PROVA SCRITTA DI MATEMATICHE SUPERIORI DEL 9/2/2000

Cognome **Nome** **Matr.**

	☐ **Rec. primo**		☐ **Rec. secondo**		☐ **Rec. terzo**		☐ **Completo**		
Esercizi	1	2	1	3	1	4	2	3	4
Punti	18	15	18	15	18	15	10	10	10
Tempi	40m	20m	40m	20m	40m	20m	20m	20m	20m

1) Sia dato il seguente problema lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max\ & -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \\ \text{s.t.}\ & x_1 - 2x_3 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 - 4x_3 \geq -1 \\ & x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a - Risolvere **P** col metodo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto.

b - Determinare la regione ottimale di **P** e del suo duale.

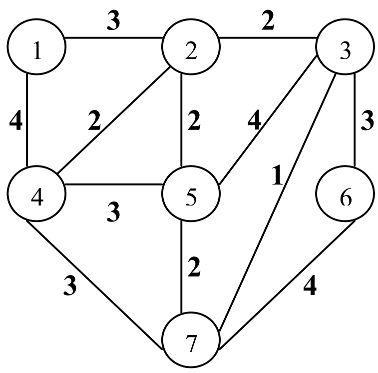
2) Sia dato il seguente problema lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \qquad (*) \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \qquad (*) \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

a - Scrivere il problema $\mathbf{P}_S$ ottenuto col rilassamento surrogato dei vincoli di uguaglianza (*) del problema **P** con moltiplicatori unitari.

b - Determinare la soluzione ottimale di $\mathbf{P}_S$ con semplici considerazioni e dire se è ottimale per il problema **P**, giustificando la risposta.

3) Determinare con l'algoritmo di Prim uno spanning tree di costo minimo per il seguente grafo, analizzando vertici e spigoli in ordine crescente di indice; ad ogni iterazione si indichi esplicitamente lo spigolo aggiunto.



4) Si consideri il seguente gioco TU in forma estesa:

$v(1) = 0$, $v(2) = 0$, $v(3) = 0$, $v(12) = 1$, $v(13) = 2$, $v(23) = 2$, $v(123) = 3$

a - Dire se il valore di Shapley appartiene al nucleo.

b - Dare la rappresentazione grafica bidimensionale del gioco evidenziando il valore di Shapley e il nucleo.

PROVA SCRITTA DI RICERCA OPERATIVA DEL 9/2/2000

Cognome **Nome** **Matr.**

1) Sia dato il seguente problema lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_3 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 - 4x_3 \geq -1 \\ & x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

a - Risolvere **P** col metodo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto.

b - Determinare la regione ottimale di **P** e del suo duale.

TEMPO SUGGERITO 40m
PUNTEGGIO 16

2) Sia dato il seguente problema lineare **P**:

$$\begin{array}{lll} \max & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 & (*) \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 & (*) \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2 & \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{array}$$

a - Scrivere il problema $\mathbf{P}_S$ ottenuto col rilassamento surrogato dei vincoli di uguaglianza (*) del problema **P** con moltiplicatori unitari.

b - Determinare la soluzione ottimale di $\mathbf{P}_S$ con semplici considerazioni e dire se è ottimale per il problema **P**, giustificando la risposta.

TEMPO SUGGERITO 20m
PUNTEGGIO 14

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 9/2/2000

1a) Applicando l'algoritmo richiesto si ottiene:

	x1	x2	x3	
u1	1 *	0	-2	-1
u2	1	-1	-4	1
u3	0	-1	1	2
z	-2	2	7	0

	u1	x2	x3	
x1	1	0	2	1
u2	1	-1 *	-2	2
u3	0	-1	1	2
z	-2	2	3	-2

	u1	u2	x3	
x1	1	0	2	1
x2	1	-1	-2	2
u3	-1	1	3	0
z	0	-2	-1	2

La tabella è ottimale e rappresenta la soluzione primale x* = (1, 2, 0), z* = 2 la soluzione duale u* = (0, 2, 0), w* = 2.

1b) La presenza di un termine nullo nella riga di z induce a far cardine sull'elemento di posto 3-1:

	u3	u2	x3	
x1	-1	1	5	1
x2	-1	0	1	2
u1	-1	1	3	0
z	0	-2	-1	2

La tabella rappresenta ancora la soluzione x* e proseguendo si torna alla tabella precedente, per cui x* è l'unica soluzione primale. Relativamente al duale la presenza di un termine nullo tra i termini noti induce a far cardine sull'elemento di posto 3-3:

	u1	u2	u3	
x1	5/3	-2/3	2/3	1
x2	1/3	-1/3	-2/3	2
x3	1/3	-1/3	1/3	0
z	-1/3	-5/3	-1/3	2

La tabella rappresenta la soluzione duale $u^{\#}$ = (1/3, 5/3, 1/3)e proseguendo si torna alla tabella precedente, per cui l'insieme ottimale duale corrisponde al segmento di estremi u* e $u^{\#}$.

2a) Il problema $\mathbf{P}_S$ è:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 = 3 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

2b) Il vincolo di uguaglianza di $\mathbf{P}_S$ impone $x_1 = 3/2$. Confrontando il vincolo di disuguaglianza e la funzione obiettivo si ricava che è più vantaggioso assegnare tutto alla variabile x_4, ottenendo $x_4 = 1/2$. Pertanto si ha:

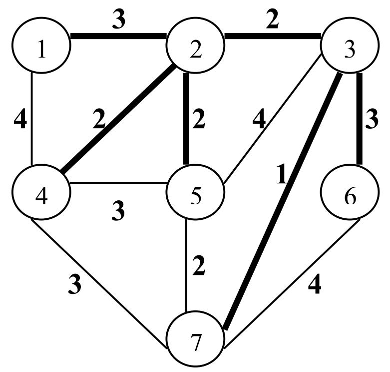
$x_S^* = (3/2, 0, 0, 1/2)$, $z^* = 2$

La soluzione è ottimale per **P** in quanto:

$v_1(x_S^*) : 3/2 + 1/2 = 2$ OK

$v_2(x_S^*) : 3/2 - 1/2 = 1$ OK

3) Si aggiungono ordinatamente gli spigoli a_{12}, a_{23}, a_{37}, a_{24}, a_{25}, a_{36}:



4a) Applicando la procedura per il calcolo del valore di Shapley si ha:

$$\varphi = (5/6,\ 5/6,\ 8/6)$$

che verifica tutte le condizioni del nucleo.

4b) La figura richiesta è: