle funzioni di utilità è stato dato un significato quantitativo che non necessariamente hanno

Le funzioni di utilità non sono necessariamente additive, quindi non si può definire l'utilità della coalizione come la somma delle utilità

La funzione caratteristica assegna ad ogni coalizione l'utilità che i giocatori possono ottenere "indipendentemente" dagli altri, non "qualunque sia la strategia" degli altri giocatori oppure "escludendo" gli altri giocatori
Si può utilizzare il significato di "senza la collaborazione" degli altri giocatori

Esempio 5.3 (Costruzione della funzione caratteristica - II) *Due fratelli, I e II, devono dividersi un'eredità (oggetti A, B, C, D) con le valutazioni:*

	A	B	C	D
I	12	10	9	6
II	2	3	1	5

L'esecutore testamentario in mancanza di un accordo assegnerà 2 oggetti a ciascuno, a sua discrezione

Nel peggiore dei casi I ottiene C e D e II ottiene A e C

Porre $v(\{I\}) = 15$ (oggetti C e D) implica che II voglia tenersi gli oggetti A e B (improbabile perchè lascerebbe l'oggetto D)

Analogamente $v(\{I\}) = 22$ (oggetti A e B) implica che II accetti di prendere l'oggetto C che per lui ha valore minimo

I è in grado di garantirsi $v(\{I\}) = 21$ (oggetti A e C) (gli oggetti B e D hanno maggior valore per II)

Analogamente II può ottenere "senza la collaborazione" di I $v(\{II\}) = 6$ (oggetti C e D, lasciando a I gli oggetti A e B di maggior valore)

$v(\{I, II\}) = 37$ (tutti gli oggetti a I e ripartizione del valore tra i due giocatori) $\diamondsuit$

- Se il gioco fosse stato ad utilità non trasferibile la funzione caratteristica avrebbe assegnato alla grande coalizione tutte le coppie di valori che i due giocatori possono ottenere, ad esempio $(12, 9)$ corrispondente a dare l'oggetto A al giocatore I e gli altri tre oggetti al giocatore II, oppure $(18, 4)$ corrispondente a dare al giocatore I gli oggetti A e D e al giocatore II gli oggetti B e C, oppure $(0, 11)$ corrispondente a dare i quattro oggetti al giocatore II e così via

Sono state proposte altre definizioni per $v(S)$, ad esempio il valore ottenuto in corrispondenza delle strategie che massimizzano la differenza tra il payoff di S e di $N \setminus S$, ma nessuna supera le questioni poste, a meno di oppurtune ipotesi sulle funzioni di utilità, ad esempio supporre che siano additive e uguali per tutti i giocatori

5.2 Giochi cooperativi senza pagamenti laterali

Introdotti da Aumann e Peleg (1960); ogni giocatore utilizza le proprie strategie in accordo con gli altri giocatori con cui ha formato una coalizione, ma consegue una sua propria vincita indipendentemente dagli altri

Definizione 5.1 *Un gioco NTU è una coppia* $G = (N, V)$ *dove* N *è l'insieme dei giocatori e* V *è la funzione che ad ogni coalizione* $S \subset N$ *associa l'insieme dei payoff ammissibili per i giocatori di* S*, tale che:*

- $V(S) \subset \mathbb{R}^S$
- $V(S)$ *è chiuso e non vuoto*
- $V(S) = V(S) - \mathbb{R}^S_{\geq}$ (comprehensiveness)

Esempio 5.4 (Dilemma del prigioniero senza pagamenti laterali)

I/II	C	NC
C	$1,1$	$5,0$
NC	$0,5$	$4,4$

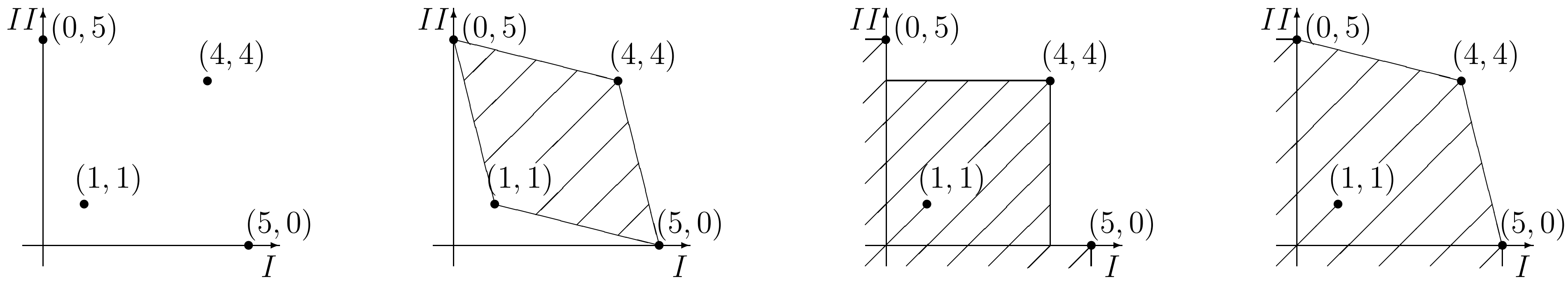
Se I gioca C si garantisce una vincita di un'unità, per cui la funzione caratteristica è:

$$V(\{I\}) = V(I) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$$

e analogamente per II:

$$V(\{II\}) = V(II) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$$

Per la coalizione $\{I, II\} = N$ si possono avere differenti valori per $V(N)$; se sono ammesse solo strategie pure si ha $V_p(N) = \{(1,1),(5,0),(0,5),(4,4)\}$; se sono ammesse strategie correlate si ha $V_c(N) = coV_p(N) =$ involucro convesso di $V(N)$. Inoltre i giocatori possono "bruciare" tutto il payoff che vogliono (free disposal):

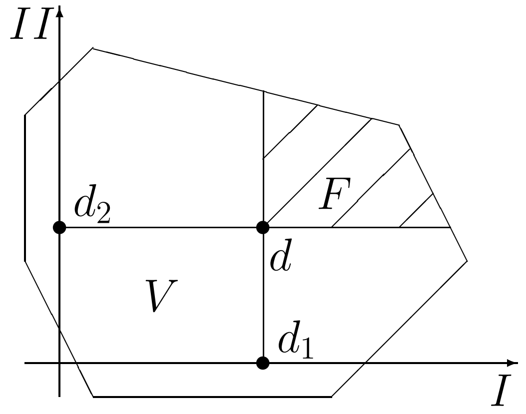


◊

5.3 Problema di contrattazione a due giocatori senza pagamenti laterali

E' una applicazione dei giochi cooperativi senza pagamenti laterali (Nash, 1950)
I giocatori possono accordarsi per una strategia correlata e possono giocare qualunque elemento dello spazio delle strategie $X \times Y$

Sotto opportune ipotesi di compattezza dell'insieme delle strategie possibili (ad esempio un simplesso) e di comportamento delle funzioni di utilità (ad esempio lineari), l'immagine nello spazio delle utilità $I \times II$ è un insieme V convesso e chiuso



Al giocatore i si assegna un valore di riferimento d_i, ad esempio la soluzione non cooperativa di maxmin, quella di Nash o altro, e si definisce il punto $d = (d_1, d_2)$ (*disagreement point*); si considera il sottoinsieme $F = V \cap \{(x_1, x_2)|x_1 \geq d_1, x_2 \geq d_2\}$ chiuso, convesso, limitato e non vuoto (*feasibility set*)

Definizione 5.2 *Un problema di contrattazione a due giocatori è rappresentato dalla coppia* (F, d) *con* $F \subset \mathbb{R}^2$ *e* $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$

E' interessante il caso di giocatori antagonisti (frontiera di Pareto = giocatori efficientisti)

Gioco NTU :

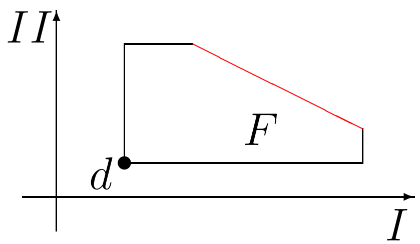
- $V(1) = \{x_1 \in \mathbb{R} | x_1 \leq d_1\}$
- $V(2) = \{x_2 \in \mathbb{R} | x_2 \leq d_2\}$
- $V(1, 2) = F - \mathbb{R}^2_{\geq}$

5.3.1 Soluzione assiomatica di Nash (1950)

Una soluzione $\Phi(F,d)$ di un problema di contrattazione (F,d) è una funzione $\Phi : C \rightarrow \mathbb{R}^2$, con C insieme dei problemi di contrattazione, tale che $\Phi(F,d) \in F$ e che soddisfa i seguenti requisiti detti *assiomi di Nash*:

1. Efficienza stretta

$$x \in F, x \geq \Phi(F,d) \Rightarrow x = \Phi(F,d)$$



2. Razionalità individuale

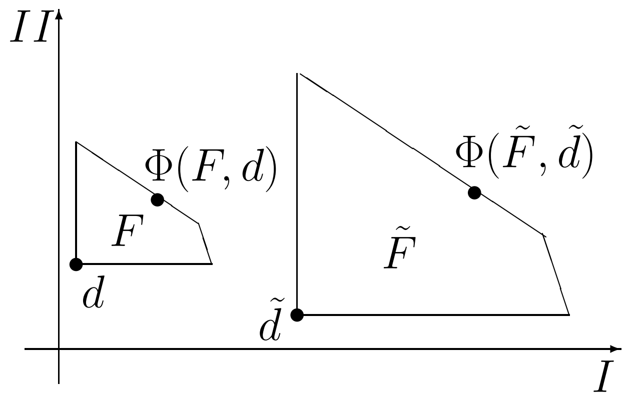
$$\Phi(F,d) \geq d$$

con la relazione d'ordine di $\mathbb{R}^2$

3. Scale covariance

$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_>, \forall\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ siano $\tilde{F} = \{(\lambda_1 x_1 + \mu_1, \lambda_2 x_2 + \mu_2) \mid (x_1, x_2) \in F\}$ e $\tilde{d} = (\lambda_1 d_1 + \mu_1, \lambda_2 d_2 + \mu_2)$ allora:

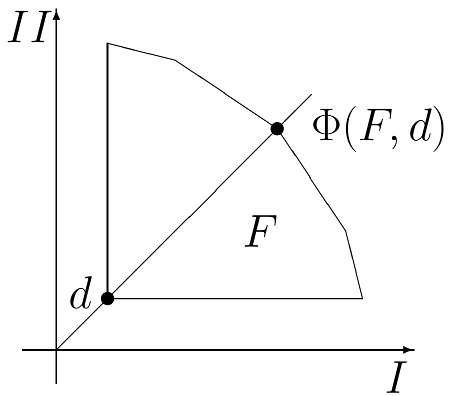
$$\Phi(\tilde{F}, \tilde{d}) = (\lambda_1 \Phi_1(F, d) + \mu_1, \lambda_2 \Phi_2(F, d) + \mu_2)$$



4. Simmetria

Se $(a, b) \in F \iff (b, a) \in F$ e $d_1 = d_2$ allora:

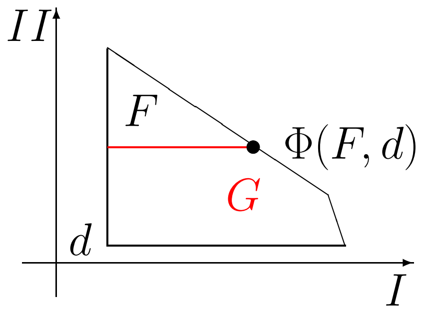
$$\Phi_1(F, d) = \Phi_2(F, d)$$



5. Indipendenza dalle alternative irrilevanti

Assioma controverso

$$d, \Phi(F,d) \in G \subset F \Rightarrow \Phi(G,d) = \Phi(F,d)$$



Teorema 5.1 *Esiste un'unica funzione* $\Phi : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ *che soddisfa gli assiomi di Nash:*

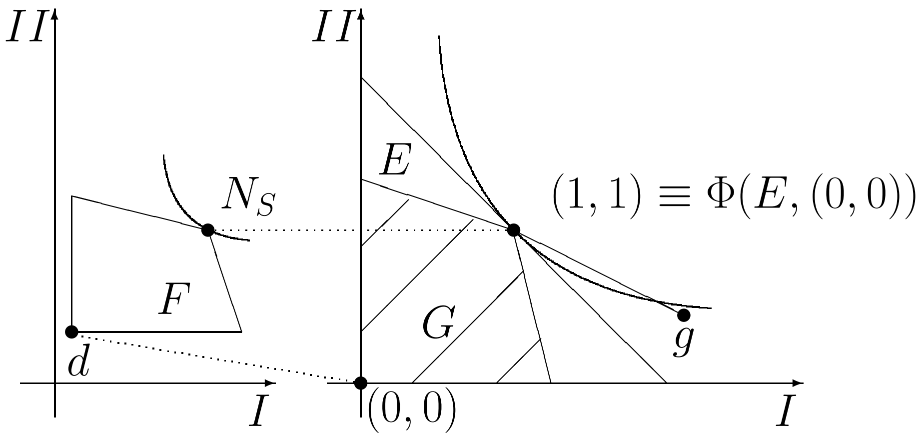
$$\Phi(F,d) = argmax\ \{(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) | x \in F\} = N_S$$

Dimostrazione

Si cerca una funzione opportuna a partire dalle conoscenze su F. Dato (F, d), se F ha almeno un punto interno esiste un solo punto (x_1, x_2) di F per cui $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$ è massimo

Per l'assioma 3 è possibile definire una trasformazione di F in G tale che:

$$\begin{aligned} d &\rightarrow (0,0) \qquad (*) \\ (x_1, x_2) &\rightarrow (1,1) \qquad (*) \end{aligned}$$



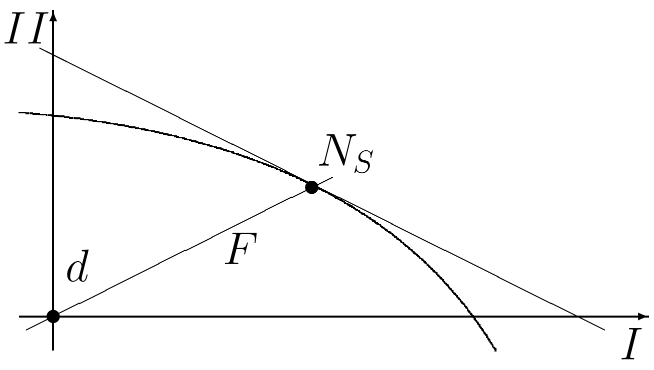
Considerando il triangolo simmetrico E, $(E, (0,0))$ ha soluzione (1, 1) (assioma 4) e quindi, essendo $G \subset E$, la soluzione del problema $(G, (0, 0))$ è (1,1) (assioma 5). Per verificare $G \subset E$ si consideri per assurdo un punto $g \in G$, $g \notin E$. Per la convessità di G il segmento $[(1, 1), g] \subset G$ e contiene punti in cui il prodotto di Nash è migliore che in (1, 1) ♣

- Se F non ha punti interni il payoff di almeno un giocatore potrebbe essere costante su F e il prodotto di Nash potrebbe essere identicamente nullo

- La soluzione di Nash può essere caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$F \subseteq H = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) \leq h(N_S) \right\}$$

dove $h(x_1, x_2) = x_1(N_{S2} - d_2) + x_2(N_{S1} - d_1)$
Esiste una retta passante per N_S che forma con l'asse delle ascisse un angolo opposto a quello formato dalla retta passante per d e per N_S tale che F è tutto contenuto nel semipiano contenente d



- Nella trattazione precedente sono state fatte alcune ipotesi non necessariamente verificate:

  1. non è detto che il punto d influenzi nel modo esposto la soluzione
  2. i decisori possono non uniformarsi al modello di von Neumann - Morgenstern

  Dati due problemi identici si può pervenire a risultati diversi (un decisore potrebbe essere più rigido in un caso che nell'altro)

Il problema di contrattazione è alla base di numerosi concetti di soluzione tra i quali l'insieme di contrattazione (Bargaining set) di Aumann e Maschler (1964), il Kernel introdotto da Davis e Maschler (1965) e il nucleolo dovuto a Schmeidler (1969)

5.3.2 Altre soluzioni

L'assioma 5 è stato oggetto di revisione da parte di Kalai-Smorodinsky (1975):

5'. Monotonia individuale

Sia $d \in G \subset F$

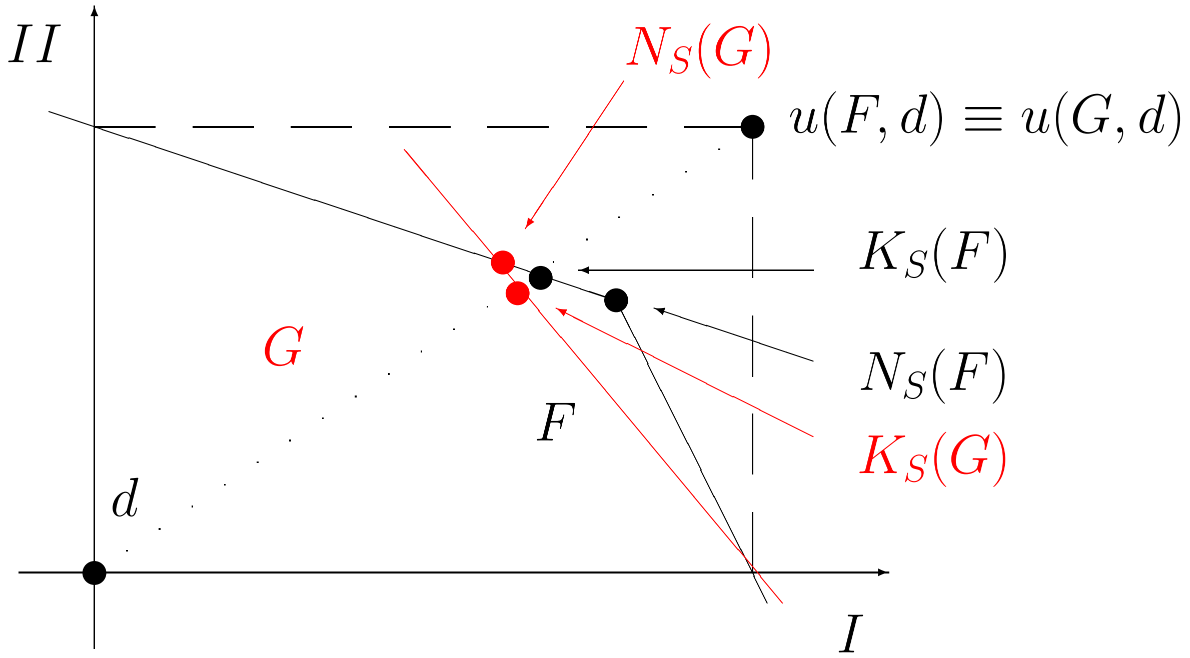
Se $u_1(G,d) = u_1(F,d)$ allora $\Phi_2(G,d) \leq \Phi_2(F,d)$ e se $u_2(G,d) = u_2(F,d)$ allora $\Phi_1(G,d) \leq \Phi_1(F,d)$, dove $u(F,d)$ è il punto *utopia* del problema (F,d), cioè $u_i(F,d) = max\ \{x_i \mid x \in F\}, i = 1,2$

Kalai e Smorodinsky hanno proposto la seguente soluzione:

$$K_S = argmax\ \left\{ x \in F \,\middle|\, \frac{x_1 - d_1}{u_1(F,d) - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{u_2(F,d) - d_2} \right\}$$

L'assioma 5' è violato dalla soluzione di Nash

Esempio 5.5 (Soluzioni di Nash e di Kalai-Smorodinsky) *Si consideri la seguente situazione:*



Passando da F *a* G*, il punto utopia è invariato ma* $N_{S2}(G) > N_{S2}(F)$*, mentre* $K_{S2}(G) < K_{S2}(F)$ $\diamondsuit$

Data l'importanza del problema di contrattazione sono state proposte altre soluzioni, tra cui:

Soluzione Egualitaria - Kalai (1977)

$E_S = argmax\ \{|x-d|,\ x \in F|\ x_1 - d_1 = x_2 - d_2\}$

Monotonia stretta

Siano (F,d) e (G,d) due problemi di contrattazione, con $d \in G \subseteq F$ allora $\Phi(G,d) \leq \Phi(F,d)$

Teorema 5.2 *La soluzione egualitaria è l'unica funzione $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa gli assiomi di efficienza stretta, simmetria e monotonia stretta*

Altre soluzioni sono:

Soluzione λ-Egualitaria

$E_S^\lambda = argmax\ \{|x-d|,\ x \in F|\ \lambda_1(x_1 - d_1) = \lambda_2(x_2 - d_2),\ \lambda_1, \lambda_2 > 0\}$

Soluzione delle Aree uguali

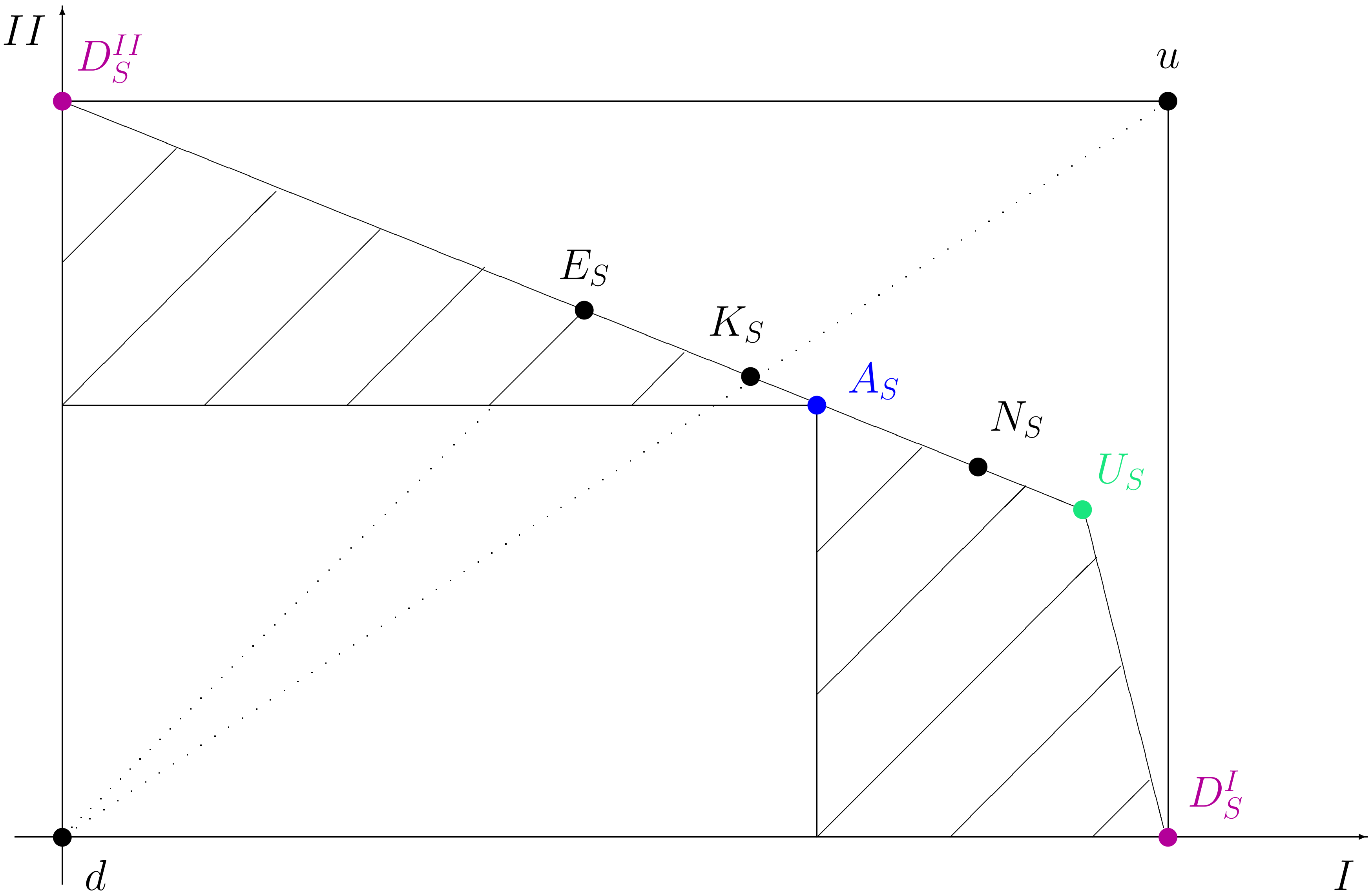
A_S s.t. $\mathcal{A}\left(\{d + \mathbb{R}^2_\geq\} \cap \{x \in F \mid x_1 \geq (A_S)_1\}\right) = \mathcal{A}\left(\{d + \mathbb{R}^2_\geq\} \cap \{x \in F \mid x_2 \geq (A_S)_2\}\right)$

Soluzione Dittatoriale

$D_S^i = argmax\ \{x_i | x \in F, x_j = d_j, j \neq i\}$

Soluzione Utilitaria

$U_S = argmax\ \{x_1 + x_2 | x \in F\}$



II
D_S^{II}
u
E_S
K_S
A_S
N_S
U_S
D_S^I
d
I

5.4 Giochi cooperativi a pagamenti laterali

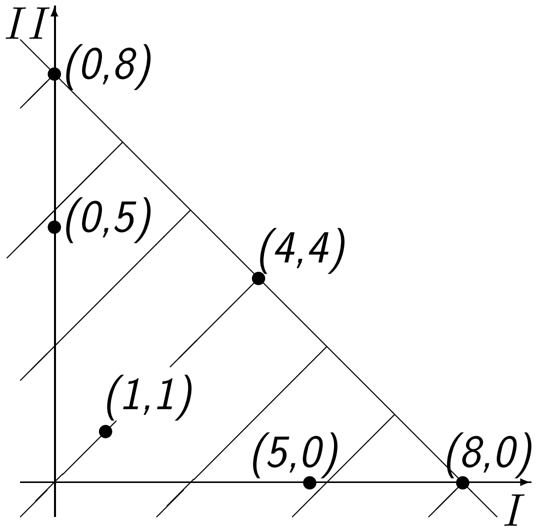
In questi giochi introdotti da Von Neumann e Morgenstern (1944) i giocatori possono stipulare accordi vincolanti e possono ripartirsi la vincita con un accordo al di fuori delle regole del gioco, la cui validità può estendersi anche oltre la fine del gioco

Come trasferire la vincita se i giocatori hanno differenti funzioni di utilità?

Definizione 5.3 *Un gioco TU è una coppia* $G = (N, v)$ *dove* N *è l'insieme dei giocatori e* v *è la funzione caratteristica, con* $v(\emptyset) = 0$

Se $v(S) \leq 0, \forall S \subseteq N$ si ha un *gioco di costi* o cost game (N, c) in cui si pone $c = -v$

Esempio 5.6 (Dilemma del prigioniero) *In questo caso sono possibili tutte le vincite aventi somma non superiore a 8. Ad esempio è possibile la vincita (8, 0), nel caso in cui il giocatore* I *prende la sua vincita (4) e la vincita del giocatore* II *(4)*



$$
\begin{aligned}
v(\emptyset) &= 0 \\
v(I) &= 1 \\
v(II) &= 1 \\
v(N) &= 8 = max\{f_I + f_{II}\}
\end{aligned}
$$

◇

Esempio 5.7 (Gioco dei guanti) *Due insiemi di giocatori, L ed R, possiedono dei guanti; i giocatori di L possiedono solo guanti sinistri mentre i giocatori di R possiedono solo guanti destri. Il valore di una coalizione è dato dal numero di paia di guanti che riescono a formare. In generale ogni giocatore possiede un solo guanto. Se i giocatori di L sono 1 e 2 e i giocatori di R sono 3 e 4 si ha:*

$$
\begin{array}{ll}
N = \{1,2,3,4\} & \\
v(i) = 0 & \forall\, i \in N \\
v(12) = v(34) = 0 & \\
v(S) = 1 & se\ |S| = 2\ e\ S \neq \{12\}, S \neq \{34\}\ oppure\ se\ |S| = 3 \\
v(N) = 2 &
\end{array}
$$

$\diamondsuit$

Definizione 5.4 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice monotono se $v(S) \leq v(T), \ \forall \ S \subseteq T$. Anche per un cost game si ha $c(S) \leq c(T), \ \forall \ S \subseteq T$*

Definizione 5.5 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice convesso se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \ \forall \ S, T \subseteq N$
- $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \ \forall \ S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}, \ \forall \ i \in N$

Definizione 5.6 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice semplice 0-1 o semplice se le coalizioni possono assumere solo i valori 0 e 1*
Se una coalizione ha valore 1 è detta vincente, se ha valore 0 è detta perdente
Solitamente la grande coalizione è vincente

Definizione 5.7 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice coesivo se per ogni partizione di N $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ si ha:*

$$\sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq v(N)$$

Per un cost game deve valere $\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i) \geq c(N)$

- Nella definizione di monotonia non si tiene conto della cardinalità delle coalizioni
- L'equivalenza delle definizioni di convessità è oggetto di un teorema.
- I giochi semplici trovano applicazione nelle situazioni in cui una coalizione è caratterizzata dal riuscire a conseguire o meno un determinato risultato, come nei giochi di maggioranza, utilizzati in politica
- La coesività è più debole della superadditività ed esprime la "convenienza" dei giocatori a formare la grande coalizione, piuttosto che riunirsi in sottocoalizioni. L'importanza deriva dal fatto che in generale i concetti di soluzione più comuni costituiscono una ripartizione del valore della grande coalizione

Le soluzioni di un gioco TU possono essere raggruppate in due famiglie:

- *soluzioni insiemistiche* che individuano un insieme di vettori payoff che ripartiscono il valore del gioco tra tutti i giocatori
- *soluzioni puntuali* che individuano una sola ripartizione e che costituiscono l'attuale tendenza in quanto più simili all'idea classica di soluzione di un problema

6 Soluzioni insiemistiche di un gioco TU

6.1 Imputazioni

Per determinare le singole vincite si potrebbe risolvere un sottogioco ristretto ai giocatori di ciascuna coalizione, oppure suddividere in parti uguali la vincita, trascurando il contributo dei singoli giocatori

Altri metodi più complessi tengono conto del ruolo svolto da ciascun giocatore

Definizione 6.1 *Dato un gioco $G = (N, v)$ si dice imputazione o ripartizione del valore del gioco o soluzione del gioco un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tale che:*

$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in N} x_i = v(N) & \textit{ipotesi di efficienza} \\ x_i \geq v(i); i = 1, \ldots, n & \textit{ipotesi di forza dei giocatori o razionalità individuale} \end{array}$$

Nel caso di un cost game la razionalità individuale richiede $x_i \leq c(i)$

L'insieme di tutte le imputazioni si indica con $E(v)$

Definizione 6.2 *Se per un gioco $G = (N, v)$ si ha:*

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$$

allora $E(v)$ ha come unico elemento $x = (v(1), v(2), \ldots, v(n))$; in questo caso il gioco è detto inessenziale; se $\sum_{i \in N} v(i) < v(N)$ il gioco è detto essenziale

La razionalità individuale costituisce una condizione per ogni concetto di soluzione
Se il gioco è essenziale esistono più imputazioni possibili e si ripropone il problema di scegliere la "soluzione": se due imputazioni x e y sono distinte esiste almeno un giocatore $k \in N$ per cui $x_k > y_k$ e almeno un giocatore $h \in N$ per cui $x_h < y_h$

Definizione 6.3

- *Date* $x, y \in E(v)$ *e una coalizione* S *si dice che* x *domina* y *mediante* $S, x \succ_S y$*, se:*

  1. $x_i > y_i \qquad \forall i \in S$
  2. $x(S) \leq v(S)$

  dove $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$*.*

- *Date* $x, y \in E(v)$ *si dice che* x *domina* y*,* $x \succ y$*, se esiste* S *tale che* $x \succ_S y$

La dominanza non è riflessiva, nè antisimmetrica, nè transitiva

Esempio 6.1 (Non antisimmetria) *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3,4\} \\ v(i) = 0 \\ v(i,j) = v(i,j,k) = v(N) = 1 \qquad \forall i,j,k \end{array}$$

Date le seguenti imputazioni $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$ *e* $y = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *si ha:*

$$x \succ_{\{1,2\}} y \ e \ y \succ_{\{3,4\}} x$$

$\diamondsuit$

6.2 Insiemi stabili

E' stato proposto da Von Neumann - Morgenstern (1944) come la "soluzione" dei giochi TU

Definizione 6.4 *Un insieme $V \subset E(v)$ si dice stabile se:*

1. *dati $x, y \in V$ si ha $x \not\succ y$ e viceversa* *stabilità interna*
2. *dato $x \notin V$, $\exists y \in V$ per il quale si ha $y \succ x$* *stabilità esterna*

Un insieme stabile contiene la soluzione ma la decisione dipende da altre informazioni non espresse dalla forma caratteristica

Un gioco può avere più insiemi stabili

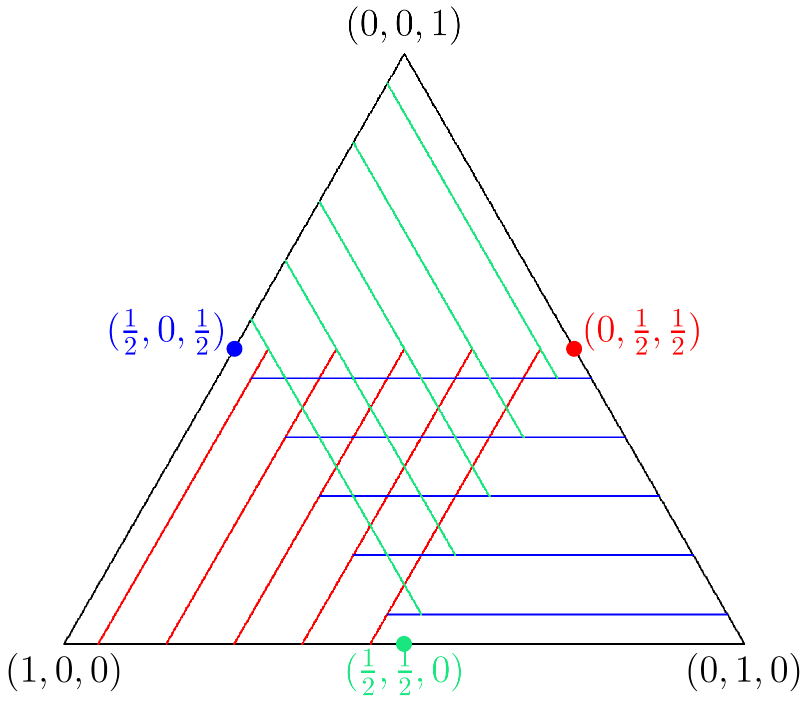
Esempio 6.2 (Maggioranza semplice)
L'insieme stabile più comune è:

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

Altri insiemi stabili sono:

- $V_{1,c} = \{c, t, 1 - c - t\}$
- $V_{2,c} = \{1 - c - t, c, t\}$
- $V_{3,c} = \{t, 1 - c - t, c\}$

$$\begin{array}{lll} con & c \in [0, \frac{1}{2}[& funzione\ delle\ tradizioni \\ & t \in [0, 1 - c] & funzione\ della\ forza \end{array}$$



$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ domina mediante $\{1, 2\}$
$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ domina mediante $\{1, 3\}$
$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ domina mediante $\{2, 3\}$

$\diamondsuit$

Nel 1968 Lucas ha dato un esempio di gioco senza insiemi stabili, indebolendo ulteriormente questo concetto di soluzione

6.3 Nucleo

E' probabilmente il concetto di soluzione insiemistico più interessante per numerose classi di giochi; è stato introdotto da Gillies (1953 e 1959)

$$x(S) \geq v(S) \ \ S \subset N \qquad \textit{ipotesi di razionalità della coalizione}$$

Definizione 6.5 *Si dice nucleo di un gioco, o core, l'insieme:*

$$C(v) = \{x \in E(v) | x(S) \geq v(S), \forall\ S \subset N\}$$

Nel caso di un cost game c *la razionalità della coalizione richiede* $x(S) \leq c(S), \forall\ S \subset N$

- Le imputazioni non dominate costituiscono il nucleo del gioco
- Il nucleo può essere vuoto come nel gioco di maggioranza semplice e in generale nei giochi essenziali a somma costante
- Il nucleo ha un aspetto normativo (quali soluzioni non bisogna scegliere). Se il nucleo è vuoto non si può concludere che la grande coalizione non si forma, ma solo che è instabile

Esempio 6.3 (Nucleo del gioco dei guanti) *Riferendosi all'Esempio 5.7, il nucleo è:*

$$C(v) = \{(\alpha, \alpha, 1-\alpha, 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

In generale se $L = \{1, ..., n_l\}$ *e* $R = \{1, ..., n_r\}$ *si ha:*

se $n_l = n_r$*:*

$$C(v) = \{(\alpha, ..., \alpha, 1-\alpha, ..., 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

se $n_l < n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_l}, \underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_r})\}$$

se $n_l > n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_l}, \underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_r})\}$$

Il nucleo evidenzia il comportamento del mercato quando uno tra due beni complementari è carente $\diamondsuit$

6.3.1 Bilanciamento

Per stabilire se un gioco ha nucleo vuoto o meno, la coesività o la superadditività non danno informazioni precise; ad esempio il gioco di maggioranza semplice ha nucleo vuoto ma è superadditivo e quindi anche coesivo
Un gioco può non essere superadditivo, ma avere nucleo non vuoto

Esempio 6.4 (Gioco non superadditivo a nucleo non vuoto) *Si consideri il gioco TU:*

$$
\begin{aligned}
&N = \{1, 2, 3\} \\
&v(S) = 1 \qquad se\ S \neq N \\
&v(N) = 3
\end{aligned}
$$

Il gioco non è superadditivo poichè $v(1) + v(2) = 2$ *e* $v(12) = 1$ *ma ha nucleo non vuoto in quanto* $x = (1, 1, 1) \in C(v)$ ♢

Se un gioco non è coesivo ha nucleo vuoto, in quanto per ogni allocazione x esisterebbe una partizione $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ tale che:

$$x(N) = v(N) < \sum_{i=1,\dots,k} v(S_i) \leq \sum_{i=1,\dots,k} x(S_i) = x(N)$$

Le imputazioni del nucleo possono essere caratterizzate come le soluzioni del problema lineare:

$$\begin{aligned} min \;\; & z = \sum_{i \in N} x_i & \\ s.t. \;\; & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) & \quad \forall S \subseteq N \end{aligned}$$

per le quali $z^* = v(N)$

Il duale del problema è:

$$\begin{aligned} max \;\; & w = \sum_{S \subseteq N} y_s v(S) & \\ s.t. \;\; & \sum_{S \ni i} y_S = 1 & \quad \forall i \in N \\ & y_S \geq 0 & \quad \forall S \subseteq N \end{aligned}$$

per le quali $w^* = v(N)$

Teorema 6.1 *Un gioco v ha nucleo non vuoto se e solo se esiste una soluzione del problema primale con $z^* = v(N)$ o equivalentemente (per il primo teorema della dualità) esiste una soluzione del problema duale con $w^* = v(N)$*

L'utilità di questo teorema è molto limitata in quanto la difficoltà di verificare una delle tre condizioni è equivalente

Definizione 6.6

- *Una collezione* $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ *di sottoinsiemi di* N *è detta bilanciata se esistono* m *numeri non negativi* $y_1, y_2, \dots, y_m$ *detti coefficienti di bilanciamento, tali che:*

$$\sum_{S_j \ni i} y_j = 1 \qquad \forall i \in N$$

- *Una collezione bilanciata è detta minimale se nessuna sottocollezione è bilanciata*

- *Un gioco è detto bilanciato se per ogni collezione bilanciata minimale* $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ *con coefficienti di bilanciamento* $y_1, y_2, \dots, y_m$*, si ha:*

$$\sum_{j=1,\dots,m} y_j v(S_j) \le v(N)$$

Proprietà

- Ogni collezione bilanciata è unione di collezioni bilanciate minimali

- Una collezione bilanciata è minimale se e solo se i coefficienti di bilanciamento sono unici

- Le collezioni bilanciate non dipendono dalla funzione caratteristica, ma solo da N

Esempio 6.5 (Collezioni bilanciate I)

1. *Ogni partizione di N è una collezione bilanciata, con coefficienti unitari.*
2. *Sia $N = \{1,2,3\}$; $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ è una collezione bilanciata con coefficienti $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. In generale per ogni N la collezione di $\binom{n}{s}$ sottoinsiemi distinti di s elementi è bilanciata con coefficienti $\binom{n-1}{s-1}^{-1}$.*

$\diamondsuit$

Teorema 6.2 (Bondareva, 1963 - Shapley, 1967) *Un gioco $G = (N, v)$ ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato*

<u>Dimostrazione</u>

$$C(v) \neq \emptyset \iff v(N) = min \left\{\sum_{i=1,\dots,n} x_i |\; x(S) \geq v(S) \; \forall \; S \subseteq N\right\} \iff$$

$$\iff v(N) = max \left\{\sum_{S \subseteq N} y_S v(S) | \sum_{S \ni i} y_S = 1 \; \forall i \in N, y_S \geq 0 \; \forall \; S \subseteq N\right\} \iff$$

$$\iff \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) \leq v(N), \sum_{S \ni i} y_S = 1 \; \forall i \in N, y_S \geq 0 \; \forall \; S \subseteq N$$

$$\iff G \text{ è bilanciato (vertici della regione ammissibile)}$$

$\clubsuit$

- Il teorema di Bondareva-Shapley considera un sistema lineare generato da un sottoinsieme dei vincoli del problema duale associato al nucleo
- Per un gioco superadditivo il teorema di Bondareva-Shapley è vero per le partizioni di N, quindi è sufficiente verificarlo per le altre collezioni bilanciate minimali
- Il teorema è particolarmente utile per dimostrare che un gioco ha nucleo vuoto in quanto è sufficiente trovare una collezione bilanciata che non verifica la condizione
- Un gioco a nucleo non vuoto viene anche detto bilanciato

Esempio 6.6 (Collezioni bilanciate II)

1. *Un gioco a tre giocatori superadditivo è bilanciato se e solo se* $v(12)+v(13)+v(23) \leq 2\ v(123)$ *poichè* $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ *è l'unica collezione bilanciata minimale con coefficienti* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

2. *Sia dato il gioco:*

$$\begin{array}{l} N=\{1,2,3,4\} \\ v(1)=v(2)=v(3)=v(4)=v(14)=v(24)=0; v(23)=v(34)=2 \\ v(12)=v(13)=v(123)=3; v(124)=4; v(134)=v(234)=5; v(N)=6 \end{array}$$

   Il gioco non è bilanciato in quanto $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ *è una collezione bilanciata con coefficienti* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *per la quale si ha:*

$$\frac{1}{2}\ v(12)+\frac{1}{2}\ v(134)+\frac{1}{2}\ v(234)=\frac{13}{2}>6=v(N)$$

◊

6.4 Esempi di giochi e nucleo

6.4.1 Bankruptcy game

Allocazione di una risorsa insufficiente

$$\mathcal{B} = (N, c, E) = (E; c_1, ..., c_n)$$

dove $N = \{1, ..., n\}$ insieme dei creditori
$c = \{c_1, ..., c_n\}$ vettore delle richieste
E capitale, con $E < \sum_{i \in N} c_i = C$

Ogni ripartizione ammissibile ("razionale") del capitale, $x = \{x_1, ..., x_n\}$ deve soddisfare:

$$\sum_{i \in N} x_i = E$$
$$0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N$$

Soluzioni

- $PROP$ - Le quote assegnate sono proporzionali alle richieste di ciascuno:

$$PROP_i = \frac{c_i}{C} E \qquad i \in N$$

- CEA - Le quote assegnate sono uguali per tutti, col vincolo di non superare le richieste di ciascuno:

$$CEA_i = \min(\alpha, c_i) \qquad i \in N$$

  dove α è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEA_i = E$

- CEL - Le quote assegnate sono uguali alle richieste di ciascuno diminuite di una quantità uguale per tutti, col vincolo di non assegnare quote negative:

$$CEL_i = \max(c_i - \beta, 0) \qquad i \in N$$

  dove β è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEL_i = E$

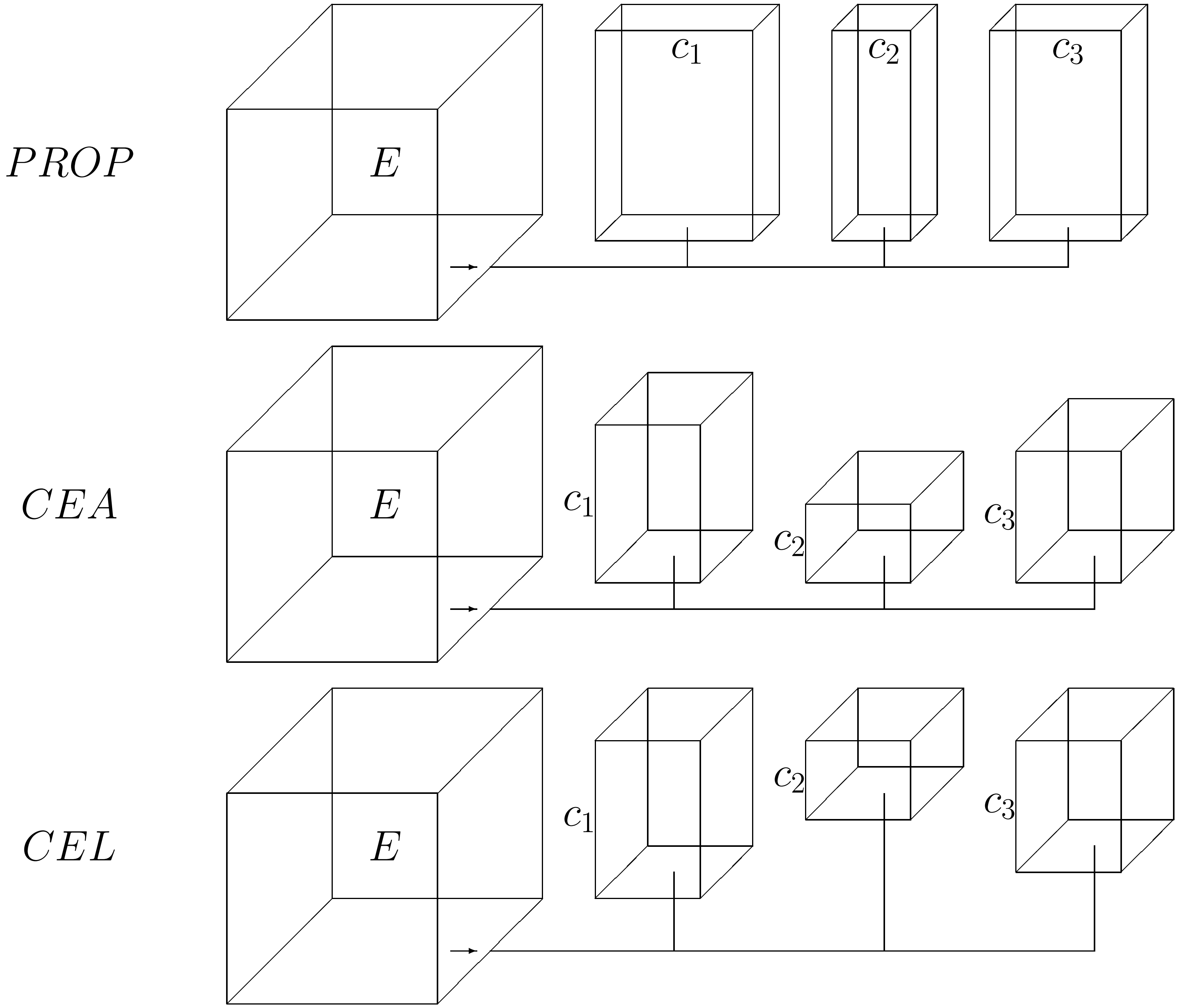
Esempio 6.7 (Soluzioni) *Si consideri il problema di bancarotta* $(15; 3, 6, 7, 14)$

$$
\begin{aligned}
&PROP = (1.5, 3, 3.5, 7)\\
&CEA = (3, 4, 4, 4)\\
&CEL = (0, 2, 3, 10)
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

$PROP$ è la soluzione più intuitiva
CEA è quella che più protegge i piccoli creditori
CEL è quella più favorevole ai grossi creditori

Interpretazione dei vasi comunicanti



Si possono definire due giochi TU, uno pessimistico, (N, v_P), e uno ottimistico, (N, v_O), con:

$$v_P(S) = max \left(0, E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \right) \qquad S \subseteq N$$

$$v_O(S) = min \left(E, \sum_{i \in S} c_i \right) \qquad S \subseteq N$$

Esempio 6.8 (Inconsistenza del gioco ottimistico) *Si consideri il problema di bancarotta* $(5; 3, 4)$*. I due giochi sono definiti rispettivamente da:*

$$v_O(1) = 3; v_O(2) = 4; v_O(12) = 5$$
$$v_P(1) = 1; v_P(2) = 2; v_P(12) = 5$$

per cui il gioco ottimistico dice che i due giocatori separatamente possono ottenere rispettivamente 3 *e* 4*, mentre il capitale è solo* 5 $\diamondsuit$

Il nucleo del gioco pessimistico coincide con l'insieme delle soluzioni ammissibili del problema di bancarotta:

$$x \in core(v_P) \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{i \in N} x_i = E \\ 0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N \end{cases}$$

"$\Rightarrow$" La prima è la condizione di efficienza
Per la seconda condizione per ogni $i \in N$ si ha $x_i \geq v_P(i) \geq 0$ e $E - x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \geq v_P(N \setminus \{i\}) \geq E - c_i \Rightarrow x_i \leq c_i$

"$\Leftarrow$" La condizione di efficienza è ovviamente soddisfatta
Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) se $v_P(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$

2) se $v_P(S) = E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \leq E - \sum_{i \in N \setminus S} x_i = \sum_{i \in S} x_i$

6.4.2 Fixed tree game

Un insieme di agenti $N = \{1, ..., n\}$ è collegato alla sorgente di un servizio tramite una fissata connessione ad albero
Ciascun agente corrisponde ad un vertice dell'albero
Il servizio è pagato in base all'utilizzo ma restano i costi di manutenzione

E' possibile associare al problema il gioco TU (N, c), con:

$$c(S) = \min_{T \supseteq S} \left\{ \sum_{i \in T} c_i \right\} \qquad S \subseteq N$$

con $c_i =$ costo di manutenzione dell'unico arco entrante nel vertice associato al giocatore i e $T =$ componente connessa dell'albero contenente la sorgente

Il nucleo di un fixed tree game contiene le allocazioni che si ottengono ripartendo il costo di ciascun arco solo tra i giocatori della componente connessa, non contenente la sorgente, che si ottiene eliminando l'arco stesso

6.4.3 Weighted majority game

Problema di maggioranza pesata

$$\mathcal{W} = (N, w, q) = (q; w_1, ..., w_n)$$

dove $N = \{1, ..., n\}$ insieme dei consiglieri
$w = \{w_1, ..., w_n\}$ vettore dei "pesi"
q quota di maggioranza, con $q < \sum_{i \in N} w_i$

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice 0-1 (N, v) con:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i > q \;\; S \text{ vincente} \\ 0 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i \leq q \;\; S \text{ perdente} \end{cases}$$

Il gioco risulta monotono e se $q \geq \dfrac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i$ allora se S è vincente $N \setminus S$ è perdente

Questi giochi sono più utilizzati nei consigli di amministrazione che in politica

Un giocatore i è detto di veto se $v(S) = 0$ se $i \notin S$

Detto V l'insieme dei giocatori di veto e data una allocazione x tale che $\sum_{i \in N} x_i = 1, x_i \geq 0, i \in N$ si ha:

$$x \in core(v) \iff \sum_{i \in V} x_i = 1$$

"$\Rightarrow$" E' sufficiente verificare che $x_i = 0, i \in N \setminus V$

$i \in N \setminus V \Rightarrow v(N \setminus \{i\}) = 1$ (altrimenti i sarebbe di veto) per cui $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 1 \Rightarrow x_i = 0$

"$\Leftarrow$" Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) $v(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$

2) $v(S) = 1 \Rightarrow V \subseteq S \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{i \in V} x_i = 1$

- Se il giocatore i è di veto non è vero che $i \in S \Rightarrow v(S) = 1$

Esempio 6.9 (Consiglio di sicurezza dell'ONU) *Il Consiglio di sicurezza dell'ONU è composto da cinque membri permanenti con diritto di veto e dieci membri eletti. Un provvedimento è approvato se riceve almeno 9 voti e nessun veto. Questo problema può essere rappresentato come un problema di maggioranza pesata in cui $w_i = 1$ se i è un membro eletto e $w_i = 7$ se i è un membro permanente e $q = 38$* $\diamondsuit$

6.4.4 Sequencing game

Problema di sequenziamento (ordinamento di operazioni)

$$\mathcal{S} = (N, \sigma_0, \alpha, s)$$

dove	$N = \{1, ..., n\}$	insieme degli agenti
	σ_0	ordine iniziale (permutazione)
	$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$	vettore dei costi per unità di tempo
	$s = (s_1, ..., s_n)$	vettore dei tempi di servizio

$$C_\sigma = \sum_{i \in N} \alpha_i \left(\sum_{j \in P(\sigma,i)} s_j + s_i \right)$$

dove $P(\sigma, i)$ è l'insieme degli agenti che precedono i nell'ordinamento σ
Smith (1956) ha dimostrato che l'ordinamento ottimale si può ottenere ordinando gli agenti secondo indici di urgenza $u_i = \dfrac{\alpha_i}{s_i}, i \in N$ debolmente decrescenti

Esempio 6.10 (Problema di sequenziamento) *Si consideri il problema di sequenziamento definito da* $N = \{1, 2, 3\}, \sigma_0 = (1, 2, 3), \alpha = (5, 9, 8), s = (5, 3, 4)$*; il costo iniziale è* $C_{\sigma_0} = 25 + 72 + 96 = 193$ *e gli indici di urgenza sono* $u = (1, 3, 2)$*, per cui* $\sigma^* = (2, 3, 1)$ *con costo* $C_{\sigma^*} = 27 + 56 + 60 = 143$ $\diamondsuit$

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice (N, v) con v definita nel modo seguente:

- una coalizione $T \subseteq N$ è detta connessa secondo σ se per ogni $i, j \in T$ e $k \in N$ si ha $\sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j) \Rightarrow k \in T$
- scambiando due giocatori i, j la variazione di costo è $\alpha_j s_i - \alpha_i s_j$; la variazione è positiva se e solo se $u_i < u_j$; se la variazione è negativa non si ha lo scambio
- il guadagno di uno scambio è $g_{ij} = max\{0, \alpha_j s_i - \alpha_i s_j\}$, quindi il guadagno di una coalizione T connessa secondo σ è $v(T) = \sum_{j \in T} \sum_{i \in P(\sigma,j) \cap T} g_{ij}$
- data una coalizione $S \subseteq N$, l'ordine σ induce una partizione in componenti connesse, S/σ

$$v(S) = \sum_{T \in S/\sigma} v(T) \qquad S \subset N$$

Esempio 6.11 (Sequencing game) *Riferendosi all'Esempio 6.10 si ha:*

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	30	0	0	50

$v(23) = 0$ *poichè lo scambio produrrebbe una perdita, in quanto* $u_2 > u_3$
$v(13) = 0$ *perchè la coalizione non è connessa e i giocatori* 1 *e* 3 *non possono scambiarsi anche se otterrebbero un guadagno di 20 e il giocatore* 2 *avrebbe un guadagno, poichè il tempo di servizio di* 3 *è 4 e quello di* 1 *è 5* $\diamondsuit$

$$EGS_i = \frac{1}{2}\sum_{k\in P(\sigma,i)} g_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{j:i\in P(\sigma,j)} g_{ij} \qquad \forall i \in N$$

Esempio 6.12 (EGS-Rule) *Riferendosi all'Esempio 6.10 i guadagni g_{ij} sono:*

ij	12	13	21	23	31	32
g_{ij}	30	20	0	0	0	12

e conseguentemente

$$EGS_1 = \frac{1}{2}(g_{12} + g_{13}) = 25$$
$$EGS_2 = \frac{1}{2}g_{12} + \frac{1}{2}g_{23} = 15$$
$$EGS_3 = \frac{1}{2}(g_{13} + g_{23}) = 10$$

$\diamondsuit$

- EGS non è simmetrica per i giocatori 1 e 2 che sono simmetrici per il gioco, cioè $v(S \cup \{1\}) = v(S \cup \{2\}), \forall\ S \subseteq N \setminus \{1,2\}$, ma non per il problema associato; infatti 1 può scambiarsi vantaggiosamente sia con 2 che con 3, mentre 2 può scambiarsi vantaggiosamente solo con 1

- g_{21}, g_{31}, g_{32} non vengono utilizzati perchè l'ordine iniziale dato non permette questi scambi

- Una variante è $\varepsilon - GS_i = \varepsilon \sum_{k\in P(\sigma,i)} g_{ki} + (1-\varepsilon) \sum_{j:i\in P(\sigma,j)} g_{ij}, \forall i \in N, \forall \varepsilon \in [0,1]$

6.4.5 Production game

Problema di produzione

$$\mathcal{P} = (N, A, (b^i)_{i \in N}, c)$$

dove	$N = \{1, ..., n\}$	insieme degli agenti
	A	matrice tecnologica del processo produttivo
	b^i	vettore delle risorse dell'agente i
	c	vettore dei prezzi dei beni prodotti

E' possibile associare al problema il gioco TU (N, v), dove:

$$v(S) = max\ \{c^T z | Az \leq b^S, z \geq 0\} \qquad S \subseteq N$$

con $b^S = \sum_{i \in S} b^i$ rappresenta le risorse possedute dalla coalizione S

Il nucleo di un gioco di produzione contiene le imputazioni x tali che $x_i = b^{iT} u^*$ dove u^* è una soluzione ottimale del duale del problema di produzione:

$$\begin{aligned} max\ & c^T z \\ s.t.\ & Az \leq b^N \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

- Il risultato precedente può essere esteso a tutti i giochi originati da un problema lineare (Teorema di Owen, 1975)

6.4.6 Assignment game

Problema di assegnazione

$$\mathcal{A} = (N^v, N^c, A, B)$$

dove	$N^v = \{1, ..., n^v\}$	insieme dei venditori
	$N^c = \{1, ..., n^c\}$	insieme dei compratori
	A	vettore; $a_j =$ valutazione che $j \in N^v$ da al proprio oggetto
	B	matrice; $b_{ij} =$ valutazione che $i \in N^c$ da all'oggetto di $j \in N^v$

- Gli oggetti non hanno un prezzo di mercato
- Ciascun venditore possiede un solo oggetto
- Ciascun compratore può acquistare un solo oggetto

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice (N, v) con:

$$N = N^v \cup N^c$$

e v è definita nel modo seguente:

- Se $i^* \in N^c$ e $j^* \in N^v$:

$$v(i^*j^*) = c_{i^*j^*} = \begin{cases} b_{i^*j^*} - a_{j^*} & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} \geq 0 \\ 0 & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} < 0 \end{cases}$$

- Se S contiene più compratori che venditori, detto $i(j) \in S \cap N^c$ il compratore dell'oggetto offerto da $j \in S \cap N^v$:

$$v(S) = max \sum_{j \in S \cap N^v} c_{i(j),j}$$

- Se S contiene più venditori che compratori, detto $j(i) \in S \cap N^v$ il venditore dell'oggetto acquistato da $i \in S \cap N^c$:

$$v(S) = max \sum_{i \in S \cap N^c} c_{i,j(i)}$$

I valori c_{ij} definiscono il problema di assegnazione:

$$
\begin{array}{lll}
max\ \ z = \displaystyle\sum_{i \in N^c, j \in N^v} c_{ij} x_{ij} & & \\
s.t. \quad \displaystyle\sum_{i \in N^c} x_{ij} \le 1 & & \forall\ j \in N^v \\
\qquad\ \ \displaystyle\sum_{j \in N^v} x_{ij} \le 1 & & \forall\ i \in N^c \\
\qquad\ \ x_{ij} \in \{0,1\} & & \forall\ i \in N^c, j \in N^v
\end{array}
$$

dove $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ si accordano} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Per il teorema di Owen il nucleo contiene le imputazioni ottenute da una soluzione ottimale del duale:

$$
\begin{array}{lll}
min\ \ w = \displaystyle\sum_{j \in N^v} y_j^v + \sum_{i \in N^c} y_i^c & & \\
s.t. \quad y_j^v + y_i^c \ge c_{ij} & & \forall\ j \in N^v, \forall\ i \in N^c
\end{array}
$$

- Le soluzioni ottimali duali devono avere le componenti non negative per la razionalità individuale

Esempio 6.13 (Gioco di assegnazione) *Ci sono tre giocatori,* 1 *(venditore,* $a_1 = 10$*),* 2 *e* 3 *(compratori,* $b_{21} = 12, b_{31} = 15$*)*

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(N) = 5$$

$$core(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = \alpha, x_2 = 0, x_3 = 5 - \alpha, 2 \leq \alpha \leq 5\}$$

L'oggetto non viene venduto a 2 *e il payoff di* 1 *e* 3 *dipende da come si accordano, ma l'utilità di* 1 *è almeno 2 unità. In altre parole il prezzo di vendita è almeno 12 (*1 *può accordarsi con* 2*), ma non più di 15 (*3 *si ritira)*
Se $\bar{b}_{21} = 15$ *allora* $core(v) = \{(5, 0, 0)\}$ *cioè il prezzo di vendita è 15 (legge della domanda e dell'offerta)* $\diamondsuit$

- Considerazioni economiche

  1. La legge dell'equilibrio tra domanda e offerta dice che il prezzo deve far sì che la domanda sia uguale all'offerta, per cui se il prezzo dell'oggetto fosse inferiore a 12 vi sarebbero due acquirenti mentre se il prezzo fosse superiore a 15 non vi sarebbero acquirenti
  2. Le leggi economiche non escludono, come il nucleo, un'utilità positiva per il giocatore 2; infatti il giocatore 1 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio di un'offerta maggiore per far sì che il prezzo pagato dal giocatore 3 sia più alto oppure il giocatore 3 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio del suo ritiro per far sì che il prezzo pagato al giocatore 1 sia più basso

7 Soluzioni puntuali di un gioco TU

Prendono frequentemente il nome di *indici di potere* o *valori* perchè permettono di identificare il "potere" di ciascun giocatore all'interno del gioco
Il termine "indice di potere" si usa per i giochi semplici, mentre per un gioco qualsiasi si preferisce il termine "valore"

7.1 Valore di Shapley (1953)

Si basa sul *contributo marginale* di ogni giocatore

Definizione 7.1 *Si chiama valore di Shapley il vettore $\phi(v)$ la cui componente ϕ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori, cioè:*

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} [v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))]$$

dove $n = |N|$, Π è l'insieme delle permutazioni di N e $P(\pi, i)$ è l'insieme dei giocatori che precedono i nella permutazione π

Il valore di Shapley per un gioco cooperativo esiste ed è unico

Se il gioco è superadditivo (subadditivo per un cost game) il valore di Shapley è un'imputazione:

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$$
$$\phi_i(v) \geq v(i) \qquad \forall i \in N$$

ma non è necessariamente un elemento del nucleo

Se il gioco è convesso (concavo per un cost game) il valore di Shapley è un elemento del nucleo

Esempio 7.1 (Gioco di assegnazione) *Riferendosi all'Esempio 6.13, dove* $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(123) = 5$ *il valore di Shapley è dato da:*

	$Contributi\ marginali$		
$Permutazioni$	$Giocatore\ 1$	$Giocatore\ 2$	$Giocatore\ 3$
1 2 3	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(12) - v(1) = 2$	$v(123) - v(12) = 3$
1 3 2	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(13) - v(1) = 5$
2 1 3	$v(12) - v(2) = 2$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(12) = 3$
2 3 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(23) - v(2) = 0$
3 1 2	$v(13) - v(3) = 5$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
3 2 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(23) - v(3) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
ϕ_i	$\frac{17}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{11}{6}$

Il valore di Shapley riflette il valore economico del giocatore 2 $\diamondsuit$

7.1.1 Assiomi di Shapley

Sia data una regola ψ che ad un gioco $G(N, v)$ associa un vettore di $\mathbb{R}^N$

1. Simmetria
   Se due giocatori i, j sono simmetrici, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, allora $\psi_i(v) = \psi_j(v)$

2. Dummy player
   Sia i un giocatore fittizio, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i)\ \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, allora $\psi_i(v) = v(i)$

3. Additività o indipendenza (assioma controverso)
   Dati due giochi u e v, sia $(u+v)$ il gioco somma definito da $(u+v)(S) = u(S)+v(S),\ \forall\ S \subseteq N$ allora $\psi_i(u + v) = \psi_i(u) + \psi_i(v), \forall\ i \in N$

ϕ è l'unico vettore efficiente che soddisfa i precedenti assiomi

Esempio 7.2 (Giocatori simmetrici e giocatore fittizio) *Sia dato il gioco* $G = (N, v)$ *dove:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 1; v(12) = 4; v(13) = v(23) = 2; v(N) = 5$$

I giocatori 1 *e* 2 *sono simmetrici e il giocatore* 3 *è fittizio, allora* $\phi_3(v) = v(3) = 1$ *e* $\phi_1(v) = \phi_2(v) = \frac{1}{2}(v(N) - v(3)) = 2$ *e quindi* $\phi(v) = (2, 2, 1)$ $\diamondsuit$

- L'assioma di simmetria può essere sostituito dall'assioma di *anonimato*:
  Dato un gioco v e una permutazione dei giocatori π sia u il gioco definito da $u(\pi(S)) = v(S)\ \forall\ S \subseteq N$ allora $\psi_{\pi(i)}(u) = \psi_i(v)$

- L'assioma di dummy player può essere sostituito dall'assioma di *null player*:
  Sia i un giocatore nullo, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S),\ \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, allora $\psi_i(v) = 0$

7.1.2 Calcolo del valore di Shapley

Il valore di Shapley risulta molto complesso da calcolare

Definizione

E' necessario determinare i contributi marginali dei giocatori nelle $n!$ possibili coalizioni ordinate
Con 10 giocatori, per ogni giocatore ci sono $10! = 3.628.800$ permutazioni

Semplificazione

Considerare le possibili $2^n - 1$ coalizioni non vuote e per ciascuna considerare ogni giocatore come l'ultimo arrivato e quindi "pesare" il suo contributo marginale con le permutazioni degli altri giocatori della coalizione e dei giocatori non facenti parte della coalizione:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Con 10 giocatori ci sono $2^{10} - 1 = 1.023$ coalizioni

Formule "ad hoc"

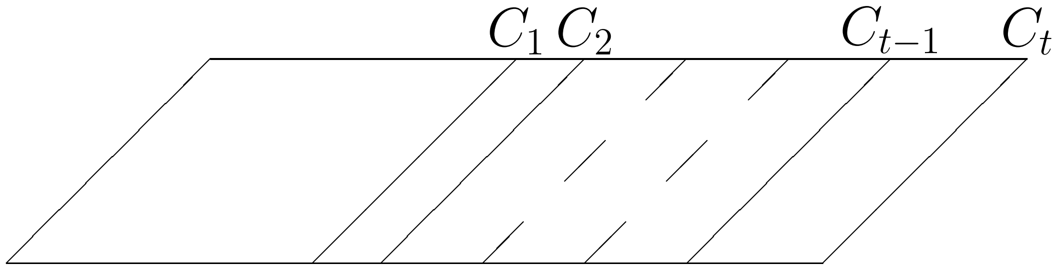
Sfruttare le caratteristiche di alcune classi di giochi

Gioco dell'aeroporto (Airport game - Littlechild e Thompson, 1977)

Ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra differenti tipi di aerei

Gli aerei sono raggruppati in t sottoinsiemi disgiunti $N_1, \ldots, N_t$

Gli aerei di N_i richiedono una pista di costo C_i con $C_i < C_{i+1}$



Si definisce il gioco:

$$v(S) = C_{j(S)}$$

dove $j(S) = max\ \{i|S \cap N_i \neq \emptyset\}$

Il valore di Shapley di ogni aereo corrisponde alla seguente ripartizione dei costi:

- Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli aerei, poichè tutti lo utilizzano;
- Il costo del secondo tratto di pista $C_2 - C_1$ è diviso tra gli aerei dei sottoinsiemi $N_2, \ldots, N_t$ che sono quelli che lo utilizzano;
- Il costo dell'ultimo tratto di pista $C_t - C_{t-1}$ che è diviso tra gli aerei del sottoinsieme N_t che sono gli unici che lo utilizzano.

Questo criterio è facilmente applicabile anche nel caso di molti aerei

Esempio 7.3 (Gioco dell'aeroporto)

$$N_1 = \{1, 2, 3\}; N_2 = \{4, 5, 6, 7\}; N_3 = \{8, 9, 10\}$$
$$C_1 = 20; C_2 = 27; C_3 = 33$$
$$\phi_1 = \frac{20}{10} = 2$$
$$\phi_2 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} = 3$$
$$\phi_3 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} + \frac{33-27}{3} = 5$$

$\diamondsuit$

La verifica utilizza gli assiomi di Shapley (Littlechild e Owen, 1973)
Si definiscono t giochi $v_1, \ldots, v_t$ con il gioco v_i relativo al tratto di pista i:

$$v_i(S) = \begin{cases} C_i - C_{i-1} & se\ i \leq j(S) \\ 0 & se\ i > j(S) \end{cases}$$

dove $C_0 = 0$
A questo punto si osserva che:

1. gli aerei di $N_1, \ldots, N_{i-1}$ sono dummy per il gioco v_i
2. gli aerei di $N_i, \ldots, N_t$ sono simmetrici per il gioco v_i
3. v è dato dalla somma dei giochi v_i

7.1.3 Un'applicazione del valore di Shapley

Esempio 7.4 (Consiglio dell'UE 1958-1973) *Il valore di Shapley permette di evidenziare un difetto nei pesi assegnati nel Consiglio dell'UE del 1958*
$quota_{1958} = 11$ $(17 \times 0.7 = 11.9)$; $quota_{1973} = 40$ $(58 \times 0.7 = 40.6)$

	1958			1973		
Paesi	Peso	%	Shapley	Peso	%	Shapley
Francia	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Germania	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Italia	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Belgio	2	11.76	0.150	5	8.62	0.081
Paesi Bassi	2	11.76	0.150	5	8.62	0.081
Lussemburgo	1	5.88	0.000	2	3.45	0.010
Regno Unito	-	-	-	10	17.24	0.179
Danimarca	-	-	-	3	5.17	0.057
Irlanda	-	-	-	3	5.17	0.057
Totale	17	100.00	1.000	58	100.00	1.000

◇

7.2 Indice di Banzhaf-Coleman (1965, 1971)

Definizione 7.2 *Si chiama indice di Banzhaf-Coleman il vettore $\psi(v)$ la cui componente ψ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili coalizioni a cui appartiene:*

$$\psi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N, i \in S} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Questo indice non è un'imputazione poichè non è efficiente

7.3 Indice di Banzhaf-Coleman normalizzato

Per un gioco semplice, si può normalizzare a 1 l'indice precedente, oppure si può evidenziare il ruolo di ciascun giocatore

Definizione 7.3 *Si chiama contributo vincente del giocatore i per un gioco semplice monotono v, il numero di casi in cui la sua presenza rende vincente una coalizione o* swing*:*

$$\vartheta_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Definizione 7.4 *Si chiama indice di Banzhaf-Coleman normalizzato per un gioco semplice monotono v, il vettore $\beta(v)$ la cui componente i è il rapporto tra il contributo vincente del giocatore i e la somma dei contributi vincenti di tutti i giocatori:*

$$\beta_i(v) = \frac{\vartheta_i(v)}{\sum_{j \in N} \vartheta_j(v)}$$

Questo indice è un'imputazione

Esempio 7.5 (Confronti tra indici)

1. $N = \{1, 2, 3\}$; $v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = v(13) = 0; v(23) = v(N) = 1$

$$\varphi = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \psi = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \beta = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Gli indici coincidono

2. $N = \{1, 2, 3\}$; $v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = v(13) = v(23) = v(N) = 1$

$$\varphi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \psi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \beta = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

ϕ *e* β *coincidono e sono minori di* ψ

3. $N = \{1, 2, 3\}$; $v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = v(13) = v(23) = 0; v(N) = 1$

$$\varphi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \psi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \beta = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

ϕ *e* β *coincidono e sono maggiori di* ψ

4. $N = \{1, 2, 3\}$; $v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = 0; v(13) = v(23) = v(N) = 1$

$$\varphi = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6}\right), \psi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \beta = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Non esiste nessuna relazione tra gli indici $\diamondsuit$

7.4 Indice di Deegan-Packel (1978)

Richiede che il gioco sia semplice e monotono
Considera equivalenti tutte le coalizioni vincenti minimali e, per ciascuna di esse, tutti i componenti

Dato un gioco $G = (N, v)$, sia $\mathcal{W} = \{S_1, ..., S_m\}$ l'insieme delle coalizioni vincenti minimali:

$$\delta_i(v) = \sum_{S_j \ni i; S_j \in \mathcal{W}} \frac{1}{m} \frac{1}{s_j}, \forall\ i \in N$$

Questo indice è efficiente, ma non è monotono rispetto ai giocatori

Esempio 7.6 (Non monotonia) *Si consideri il gioco di maggioranza pesata definito da* $(50; 26, 25, 25, 23, 1)$*; le coalizioni vincenti minimali sono:*

$$\mathcal{W} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3,4\},\{2,3,5\}\}$$

per cui l'indice di Deegan-Packel è:

$$\delta(v) = \left(\frac{6}{24}, \frac{7}{24}, \frac{7}{24}, \frac{2}{24}, \frac{2}{24}\right)$$

e quindi i giocatori 2 e 3 hanno un "potere" superiore al giocatore 1 pur avendo quote inferiori Come raffronto si ha:

$$\varphi(v) = \left(\frac{22}{60}, \frac{17}{60}, \frac{17}{60}, \frac{2}{60}, \frac{2}{60}\right)$$

$$\beta(v) = \left(\frac{9}{16}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right)$$

$\diamondsuit$

7.5 Indice dei beni pubblici (*Public Goods Index* - Holler, 1982)

Richiede che il gioco sia semplice e monotono
Dipende solo dal numero di coalizioni vincenti minimali a cui cascun giocatore appartiene, trascurando la loro cardinalità

Dato un gioco $G = (N, v)$, sia $w_i, i \in N$ il numero di coalizioni vincenti minimali comprendenti il giocatore i:

$$h_i(v) = \frac{w_i}{\sum_{j \in N} w_j}, \forall\ i \in N$$

Anche questo indice è efficiente, ma non è monotono rispetto ai giocatori, come mostra il precedente Esempio 7.6:

$$h(v) = \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

7.6 Indice di Johnston (1978)

Richiede che il gioco sia semplice e monotono
Considera equivalenti tutte coalizioni vincenti quasi-minimali e, per ciascuna di esse, tutti i giocatori critici

Definizione 7.5 *Dato un gioco $G = (N, v)$, una coalizione vincente S è detta vincente quasi-minimale se esiste $i \in S$ tale che $S \setminus \{i\}$ è perdente*
In questo caso il giocatore i è detto critico per la coalizione S

Dato un gioco $G = (N, v)$, sia $\mathcal{W}^q = \{S_1, ..., S_\ell\}$ l'insieme delle coalizioni vincenti quasi-minimali
Sia c_{S_j} il numero di giocatori critici di $S_j \in \mathcal{W}^q$
Sia $\mathcal{W}_i^q$ l'insieme delle coalizioni vincenti quasi-minimali per cui il giocatore i è critico:

$$\gamma_i(v) = \sum_{S_j \in \mathcal{W}_i^q} \frac{1}{\ell} \frac{1}{c_{S_j}}, \forall\ i \in N$$

L'indice di Johnston è efficiente e coincide con l'indice di Deegan-Packel se $\mathcal{W} = \mathcal{W}^q$

Esempio 7.7 *Si consideri il gioco dell'Esempio 7.6; le coalizioni vincenti quasi-minimali sono:*

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^q = \ &\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\\ &\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\}\}\end{aligned}$$

per cui l'indice di Johnston è:

$$\gamma(v) = \left(\frac{30}{72},\frac{19}{72},\frac{19}{72},\frac{2}{72},\frac{2}{72}\right)$$

$\diamondsuit$

7.7 Nucleolo (Schmeidler, 1969)

Si basa sull'idea di minimizzare il massimo "malcontento"
Principio di Rawls: massimizzare l'utilità dell'agente che ottiene il peggior risultato

Definizione 7.6 *Dato un gioco v, sia S una coalizione e x una possibile ripartizione del valore del gioco; si dice rimpianto o eccesso di S rispetto ad x la quantità:*

$$e(S,x) = v(S) - x(S)$$

Nel caso di un cost game il rimpianto è $x(S) - c(S)$

- Nella definizione precedente x è una ripartizione del valore del gioco in quanto deve soddisfare solo l'ipotesi di efficienza; in questo caso talvolta si usano i termini preimputazione e prenucleolo per indicare che non si tiene conto della razionalità individuale

E' possibile definire il vettore $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$:

$$\vartheta_1(x) = max\ \{e(S,x) | S \subset N\} = e(S_1, x)$$
$$\vartheta_i(x) = max\ \{e(S,x) | S \subset N, S \neq S_j, j = 1, \ldots, i-1\} = e(S_i, x) \qquad i = 2, \ldots, 2^n$$

Le componenti di $\vartheta(x)$ sono i rimpianti generati da x al variare di S, in ordine debolmente decrescente

Esempio 7.8 (Vettore degli eccessi) *Sia dato il gioco:*

$$N = \{1,2,3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(23) = 3; v(N) = 5$$

Data la ripartizione $x = (3,1,1)$ *si ha:*

$$e(1,x) = -3; e(2,x) = -1; e(3,x) = -1; e(12,x) = -2; e(13,x) = -1; e(23,x) = 1; e(N,x) = 0$$

e quindi:

$$\vartheta(x) = (1,0,-1,-1,-1,-2,-3)$$

$\diamondsuit$

Definizione 7.7 *Dati due vettori* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *si dice che* x *è lessicograficamente minore di* y *e si indica con* $x <_L y$, *se esiste* $i \geq 1$ *per cui:*

$$\begin{aligned} x_j &= y_j \qquad j < i \\ x_i &< y_i \end{aligned}$$

Definizione 7.8 *Dato un gioco* v *si dice nucleolo del gioco il vettore* $\nu(X)$ *che genera il minimo, secondo l'ordine lessicografico, dei vettori* $\vartheta(x)$ *al variare di* x *nell'insieme* X *delle possibili ripartizioni*

- Il nucleolo è un elemento del nucleo se è non vuoto, per cui costituisce un concetto di soluzione per i giochi a nucleo vuoto, ma permette anche di "scegliere" un elemento del nucleo

Esempio 7.9 (Ordine lessicografico) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2\}$$
$$v(1) = 1; v(2) = 3; v(12) = 8$$

Dati $x = (6, 2)$ *e* $y = (3, 5)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -5; e(2, x) = 1; e(12, x) = 0$$
$$e(1, y) = -2; e(2, y) = -2; e(12, y) = 0$$

e quindi $\vartheta(x) = (1, 0, -5)$ *e* $\vartheta(y) = (0, -2, -2)$ *per cui* $\vartheta(y) <_L \vartheta(x)$
Si può verificare che $y = \nu(X)$ $\diamondsuit$

Proprietà

Se X è non vuoto, compatto e convesso allora $\nu(X)$ esiste ed è unico

7.7.1 Calcolo del nucleolo

Algoritmo di Kopelowitz (1967)

Il massimo rimpianto delle coalizioni è rappresentato da α:

$$v(S) - x(S) \leq \alpha \qquad \forall\ S \subset N$$

E' sufficiente cercare il minimo di α

La grande coalizione viene esclusa poichè il suo rimpianto è sempre nullo

α non è vincolata in segno

$$\begin{aligned} &min\ \ \alpha \\ &s.t.\ \ \sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ &\qquad \sum_{i \in S} x_i + \alpha \geq v(S) \qquad \forall\ S \subset N \end{aligned}$$

Se la soluzione non è unica si itera l'algoritmo, conservando il massimo rimpianto ottenuto

Detto S_0 l'insieme delle coalizioni leganti, la nuova ripartizione deve minimizzare il massimo rimpianto per le altre coalizioni, senza incrementare il rimpianto per le coalizioni di S_0, per cui si riscrivono i vincoli:

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S) - \alpha_0 \qquad \forall\ S \in S_0$$

Si ottengono α_1 e S_1; iterando dopo al più n iterazioni la soluzione è unica e costituisce il nucleolo del gioco

Esempio 7.10 (Calcolo del nucleolo) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = 3; v(23) = 5; v(N) = 6$$

Il primo problema è:

$$\begin{array}{ll} min & \alpha \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 6 \\ & x_1 + x_2 + \alpha \geq v(12) = 2 \\ & x_1 + x_3 + \alpha \geq v(13) = 3 \\ & x_2 + x_3 + \alpha \geq v(23) = 5 \\ & x_1 + \alpha \geq v(1) = 0 \\ & x_2 + \alpha \geq v(2) = 0 \\ & x_3 + \alpha \geq v(3) = 0 \end{array}$$

In forma tabellare:

	x_1	x_2	x_3	α^+	α^-	
v_1	1	1	1	0	0	-6
u_2	1	1	0	1	-1	-2
u_3	1	0	1	1	-1	-3
u_4	0	1	1	1	-1	-5
u_5	1	0	0	1	-1	0
u_6	0	1	0	1	-1	0
u_7	0	0	1	1	-1	0
$-z$	0	0	0	-1	1	0

	v_1	u_4	u_3	α^+	u_5	
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
u_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	0	0	1	0	-1	3
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
α^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
u_6	0	1	-1	0	1	2
u_7	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$-z$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La soluzione ottimale è $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$ *con* $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$ *e* $S_0 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$
La soluzione non è unica; si itera riscrivendo i vincoli associati alle coalizioni in S_0

Il secondo problema è:

$$\begin{array}{ll} min & \alpha \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 6 \\ & x_1 + x_2 + \alpha \geq v(12) = 2 \\ & x_1 + x_3 + \alpha \geq v(13) = 3 \\ & x_2 + x_3 = v(23) - \alpha_0 = \frac{11}{2} \\ & x_1 = v(1) - \alpha_0 = \frac{1}{2} \\ & x_2 + \alpha \geq v(2) = 0 \\ & x_3 + \alpha \geq v(3) = 0 \end{array}$$

In forma tabellare:

	x_1	x_2	x_3	α^+	α^-	
v_1	1	1	1	0	0	-6
u_2	1	1	0	1	-1	-2
u_3	1	0	1	1	-1	-3
v_4	0	1	1	0	0	$-\frac{11}{2}$
v_5	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
u_6	0	1	0	1	-1	0
u_7	0	0	1	1	-1	0
$-z$	0	0	0	-1	1	0

	v_1	v_4	u_3	α^+	u_2	
x_1	1	-1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
α^-	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{4}$
x_2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
v_5	1	-1	0	0	0	0
u_6	-1	1	0	0	1	$\frac{3}{2}$
u_7	-1	1	1	0	0	$\frac{5}{2}$
$-z$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

La soluzione ottimale è $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right)$ *con* $\alpha_1 = -\frac{3}{4}$ *e* $S_1 = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$

La soluzione è unica e la ripartizione trovata costituisce il nucleolo $\diamondsuit$

8 Il Bargaining Set, il Kernel e il Nucleolo

8.1 Premessa

I giocatori possono ridiscutere una allocazione x (contrattazione) se esistono dei fondamenti "razionali", su cui basare la loro richiesta

8.2 Il Bargaining Set

Definizione 8.1 *Un'obiezione di i contro j rispetto ad x è una coppia (C, y), con $C \subset N, i \in C, j \notin C$ e y è un'imputazione tale che:*

$$y(C) = v(C)$$
$$y_k > x_k, \forall\ k \in C$$

Definizione 8.2 *Una controbiezione di j contro i rispetto a (C, y) è una coppia (D, z), con $D \subset N, j \in D, i \notin D$ e z è un'imputazione tale che:*

$$z(D) = v(D)$$
$$z_k \geq y_k, \forall\ k \in D \cap C$$
$$z_k \geq x_k, \forall\ k \in D \setminus C$$

Definizione 8.3 *Il Bargaining Set di un gioco (N, v) è l'insieme delle imputazioni x tali che per ogni obiezione ad x esiste una controbiezione, cioè l'insieme delle imputazioni x per le quali non esistono obiezioni giustificate; si indica con $\mathcal{M}_1^i$*

Interpretazione:
i non è soddisfatto della ripartizione x in quanto ritiene che j ottenga troppo, per cui minaccia di formare la coalizione C che esclude j, nella quale tutti i componenti saranno avvantaggiati (obiezione); ma se l'obiezione non è giustificata j può a sua volta formare la coalizione D, di cui possono far parte anche membri di C, con la quale non svantaggerà nessuno

Esempio 8.1 (Gioco di maggioranza) *Data un'imputazione x, sia (C, y) un'obiezione di i contro j; C deve essere della forma $\{i, h\}$, perchè $v(i) = 0$, con $y_i > x_i$ e quindi $y_h < 1 - x_i$, essendo $y(C) = v(C) = 1$. Se $x_j + y_h \leq 1$ allora j ha una controbiezione e quindi se $x \in \mathcal{M}_1^i$ si ha $y_h < 1 - x_i$ e $y_h \leq 1 - x_j$ da cui si ricava $x_j \leq x_i, \forall\ i, j$ e quindi $x_i = x_j = x_h = \frac{1}{3}$. Quindi $\mathcal{M}_1^i = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$* $\diamondsuit$

Esempio 8.2 (Io e mia zia (da Osborne - Rubinstein)) *Si consideri il gioco a 4 giocatori con v definita da:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } S \supseteq \{1,2\} \text{ opp. } \{1,3\} \text{ opp. } \{1,4\} \text{ opp. } \{2,3,4\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Data un'imputazione x con $x_2 < x_3$, un'obiezione di 2 contro 3 è data dalla coalizione $\{1,2\}$, assegnando $y_1 = 1 - x_2 - \varepsilon$ e $y_2 = x_2 + \varepsilon$, con $\varepsilon < x_3 - x_2$
3 non ha alcuna controbiezione (infatti $y_1 + x_3 > 1$), per cui per la simmetria dei giocatori $2,3,4$ si ha che $x \in \mathcal{M}_1^i$ se $x_2 = x_3 = x_4 = \alpha$ e quindi $x_1 = 1 - 3\alpha$.
Un'obiezione di 1 contro 2 rispetto ad x è data dalla coalizione $\{1,3\}$, assegnando $y_1 > 1-3\alpha$ e $y_3 < 3\alpha$. 2 non ha alcuna controbiezione rispetto ad y (con la coalizione $\{2,3,4\}$), se $\alpha + 3\alpha + \alpha > 1$, cioè se $\alpha > \frac{1}{5}$
Un'obiezione di 2 contro 1 rispetto ad x è data dalla coalizione $\{2,3,4\}$, assegnando $y_2 > \alpha$ e $y_3 = y_4 < \frac{1-\alpha}{2}$. 1 non ha alcuna controbiezione rispetto ad y (con la coalizione $\{1,3\}$ oppure $\{1,4\}$), se $1 - 3\alpha + \frac{1-\alpha}{2} > 1$, cioè se $\alpha < \frac{1}{7}$
Quindi $\mathcal{M}_1^i = \{(1-3\alpha, \alpha, \alpha, \alpha,), \frac{1}{7} \leq \alpha \leq \frac{1}{5})\}$ $\diamondsuit$

8.3 Il Kernel

Definizione 8.4 *Il surplus di i contro j rispetto ad x è dato da:*

$$s_{i,j}(x) = \max_{S \ni i; S \not\ni j} e(S, x)$$

Il surplus rappresenta il massimo guadagno (o minima perdita) di i se forma una coalizione senza j, supponendo che gli altri giocatori si "accontentino" del payoff x

Definizione 8.5 *Il Kernel di un gioco (N, v) è l'insieme delle imputazioni x tali che $s_{i,j}(x) > s_{j,i}(x) \Rightarrow x_j = v(j), \forall\, i, j \in N$; si indica con $\mathcal{K}$.*
Il Prekernel di un gioco (N, v) è l'insieme delle preimputazioni x tali che $s_{i,j}(x) = s_{j,i}(x), \forall\, i, j \in N$; si indica con $\mathcal{K}$

Teorema 8.1 *Il Kernel è un sottoinsieme del Bargaining Set*

Esempio 8.3 (Gioco di maggioranza) *Per il Teorema 8.1 $\mathcal{K} = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.* $\diamondsuit$

Esempio 8.4 (Io e mia zia (da Osborne - Rubinstein)) *Data un'imputazione $x \in \mathcal{K}$, per il Teorema 8.1 si ha $x = (1 - 3\alpha, \alpha, \alpha, \alpha,), \frac{1}{7} \leq \alpha \leq \frac{1}{5})$; allora $s_{1,2}(x) = 2\alpha$ e $s_{2,1}(x) = 1 - 3\alpha$; essendo $x_1 = 1 - 3\alpha > 0 = v(1)$, deve essere verificato $s_{2,1} \leq s_{1,2}$, cioè $1 - 3\alpha \leq 2\alpha$ da cui $\alpha \geq \frac{1}{5}$ e quindi $\mathcal{K} = \{(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})\}$.* $\diamondsuit$

Esiste una definizione alternativa del Kernel che si basa su differenti definizioni di obiezione e controbiezione

Definizione 8.6 *Un'obiezione di* i *contro* j *rispetto ad* x *è una coalizione* $C \subset N, i \in C, j \notin C$ e $x_j > v(j)$.
Una controbiezione di j *contro* i *è una coalizione* $D \subset N, j \in D, i \notin D$ e $e(D,x) \geq e(C,x)$.
Il Kernel è l'insieme delle imputazioni x *tali che per ogni obiezione* C *di un qualsiasi* i *contro* j *esiste una controbiezione* D *di* j *contro* i

8.4 Il Nucleolo

E' possibile definire anche il nucleolo in funzione di una opportuna obiezione e controbiezione

Definizione 8.7 *Un'obiezione ad x è una coppia (C, y), con $C \subset N$ e y è un'imputazione tale che $e(C, x) > e(C, y)$, cioè $y(C) > x(C)$*
Una controbiezione rispetto a (C, y) è una coalizione $D \subset N$ tale che $e(D, y) > e(D, x)$, cioè $x(D) > y(D)$ e $e(D, y) \geq e(C, x)$
Il nucleolo è l'insieme delle imputazioni x tali che per ogni obiezione (C, y) esiste una controbiezione D

Teorema 8.2 *Il nucleolo è un elemento del Kernel*

Esempio 8.5 (Giochi precedenti) *Per il Teorema 8.2 il nucleolo del gioco di maggioranza è $\nu = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$ e quello del gioco io e mia zia è $\nu = \{(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})\}$* $\diamondsuit$

Nucleolo di un bankruptcy game

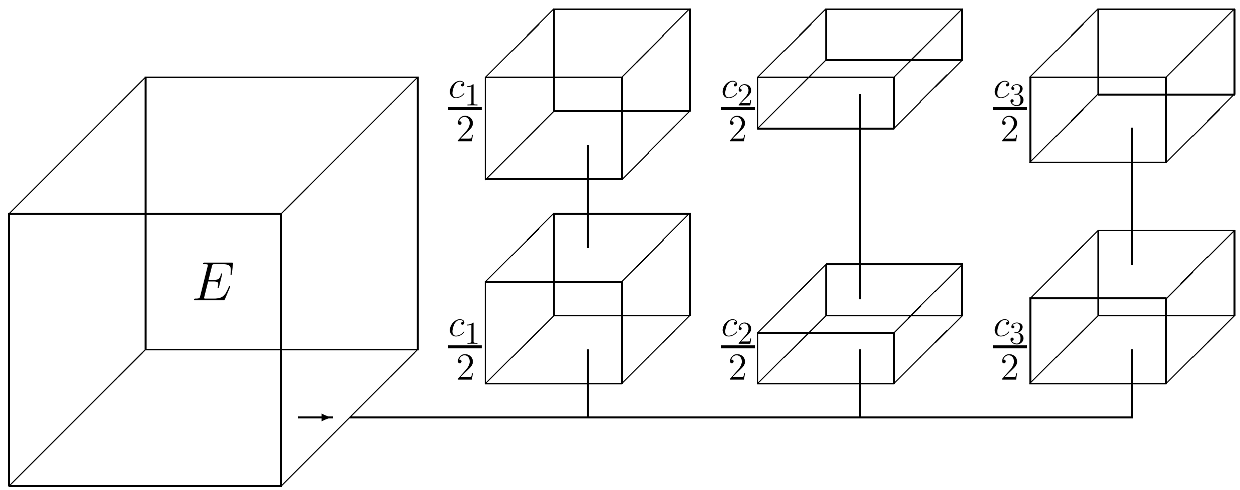
$$\nu_i = \begin{cases} CEA_i(E; \frac{1}{2}c) & \text{se } E < \frac{1}{2}\sum_{i \in N} c_i \\ c_i - CEA_i(\sum_{j \in N} c_j - E, \frac{1}{2}c) & \text{se } E \geq \frac{1}{2}\sum_{i \in N} c_i \end{cases}$$

E' noto anche come "regola del Talmud":

Se un uomo muore lasciando tre mogli alla prima delle quali aveva promesso 100, alla seconda 200 e alla terza 300, si divida il patrimonio nel modo seguente:

Lascito	*Prima*	*Seconda*	*Terza*
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

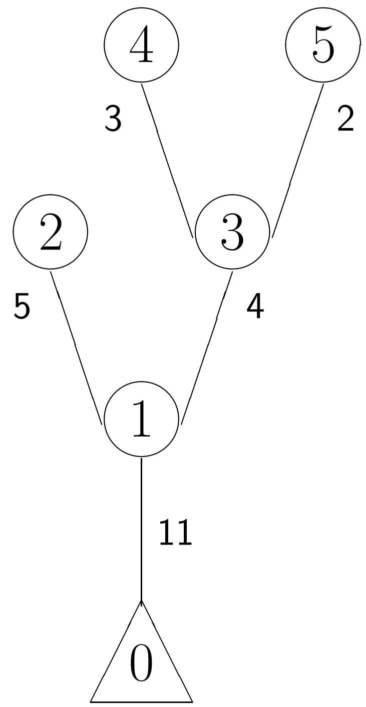
Interpretazione dei vasi comunicanti:



Nucleolo di un fixed tree game - *Painting story*

- Tutti i giocatori dipingono alla stessa velocità e iniziano contemporaneamente
- Ogni giocatore inizia a dipingere il secondo arco a lui più vicino, che non sia ancora stato dipinto; per ultimo dipinge l'arco entrante
- Quando un qualsiasi arco viene terminato si riassegnano i giocatori ad altri archi (con le stesse regole)

Esempio 8.6 (Nucleolo di un fixed tree game) *Per la situazione rappresentata nella figura si ha:*



- *Le assegnazioni iniziali dei giocatori sono:*
  $1 \to (0,1), 2 \to (0,1), 3 \to (0,1), 4 \to (1,3), 5 \to (1,3)$
  dopo 2 unità di tempo 4 *e* 5 *hanno terminato l'arco* $(1,3)$*;*
- *Le nuove assegnazioni sono:*
  $1 \to (0,1), 2 \to (0,1), 3 \to (0,1), 4 \to (0,1), 5 \to (0,1)$
  dopo 1 unità di tempo l'arco $(0,1)$ *è terminato;* 1 *e* 3 *terminano;*
- *Le ultime assegnazioni sono:*
  $2 \to (1,2), 4 \to (3,4), 5 \to (3,5)$
  5 *termina dopo 2 unità di tempo;* 4 *termina dopo 3 unità di tempo;*
  2 *termina dopo 5 unità di tempo*

Il nucleolo è $\nu = (3,8,3,6,5)$ $\diamondsuit$

9 Giochi su reti

9.1 Grafi e cooperazione

Non necessariamente tutti i giocatori possono o vogliono formare qualsiasi coalizione (coalizioni politiche)
Si considerano strutture cooperative, che possono essere rappresentate con un grafo
L'arco $a_{ij} = (v_i, v_j)$ indica che i e j sono disposti a far parte della stessa coalizione (Myerson, 1977)

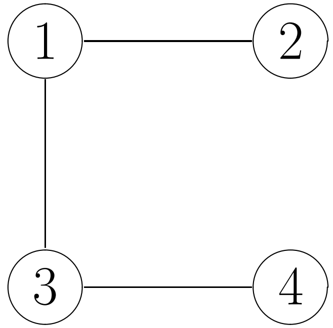
Può essere necessario che ciascun giocatore debba essere disposto a unirsi a tutti gli altri (sottografo completo), o può essere sufficiente la disponibilità a formare la coalizione "attraverso alcuni giocatori intermedi" (sottografo connesso)

Gioco ristretto rispetto a un grafo G

I giocatori possono realizzare solo le coalizioni indotte dal grafo G

- Esiste una formulazione più restrittiva in cui i e j possono far parte della stessa coalizione solo se entrambi esprimono questa volontà (Claim game). In questo caso è necessario utilizzare un grafo orientato, in cui l'arco a_{ij} esprime che i accetta di entrare in una coalizione con j, ma non viceversa

Esempio 9.1 (Coalizioni indotte)



Se una coalizione richiede la reciprocità si possono formare le coalizioni $1-2-3-4-12-13-34$
Il gioco ristretto v_G *è:*

$$
\begin{array}{lll}
v_G(1) = v(1) & v_G(12) = v(12) & v_G(123) = max\ \{v(12) + v(3), v(13) + v(2)\} \\
v_G(2) = v(2) & v_G(13) = v(13) & v_G(124) = v(12) + v(4) \\
v_G(3) = v(3) & v_G(14) = v(1) + v(4) & v_G(134) = max\ \{v(13) + v(4), v(1) + v(34)\} \\
v_G(4) = v(4) & v_G(23) = v(2) + v(3) & v_G(234) = v(2) + v(34) \\
 & v_G(24) = v(2) + v(4) & \\
 & v_G(34) = v(34) & \\
\end{array}
$$

$$v_G(N) = max\ \{v(12) + v(34), v(13) + v(2) + v(4)\}$$

Se una coalizione non richiede la reciprocità si possono formare le coalizioni $1 - 2 - 3 - 4 - 12 - 13 - 34 - 123 - 134 - 1234$

Il gioco ristretto v_G *è:*

$$
\begin{array}{lll}
v_G(1) = v(1) & v_G(12) = v(12) & v_G(123) = v(123) \\
v_G(2) = v(2) & v_G(13) = v(13) & v_G(124) = v(12) + v(4) \\
v_G(3) = v(3) & v_G(14) = v(1) + v(4) & v_G(134) = v(134) \\
v_G(4) = v(4) & v_G(23) = v(2) + v(3) & v_G(234) = v(2) + v(34) \\
 & v_G(24) = v(2) + v(4) & \\
 & v_G(34) = v(34) & \\
v_G(N) = v(1234) & &
\end{array}
$$

$\diamondsuit$

Regola di allocazione rispetto a un grafo G

$$x : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n \ t.c. \sum_{i \in S} x_i(G) = v_G(S) \qquad \forall S \in N/G$$

dove $\mathcal{G}$ è l'insieme dei grafi e N/G è l'insieme delle coalizioni indotte da una componente connessa di G

Stabilità

Una regola di allocazione x è stabile se e solo se:

$$x_i(G) \geq x_i(G \setminus (i,j)) \ e \ x_j(G) \geq x_j(G \setminus (i,j)) \qquad \forall (i,j) \in G$$

Equità

Una regola di allocazione x è equa se e solo se:

$$x_i(G) - x_i(G \setminus (i,j)) = x_j(G) - x_j(G \setminus (i,j)) \qquad \forall (i,j) \in G$$

Teorema 9.1 (Myerson, 1977)

L'unica regola di allocazione equa è il valore di Shapley del gioco ristretto rispetto al grafo Inoltre se il gioco è superadditivo la regola di allocazione è stabile

E' noto come *Valore di Myerson*

Esempio 9.2 (Valore di Myerson) *Sia dato il gioco:*

$N = 1, 2, 3$

$v(1) = 1; v(2) = 2; v(3) = 3; v(12) = 6; v(13) = 8; v(23) = 10; v(N) = 12$

I giochi ristretti (non reciproci) e i valori di Shapley sono:

G	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	N	ϕ		
$\emptyset$	1	2	3	3	4	5	6	1	2	3
a_{12}	1	2	3	6	4	5	9	2.5	3.5	3
a_{13}	1	2	3	3	8	5	10	3	2	5
a_{23}	1	2	3	3	4	10	11	1	4.5	5.5
a_{12}, a_{13}	1	2	3	6	8	5	12	4.167	3.167	4.667
a_{12}, a_{23}	1	2	3	6	4	10	12	1.833	5.333	4.833
a_{13}, a_{23}	1	2	3	3	8	10	12	2	3.5	6.5
a_{12}, a_{13}, a_{23}	1	2	3	6	8	10	12	2.5	4	5.5

$\diamondsuit$

9.2 Giochi sugli archi e sui nodi

Classi di giochi riferiti ad un problema che può essere rappresentato tramite una rete
Appartengono agli *Operations Research Games*, interessanti da un punto di vista strutturale e computazionale in quanto "ereditano" dalla struttura del problema alcune caratteristiche che permettono di semplificare alcuni aspetti complessi della Teoria dei Giochi (funzione caratteristica e suo significato)

Si distinguono due tipi di giochi su reti:
<u>Giochi sugli archi</u>: I giocatori controllano gli archi
<u>Giochi sui nodi</u>: I giocatori controllano i nodi

Il controllo non è necessariamente biunivoco:

- un giocatore può controllare più elementi
- un elemento può essere controllato da più giocatori (comitato)
- possono esistere elementi non controllati da alcun giocatore (pubblici)

9.2.1 Flow Game

Giochi di profitto
Ogni giocatore può controllare più archi
Ogni arco è controllato da un solo giocatore
Non ci sono archi pubblici
$v(S), S \subseteq N$ è il valore del flusso massimo utilizzando la sottorete di S
Sono totalmente bilanciati, cioè il gioco ristretto ad una qualsiasi coalizione è bilanciato
Una allocazione nel nucleo si ottiene per via duale, ma non è assicurato alcun criterio di equità

Esempio 9.3 (Nucleo di un flow game)

$$v_s \xrightarrow{\mathbf{1}/I} v_1 \xrightarrow{\mathbf{2}/II} v_t$$

$$v(I) = v(II) = 0; v(I, II) = 1$$

Il taglio $\{(v_s, v_1)\}$ *genera* $x = (1, 0)$
I giocatori sono simmetrici rispetto al gioco e II *"contribuisce" maggiormente alla rete* $\diamondsuit$

Teorema 9.2 (Kalai e Zemel, 1982)
Un gioco è totalmente bilanciato se e solo se è un flow game

Definizione 9.1 *Dati due giochi* u, v *si chiama* gioco minimo di u e v *il gioco* $w = min(u, v)$ *definito da* $w(S) = min\ (u(S), v(S)), \forall\ S \subseteq N$

- Se u e v sono totalmente bilanciati allora il gioco w è totalmente bilanciato in quanto $Core(u_S) \subseteq Core(w_S)$ oppure $Core(v_S) \subseteq Core(w_S), \forall\ S \subseteq N$

Teorema 9.3 *Un gioco è totalmente bilanciato se e solo se è il gioco minimo di un insieme finito di giochi additivi*

<u>Dimostrazione</u>

Per l'osservazione precedente la condizione è sufficiente

Viceversa sia v un gioco totalmente bilanciato e sia $\{v^S\}_{S\subseteq N}$, un insieme finito di giochi additivi a n giocatori costruiti nel seguente modo:

per ogni $S \subseteq N$

- sia $(x_i)_{i\in S}$ una allocazione di $Core(v_S)$;
- siano $x_j,\ j \in N \setminus S \quad n-s$ numeri reali con $x_j \geq v(N)$;
- sia v^S il gioco additivo generato da $(x_1, ..., x_n)$;

allora si ha:

$$\min_{S\subseteq N}\{v^S(T)\} = v^T(T) = v(T), \forall\ T \subseteq N \Rightarrow v = min\{v^S\}$$

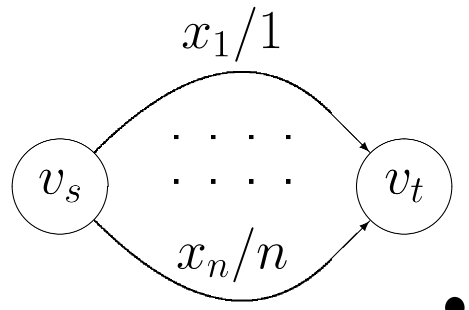
♣

- $(x_i)_{i\in S} \in Core(v_S) \Rightarrow v^S(T) \geq v(T)$ se $T \subseteq S$, con $v^S(T) = v(T)\ se\ T = S$
- $x_j \geq v(N),\ j \in N \setminus S \Rightarrow v^S(T) \geq v(T)$ se $T \not\subseteq S$

Lemma 9.1 *Ogni gioco additivo è un flow game*

Dimostrazione

Il gioco additivo generato da $(x_1, ..., x_n)$ equivale al flow game generato da una rete con n archi che collegano la sorgente al pozzo, in cui l'arco a_i appartiene al giocatore i e ha capacità x_i

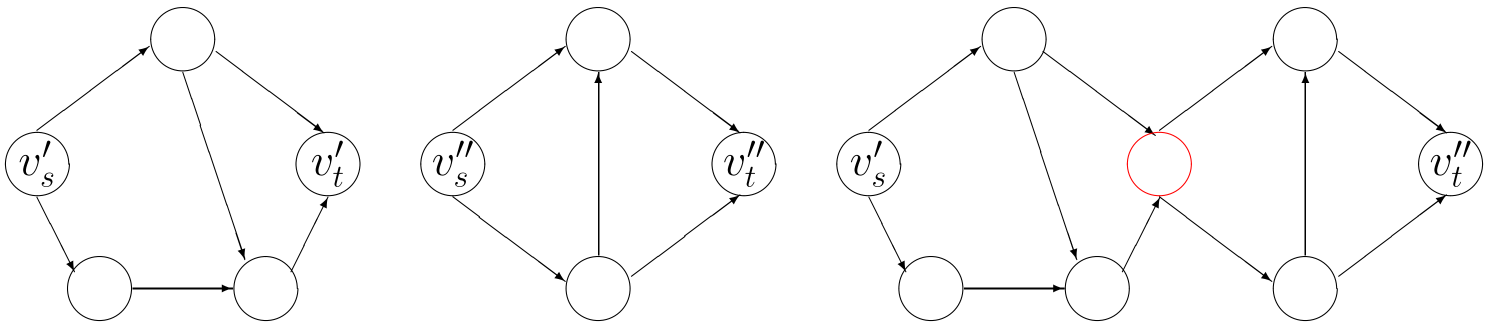


♣

Lemma 9.2 *Il gioco minimo di due flow game è un flow game*

Dimostrazione

Dati due giochi v' e v'' generati dalle reti G' e G'' il gioco $v = min(v', v'')$ è generato dalla rete ottenuta facendo coincidere il pozzo di G' con la sorgente di G''



♣

Dimostrazione del Teorema di Kalai-Zemel

Per i Lemmi 9.1 e 9.2 e il Teorema 9.3 la condizione è sufficiente

Viceversa un flow game è totalmente bilanciato poichè i suoi sottogiochi sono flow game ♣

9.2.2 Shortest Path Game

Giochi di profitto
Ogni giocatore può controllare più nodi
Ogni nodo è controllato da un solo giocatore
Non ci sono nodi pubblici
Alcuni nodi sono detti sorgenti, altri pozzi
$v(S), S \subseteq N$ è la differenza tra il ricavo ottenuto trasportando un bene da una qualsiasi sorgente ad un qualsiasi pozzo e il costo del cammino minimo che attraversa solo nodi di S; se la differenza è negativa $v(S) = 0$
Il nucleo può essere vuoto
Il valore di Shapley è una regola di ripartizione dei profitti che risponde ai principi di equità:

- efficienza
- irrilevanza (i giocatori che controllano solo nodi isolati ricevono un payoff nullo)
- adiacenza (i giocatori che controllano gli estremi di un arco hanno la stessa variazione di payoff se si elimina l'arco)
- non collegamento (due giocatori che non sono connessi hanno la stessa variazione di payoff se si elimina l'altro giocatore)

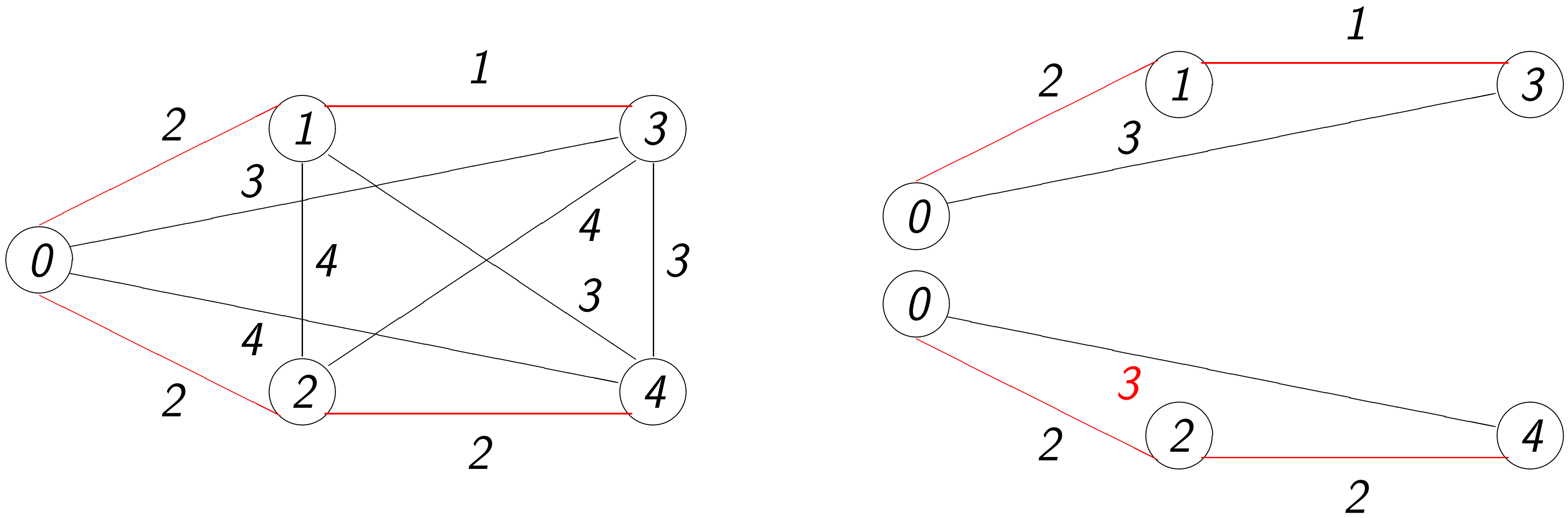
9.2.3 Minimum Cost Spanning Tree Game

Giochi di costo
Ogni giocatore controlla un solo nodo
Ogni nodo è controllato da un solo giocatore
Non ci sono nodi pubblici, eccetto la sorgente
Ogni nodo vuole essere collegato alla sorgente
Il grafo deve essere non orientato e completo (clique)
$c(S), S \subseteq N$ è il costo dell'albero ricoprente di costo minimo che unisce i nodi di S con la sorgente, attraversando solo nodi posseduti da S
Eliminando la restrizione sui nodi si ottiene un gioco monotono
Sono bilanciati
Un'allocazione nel nucleo (Bird, 1976) assegna ad i il costo dell'arco che lo congiunge al predecessore

Il nucleo e il nucleolo (non il valore di Shapley) equivalgono al prodotto cartesiano del nucleo e del nucleolo di una decomposizione in sottogiochi secondo una struttura efficiente $\{P_1, ..., P_m\}$
Si ridefinisce il costo c_{0j} degli archi $(0, j)$ come:

$$c'_{0j} = min \ \left\{ c_{0j}, \min_{k \notin P_j} \{c_{jk}\} \right\}, \qquad \forall \ j \in P_j$$

Esempio 9.4 (Decomposizione di uno spanning tree)



$$Core(c_{13}) = \{(\alpha, 3-\alpha) | 0 \leq \alpha \leq 2\} \qquad \nu(c_{13}) = (1,2) \qquad \varphi(c_{13}) = (1,2)$$

$$Core(c_{24}) = \{(\beta, 4-\beta) | 1 \leq \beta \leq 2\} \qquad \nu(c_{24}) = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}\right) \qquad \varphi(c_{24}) = (1,3)$$

$$Core(c) = \left\{ (\alpha, \beta, 3-\alpha, 4-\beta) | \begin{array}{c} 0 \leq \alpha \leq 2 \\ 1 \leq \beta \leq 2 \end{array} \right\} \quad \nu(c) = \left(1, \tfrac{3}{2}, 2, \tfrac{5}{2}\right) \quad \varphi(c) = \left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{17}{12}, \tfrac{23}{12}, \tfrac{33}{12}\right)$$

$\diamondsuit$

L'allocazione di Bird non è equa per i giocatori "più vicini" alla sorgente

<u>Richiesta debole</u>

Un giocatore chiede ad alcuni successori secondo la soluzione di Bird di "rimborsare" il risparmio ottenuto grazie alla sua presenza

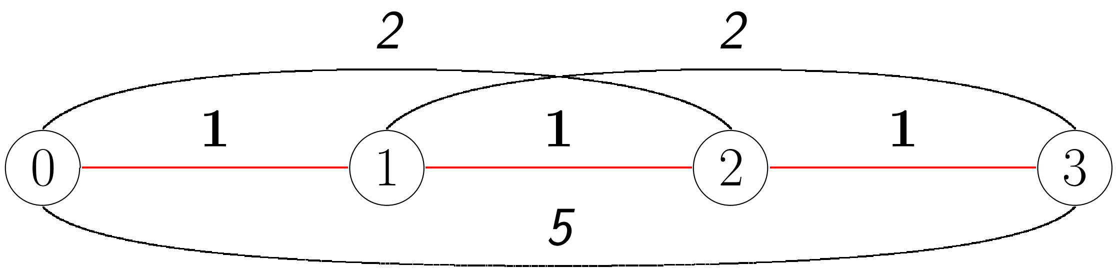
<u>Richiesta forte</u>

Un giocatore chiede ad alcuni successori di "rimborsare" oltre al risparmio ottenuto grazie alla sua presenza anche il "rimborso" che lui ha versato ai suoi predecessori

La richiesta debole genera soluzioni nel nucleo se applicata alla soluzione di Bird

La richiesta forte genera soluzioni nel nucleo se applicata a una soluzione nel nucleo

Esempio 9.5 (Richiesta debole - Richiesta forte) *Si consideri il gioco associato alla rete seguente:*



Soluzione di Bird	$(1,1,1)$
Richiesta debole di 1	$(0,2,1)$
Richiesta debole di 2	$(0,1,2)$
Richiesta forte di 2	$(0,0,3)$

$\diamondsuit$