MATRICI E SISTEMI LINEARI

1) Calcolare i seguenti determinanti:

a - $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ b - $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & -6 \end{vmatrix}$

c - $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ d - $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

e - $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ f - $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

g - $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & -1 & 7 & 1 \\ -8 & 16 & 5 & -14 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ h - $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 5 \\ -6 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 10 & 6 & 0 & 1 & 6 \\ -6 & -4 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

2) Calcolare per quali valori di *k* si annullano i seguenti determinanti:

a - $\begin{vmatrix} 5+k & 2 \\ -2 & k \end{vmatrix}$ b - $\begin{vmatrix} k & -1 \\ 2 & k \end{vmatrix}$ c - $\begin{vmatrix} 1 & -k \\ -k & k^2 \end{vmatrix}$

3) Calcolare il rango delle seguenti matrici:

a - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -4 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c - $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ d - $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

e - $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & -8 & 10 & 6 & -14 \\ 2 & 8 & -1 & -9 & 17 \end{pmatrix}$ f - $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a - $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + z = 3 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ b - $\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ x + y + z + t = -2 \\ x + y + 3z = 1 \\ -x - y - 3z + t = -2 \end{cases}$

5) Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a - $\begin{cases} 2x + 2y + z - t = 2 \\ 2x + y + z + 2t = 3 \\ -2x - 4y + 6t = 1 \\ -4x - 4y - z + 3t = -3 \end{cases}$ b - $\begin{cases} 3x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 4t = -1 \\ 6x + 8y - z + 4t = 0 \\ -3x - y + 2z + 4t = -3 \end{cases}$

c - $\begin{cases} x + y - z - t + u = 1 \\ x + 3y + 3t - u = 0 \\ -2x + 4z + 5t - 3u = -2 \\ 3x - y - 6z - 10t + 6u = 5 \end{cases}$ d - $\begin{cases} 2x + y - z + 2t = 2 \\ 2x + 2y - 2z + 4t = 3 \\ -4x - 3y + 2z - 5t = -5 \\ 2x + 2y - 3z + 5t = 3 \end{cases}$

6) Calcolare le soluzioni dei seguenti sistemi lineari al variare del parametro reale *k*:

a - $\begin{cases} x - ky + 2z = 1 \\ x - y + z = k + 1 \\ 2x - 2y + (k+3)z = 2k + 1 \end{cases}$ b - $\begin{cases} x + ky - z = 2 \\ -x + (k+2)z = -1 \\ x - 4z = 1 \end{cases}$

7) Calcolare le soluzioni del seguente sistema lineare al variare dei parametri reali *k* e *h* :

$$\begin{cases} x - y + z + 3t = 1 \\ ky + z + kt = k \\ -x + y + ht = 0 \end{cases}$$

8) Risolvere i seguenti sistemi lineari al variare del parametro reale *k*:

a - $\begin{cases} 2x + (1+k)y - kz = 1 \\ 2x + (3+2k)y + (4-3k)z = 3 \\ 2x - y - (3-2k)z = -k \end{cases}$ b - $\begin{cases} (1+k)x + y - (1-k)z = 1 \\ (1+k)x + (2+k)y - (1-k)z = 1 \\ (1+k)x - ky + 2kz = 1 \end{cases}$

c - $\begin{cases} kx + y + (1+2k)z = 1 \\ 2kx + (3-k)y + (3+4k)z = 0 \\ -3kx - (4-k)y - (2+7k)z = 1 - k \end{cases}$ d - $\begin{cases} (1-k)x + 3y - (2+k)z = 1 \\ (k-1)x + (k-1)y - (1+k)z = -3 \\ (k-1)x + (1+2k)y + 2(1-k)z = -4 \end{cases}$

e - $\begin{cases} kx + (1-k)y + z = k \\ 2kx + 2y + (3+2k)z = 2k \\ -3kx - (3-k)y - (4+k)z = -2k \end{cases}$ f - $\begin{cases} (1+k)x - (1-2k)y + 2(1+k)z = 0 \\ (1+k)x - 2(1-2k)y + (3+4k)z = 0 \\ (1+k)x - 3(1-2k)y + (5+7k)z = 0 \end{cases}$

SOLUZIONI

1) a - Determinante = -16

b - Determinante = 0

c - Determinante = 0

d - Determinante = 4

e - Determinante = -6

f - Determinante = -13

g - Determinante = -12

h - Determinante = 24

2) a - *k* = -4; -1

b - nessun *k*

c - qualsiasi *k*

3) a - Rango = 3

b - Rango = 2

c - Rango = 2

d - Rango = 2

e - Rango = 2

f - Rango = 4

4) a - (1, -1, 2)

b - (1, -3, 1, -1)

5) a - $\begin{cases} 2x+2y+z-t=2 \\ -y+3t=1 \\ z-t=1 \\ 2t=0 \end{cases}$ da cui t = 0; z = 1; y = -1; x = $\frac{3}{2}$.

b - $\begin{cases} x+y-z-t+u=1 \\ 2y+z+4t-2u=-1 \\ z-t+u=1 \\ 0=1 \end{cases}$ incompatibile.

c - $\begin{cases} 3x+3y-z=1 \\ 2y+z+4t=-2 \end{cases}$ da cui y = $\frac{-2-z-4t}{2}$; x = $\frac{8+5z+12t}{6}$.

d - $\begin{cases} 2x+y-z+2t=2 \\ y-z+2t=1 \\ -z+t=0 \end{cases}$ da cui z = t; y = 1 - t; x = $\frac{1}{2}$.

6) a - $k \neq \pm 1$ una soluzione

$k = -1$ nessuna soluzione

$k = 1$ nessuna soluzione

b - $k \neq 0, 2$ una soluzione

$k = 0$ nessuna soluzione

$k = 2$ $\left(1+4z_0, \frac{1-3z_0}{2}, z_0\right)$

7) $k \neq 0$ ∞^1 soluzioni

$k = 0, h \neq -3$ ∞^1 soluzioni

$k = 0, h = -3$ nessuna soluzione

8) a - $\begin{cases} 2x+(1+k)y-kz=1 \\ (2+k)y+(4-2k)z=2 \\ (1+k)z=1-k \end{cases}$

$k \neq -1, k \neq -2$ una soluzione

$k = -1$ incompatibile

$k = -2$ incompatibile

b -	$\begin{cases}(1+k)x+y-(1-k)z=1\\(1+k)y=0\\(1+k)z=0\end{cases}$	$k \neq -1$ $k = -1$	una soluzione ∞^2 soluzioni
c -	$\begin{cases}kx+y+(1+2k)z=1\\(1-k)y+z=-2\\(2-k)z=2-k\end{cases}$	$k \neq 0,\ k \neq 1,\ k \neq 2$ $k = 0$ $k = 1$ $k = 2$	una soluzione incompatibile incompatibile ∞^1 soluzioni
d -	$\begin{cases}(1-k)x+3y-(2+k)z=1\\(2+k)y+z=-2\\(2-k)z=1\end{cases}$	$k \neq 1,\ k \neq -2,\ k \neq 2$ $k = 1$ $k = -2$ $k = 2$	una soluzione incompatibile incompatibile incompatibile
e -	$\begin{cases}kx+(1-k)y+z=k\\2ky+(1+2k)z=0\\kz=k\end{cases}$	$k \neq 0$ $k = 0$	una soluzione ∞^1 soluzioni
f -	$\begin{cases}(1+k)x-(1-2k)y+2(1+k)z=0\\-(1-2k)y+(1+2k)z=0\\(1+k)z=0\end{cases}$	$k \neq -1,\ k \neq \frac{1}{2}$ $k = -1$ $k = \frac{1}{2}$	una soluzione ∞^1 soluzioni ∞^1 soluzioni

ALGEBRA LINEARE

1) Dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^{n,n}$:

$$V = \{ X \subset \mathbf{R}^{n,n} \mid X^T X = I \}$$

$$U = \{ X \subset \mathbf{R}^{n,n} \mid AX = 0 \}$$

2) Dato il sottoinsieme $V = \{ X \subset \mathbf{R}^{n,n} \mid X + X^T = 0 \}$; dire se è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^{n,n}$ e verificare che per n dispari $\det(X) = 0$.

3) L'insieme $\mathbf{R}_n[x]$ è un sottospazio vettoriale dello spazio dei polinomi?

4) L'insieme delle funzioni continue è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni?

5) Dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^{n,n}$:

$$D = \{ A \subset \mathbf{R}^{n,n} \mid a_{ij} = 0 \,,\, i \neq j \}$$

$$D' = \{ A \subset \mathbf{R}^{n,n} \mid a_{ij} = 0 \,,\, i \neq j \text{ e } a_{ii} \neq 0 \}$$

6) Dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}_3[x]$:

$$P = \{ p(x) \subset \mathbf{R}_3[x] \mid p(1) = 0 \}$$

$$P' = \{ p(x) \subset \mathbf{R}_3[x] \mid p(2) = 3 \}$$

7) Dire se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti:

$$V = \{(0, 1, -1, 1), (2, 3, 0, -1), (-2, 0, 1, 2), (-1, -1, -1, 1)\}$$

$$V' = \{(0, 1, -2, 1, 1), (2, 0, -1, 0, -1), (-2, 2, -3, 2, 3)\}$$

$$V'' = \{(3, 2, -1), (2, -1, 0), (-2, 3, -2), (-1, 0, -1)\}$$

8) Dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, k, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 3)$, $\mathbf{v}_4 = (h\,,\, 0, 2h\,,\, k\,)$, dire per quali valori dei parametri reali k e h i seguenti insiemi sono liberi:

$$A = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$$

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$$

$$C = \{\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$$

9) Siano dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$:

$$U = \{ \mathbf{x} \subset \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$$

$$V = L((1, 1, 1))$$

Verificare che U e V sono supplementari.

Decomporre il vettore (2, 1, 3) come somma di un vettore di U e uno di V.

10) Dati i sottoinsiemi:

$$V = \{ X \subset \mathbf{R}^{n,n} \mid \mathrm{tr}(X) = 0 \}$$

$$U = \{ X \subset \mathbf{R}^{n,n} \mid \mathrm{tr}(X) = 1 \}$$

Dire se V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^{n,n}$.

Nel caso n = 2 determinare una base e la dimensione di V.

Dire se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^{n,n}$.

11) Siano dati i vettori di $\mathbf{C}^3$:

$\mathbf{u} = (2 + i, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (2 - i, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (3 + 3i, 1 + i, 1 + i)$

Determinare la dimensione del sottospazio H generato da **u**, **v**, **w**.

Verificare che H ∫ F = $\{(x, y, z) \subset \mathbf{C}^3 \mid y - z = 0\}$

12) Sia dato uno spazio vettoriale $\mathbf{V}_4$ avente base $\mathbf{B}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.

Verificare che i vettori $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$; $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$; $\mathbf{u}_3 = -2\mathbf{v}_2$; $\mathbf{u}_4 = 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ formano una base **B'** per $\mathbf{V}_4$.

Scrivere le equazioni del cambiamento di base da **B** a **B'**.

Determinare le componenti del vettore $\mathbf{x} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4$ rispetto alla base **B'**.

13) Dato il sistema lineare $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$ provare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ e determinarne una base.

14) L'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} 2x + 4y - z + 3 = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$?

15) Dato lo spazio vettoriale reale $\mathbf{R}[X]$, provare che l'insieme $\mathbf{R}^{(3)}[X]$ dei polinomi reali di grado minore o uguale a 3 è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}[X]$ e determinarne una base che contenga il polinomio $1 + X + X^2$.

16) Sia *M* lo spazio vettoriale delle matrici 2 × 2 a coefficienti reali. Determinare il più piccolo sottospazio che contenga le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17) Sia *M* lo spazio vettoriale delle matrici 2 × 2 a coefficienti reali. Determinare due sottospazi di *M* di diversa dimensione che non contengano la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e per ciascuno di questi determinare una base.

18) Sia $F(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni definite da **R** a **R**. Stabilire se sono sottospazi:

- l'insieme delle funzioni f tali che $f(0) = 0$;
- l'insieme delle funzioni f tali che $f(0) = 1$;
- l'insieme delle funzioni f tali che $f(1) = 0$;
- l'insieme delle funzioni f tali che $f(x) + f'(x) = 0$.

19) Determinare i valori reali di a per cui $\{(a, 0, 1), (1, 1, 1), (2a, 1, 2)\}$ è una famiglia di vettori linearmente indipendenti nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$.

20) Dire se le seguenti applicazioni sono lineari:

$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ $\qquad f(\mathbf{x}) = a \cdot \mathbf{x}$ $\qquad a \subset \mathbf{R}^3$

$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$	$f(\mathbf{x}) = a \wedge \mathbf{x}$	$a \subset \mathbf{R}^3$
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$	$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$	
$f : \mathbf{R}^{2,2} \to \mathbf{R}^{2,2}$	$f(\mathbf{X}) = \mathrm{A}\mathbf{X}\mathrm{A}$	$\mathrm{A} \subset \mathbf{R}^{2,2}$
$f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$	$f(a + i\,b) = a - i\,b$	$\lambda \subset \mathbf{C}$
$f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$	$f(a + i\,b) = a - i\,b$	$\lambda \subset \mathbf{R}$

21) Determinare la matrice A associata alle seguenti applicazioni lineari rispetto alle basi canoniche:

a -	$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$	$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$	$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$
b -	$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$	$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x}$	$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$
c -	$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$	$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})$	

Per g determinare la matrice A' associata alla base $\mathbf{B}'((1, 1), (1, -1))$.

22) Verificare che i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 2)$ rispetto alla base canonica $\mathbf{B}$ formano una base di $\mathbf{R}^3$. Data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$f(\mathbf{v}_1) = (3, 1, 0)$

$f(\mathbf{v}_2) = (-1, 0, 2)$

$f(\mathbf{v}_3) = (0, 2, 0)$

determinare la matrice A associata ad f rispetto a $\mathbf{B}$ e la matrice A' rispetto a $\mathbf{B}'$.

23) Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3$ con la base $\mathbf{B}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ definita da:

$f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \frac{3}{2}\mathbf{v}_2$

$f(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3) = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3$

$f(2\mathbf{v}_1) = 4\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$

Verificare che è invertibile e determinare la matrice A associata ad f^1 rispetto a $\mathbf{B}$.

24) Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}_2$ definita dalla matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathbf{B}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Determinare la matrice A' associata ad f rispetto alla base $\mathbf{B}'(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ dove $\mathbf{u}_1 = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{u}_2 = -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

25) Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e sia $\alpha : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un'applicazione lineare. Verificare che se λ è un autovalore di α allora λ^n è autovalore di α^n.

26) Sia data l'applicazione lineare f definita dalla matrice A:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinare una base per ker$f$ e im$f$. Calcolare gli autovalori di f e i relativi autospazi.

27) Quanti sono gli omomorfismi f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tali che f(1, 0, 0) = (1, 0, 0) e f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)?

28) Sia f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'omomorfismo definito da:

$$f(1, 0, 0) = (0, 2, 0); \quad f(0, 1, 0) = (1, 0, 0); \quad f(0, 0, 1) = (\pi, \sqrt{2}, 0).$$

Determinare una base per ker f e stabilite se f è iniettivo.

29) Dato l'insieme W:= { (t, 2t, -t) | t $\subset$ **R** }, stabilire se è uno sottospazio di $\mathbf{R}^3$ e determinarne una base. Determinare un omomorfismo f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che W = ker f.

30) Analogamente con W:= { (t, u, u+t) | u, t $\subset$ **R** }.

31) E' vero che { (t, u+t, u·t) | u, t $\subset$ **R** } è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$?

SOLUZIONI

1) NO - SI

2) SI

3) SI

4) SI

5) SI - NO

6) SI - NO

7) SI - NO - NO

8) per $k \neq 0$ - per $k \neq 0$ - per $k \neq 0$, $h \neq \frac{1}{2}$

9) (-2, -3, -1) + (4, 4, 4)

10) SI - dim(V) = 3 - NO

11) dim(H) = 2

12) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_{B'} = \left(1, -1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

14) NO

16) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{t.c. } a, b \in \mathbf{R} \right\}$

18) SI - NO -SI - SI

19) $a \neq 1$

20) SI - SI - NO -SI - NO - SI

21) a - $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$

b - $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$

c - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ con $P = A$

22) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

23) $A = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}$

24) $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ -32 & 20 \end{pmatrix}$ con $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

25) Per induzione.

26) $\ker f = L(e_4 - e_3)$ - $\operatorname{im} f = L(e_1, e_2, 2e_4 - 3e_3)$

$V_0 = \ker f$ - $V_{-2} = L(e_1, e_2)$ - $V_1 = L(2e_2 - 3e_3 + 2e_4)$

28) $\ker f = L(\sqrt{2}, 2\pi, -2)$ - NO

29) $W = L(1, 2, -1)$

30) $W = L((0, 1, 1), (1, 0, 1))$

31) NO

GEOMETRIA ANALITICA

NEL PIANO

1) Determinare la retta passante per il punto P(2, 1) e parallela alla retta r: $2x + y - 1 = 0$.

2) Determinare la retta passante per il punto P(3, -2) e ortogonale alla retta r: $3x - y = 0$.

3) Dati i punti A(2, -1) e B(0, 3) determinare l'asse del segmento AB.

4) Determinare l'ortocentro del triangolo di vertici A(1, 1), B(3, 0), C(0, 1).

5) Sia dato un triangolo equilatero ABC, avente il vertice A nel punto di intersezione delle rette r: $x - 2y + 8 = 0$ ed r': $x + y - 1 = 0$ e i vertici B e C sulla retta s: $2x - 3y = 0$.
   a) Determinare le coordinate dei vertici B e C.
   b) Determinare l'area della superficie del triangolo.

6) Sia dato il fascio generato dalle circonferenze:
   Γ: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ e Γ': $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$.
   a) Determinare l'asse centrale e l'asse radicale.
   b) Determinare la circonferenza passante per il punto P(1, -4).
   c) Determinare la circonferenza tangente alla retta $x = 2 + \sqrt{10}$.

7) Determinare la distanza tra le seguenti coppie di rette:
   a) r: $x - 4y + 1 = 0$; r': $x - 4y - 2 = 0$
   b) r: $x - 2y + 1 = 0$; r': $x - 4y + 3 = 0$

8) Calcolare la distanza tra la retta r: $3x - 4y = -10$ e la circonferenza Γ: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

9) Tra le rette passanti per il punto P(2, 1):
   a) Determinare quella passante per A(3, 0).
   b) Determinare quella parallela alla retta r: $2x - y + 1 = 0$.
   c) Determinare quella ortogonale alla retta r: $3x + 2y - 3 = 0$.

10) Determinare l'angolo tra le rette r: $x - 2y + 1 = 0$ e r': $3x + y - 3 = 0$.

SOLUZIONI

1) $2x + y - 5 = 0$

2) $x + 3y + 3 = 0$

3) $x - 2y + 1 = 0$

4) O(3, 10)

5) a) $B\left(3\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$; $C\left(-3\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right)$
   b) $S = \dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

6) a) asse centrale: $x - y + 1 = 0$; asse radicale: $x + y - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 7 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

7) a) $d(r, r') = \frac{3\sqrt{17}}{17}$

b) $d(r, r') = 0$

8) $d(r, \Gamma) = 1$

9) a) $x + y - 3 = 0$

b) $2x - y - 3 = 0$

c) $2x - 3y - 1 = 0$

10) $\cos rr' = \frac{\sqrt{2}}{10}$

NELLO SPAZIO

1) Determinare il piano passante per il punto $P(2, 3, -1)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u}(2, -1, 0)$ e $\mathbf{v}(1, 3, -4)$.

2) Determinare il piano passante per i punti $P(1, 0, 2)$, $Q(-2, 1, 1)$ e parallelo all'asse x.

3) Determinare la retta passante per il punto $P(1, -3, 0)$ e parallela al vettore $\mathbf{u}(2, 1, -2)$.

4) Studiare al variare dei parametri reali h e k la mutua posizione dei due piani:

π_1: $2x + hy - 2z + 3 = 0$

π_2: $x + 2y + kz + 1 = 0$

5) Dato il punto $P(2, 1, -1)$ determinare il piano passante per P e inoltre:

a) parallelo al piano π: $2x - y + 3z - 1 = 0$.

b) contenente la retta r: $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$.

c) perpendicolare alla retta r': $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$.

d) perpendicolare al piano π': $2x + y - 3z + 1 = 0$ e passante per il punto $Q(3, -1, 0)$.

6) Determinare i punti della retta r: $\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$

a) aventi distanza 4 dal piano π: $2x - y - 2z + 1 = 0$.

b) equidistanti dal piano π e dal piano π': $z = 2$.

7) Determinare il punto simmetrico di $P(1, 1, -2)$ rispetto alla retta r: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

8) Tra tutte le sfere tangenti al piano π: $x + y + z - 2 = 0$ nel punto $P(1, -1, 2)$ determinare quelle secanti il piano xy secondo una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.

SOLUZIONI

1) $4x - 8y - 7z + 9 = 0$

2) $y + z - 2 = 0$

3) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = -2t \end{cases}$

4) $h = 4$ e $k = -1$ piani paralleli

altrimenti piani incidenti

5) a) $2x - y + 3z = 0$

b) $y - 3z - 4 = 0$

c) $x + 2y + z - 3 = 0$

d) $x + y + z - 2 = 0$

6) a) $A(3, -1, -2)$; $B(-3, -1, 4)$

b) $C(3, -1, -2)$; $D\left(-\frac{3}{7}, -1, \frac{10}{7}\right)$

7) $O(0, 0, 0)$

8) $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 13x + 11y - 25z + 38 = 0$; $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3x + 5y - 7z + 10 = 0$